MECÁNICA ANALÍTICA

Tarea 5 Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Demostrar que los momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 de cualquier cuerpo satisfacen las desigualdades del triángulo

$$I_1 \leq I_2 + I_3, \qquad I_2 \leq I_3 + I_1, \qquad I_3 \leq I_1 + I_2,$$

y que la igualdad se da si y solo si el cuerpo es plano.

Ejercicio 2. Encontrar los momentos principales de inercia (respecto del centro de masa) para los siguientes cuerpos homogéneos :

(a) Un cilindro circular de radio R y altura h.

(b) Un cono circular de altura h y base circular de radio R.

(c) Un elipsoide triaxial con semi-ejes a, b, c.

Ejercicio 3. Considerar las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido

$$\dot{M}_1 = a_1 M_2 M_3, \qquad \dot{M}_2 = a_2 M_1 M_3, \qquad \dot{M}_3 = a_3 M_1 M_2,$$

donde

$$a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}, \qquad a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}, \qquad a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2},$$

bajo el supuesto de que $I_1 > I_2 > I_3$.

Durante todo el ejercicio suponga que las condiciones iniciales son tales que la energía

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)$$

es igual a $\frac{||\mathbf{M}||^2}{2I_2}$.

(i) Demostrar que las trayectorias $(M_1(t), M_2(t), M_3(t))$ del sistema están contenidas en dos círculos máximos de la esfera de momento angular $||\mathbf{M}||$ constante que pasan por el eje M_2 y están contenidos en los planos

$$M_3 = \pm M_1 \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}.$$

(ii) Obtenga expresiones explícitas para $M_1(t), M_2(t), M_3(t)$ suponiendo que $M_2(0) = 0$.

Ejercicio 4. Sean L y B matrices $n \times n$ dependientes del tiempo y tales que

$$\dot{L} = BL - LB = [B, L].$$

Las matrices L y B forman un *par de Lax*. Seguir los siguientes pasos para demostrar que los valores propios de $L(t)$ son constantes de movimiento.

(a) Demostrar que cualquier solución invertible $U(t)$ de la ecuación

$$\frac{dU}{dt} = BU$$

satisface

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}LU) = 0.$$

(b) Utilizar la solución particular que tiene condición inicial $U(0) = Id$ para demostrar que $L(t)$ es conjugado a $L(0)$.

(c) Concluir que las funciones

$$F_k = Tr(L^k)$$

son constantes de movimiento.

Dado que los valores propios de L son constantes de movimiento, la evolución de la ecuación $\dot{L} = [B, L]$ a veces se llama una *deformación iso-espectral*.

Ejercicio 5.

(a) Demostrar que las ecuaciones de Euler del cuerpo rígido se pueden escribir en forma de par de Lax donde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

y donde

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_2\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3,$$

con I_1, I_2, I_3 los momentos principales de inercia del cuerpo.

(b) Demostrar que a partir de los valores propios de L únicamente se puede recuperar la integral de momento angular

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

pero que no es posible obtener la integral de energía.

(c) Encontrar una matriz diagonal J tal que las relaciones

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_2\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3,$$

se pueden expresar como $L = -JB - BJ$.

(d) Demostrar que para cualquier valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido son equivalentes al *par de Lax con parámetro* descubierto por Manakov (1976) :

$$\frac{d}{dt}(L + \lambda J^2) = [B - \lambda J, L + \lambda J^2].$$

(e) Argumentar que las funciones

$$F_k = Tr((L + \lambda J^2)^k)$$

son constantes de movimiento. Más aún, son polinomios en λ cuyos coeficientes también son constantes de movimiento.

Verificar que el coeficiente constante de F_2 es igual a

$$-2(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)$$

y que el coeficiente de λ de F_3 es igual a

$$-\frac{3}{2}\left(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2\right)(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + 3I_1I_2I_3\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right)$$

Es decir, a partir del par de Lax con parámetro de Manakov es posible obtener las integrales de momento y de energía.

Ejercicio 6. (Bono) La posición y velocidad de un cuerpo rígido están determinadas por puntos en la variedad 6 dimensional, $T\,SO(3)$. Las primeras integrales m_1, m_2, m_3 y E, son cuatro funciones en $T\,SO(3)$ independientes. De esta manera, las cuatro funciones,

$$m_1 = C_1, \quad m_2 = C_2, \quad m_3 = C_3, \quad E = C_4 > 0,$$

definen una subvariedad 2 dimensional, V_c, en la variedad 6 dimensional, $T\,SO(3)$.

Demuestra que las componentes conexas de V_c son toros y que se pueden escoger coordenadas φ_1, φ_2 mod 2π en V_c tales que

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c), \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2(c)$$

Sugerencia : Tomar la fase de la variación periódica de $\mathbf{M}$ como φ_1.