MECÁNICA ANALÍTICA

Tarea 6 Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Considere los siguientes sistemas mecánicos :

(1) Una partícula libre en $\mathbb{R}^3$.

(2) Una partícula en $\mathbb{R}^3$ en un campo potencial.

(3) El péndulo plano.

(4) El doble péndulo plano.

(5) El péndulo esférico.

(6) Un oscilador armónico bi-dimensional.

Para cada uno de ellos escribir la función Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange. Efectuar una transformación de Legendre y escribir el Hamiltoniano asociado y las ecuaciones de Hamilton mostrando su equivalencia con las ecuaciones de Lagrange. Encontrar (si existen) cantidades conservadas. ¿Cuál es el espacio de configuraciones para cada uno de estos sistemas ?

Ejercicio 2. Sea el Lagrangiano

$$L(q,\dot{q}) = -mc^2\left(1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - V(q), \qquad q \in \mathbb{R}.$$

donde $m, c > 0$. Encuentre el Hamiltoniano. Haga un dibujo del plano fase para el caso donde $V(q) = \frac{1}{2}kq^2$ ($k > 0$). (Este es el Lagrangiano de una partícula en un campo de fuerzas según la teoría de la relatividad).

Ejercicio 3. Sea z_0 un punto fijo del sistema Hamiltoniano $\dot{z} = J\nabla H(z)$ en $\mathbb{R}^{2n}$.

(a) Muestra que la linealización alrededor de z_0 es también un sistema Hamiltoniano. Escribe el Hamiltoniano en términos de H y sus derivadas parciales.

(b) Muestra que si el Hessiano de H en z_0 es estríctamente positivo (o estrictamente negativo) entonces z_0 es un punto fijo estable. En este contexto, la estabilidad significa que existen abiertos $U_0 \subset U$ alrededor de z_0 tal que cada trayectoria de la ecuación que empieza en U_0 se queda en U, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(c) Sea el sistema Newtoniano $\ddot{q} = -\nabla V(q)$ con $q \in \mathbb{R}^n$. Escribe este sistema como un sistema Hamiltoniano y muestra que los equilibrios que corresponden a mínimos locales aislados de V son estables en el sentido de la pregunta anterior.

Ejercicio 4. Considere $\mathbb{R}^3$ con variables cartesianas $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$.

(i) Demostrar que la siguiente relación satisface las propiedades de un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$ para funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\{f,g\}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\cdot(\nabla f(\mathbf{M}) \times \nabla g(\mathbf{M})).$$

(ii) Demostrar que la función $K(\mathbf{M}) = ||\mathbf{M}||^{\mathbf{2}}$ satisface que $\{K, f\} = 0$ para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Las funciones con esta propiedad se llaman *Casimires* del corchete de Poisson.

(iii) (Bono) Demostrar que las ecuaciones diferenciales que definen el campo Hamiltoniano de la función

$$H(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)$$

coinciden con las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido.