MECÁNICA ANALÍTICA

iimas

Tarea 4 Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Una partícula P de masa m se mueve en un círculo de radio R y centro O contenido en un plano vertical. La partícula está sujeta a una fuerza misteriosa cuya energía potencial está dada por $W = -k\sin^2\theta$ donde $k > 0$ y θ denota el ángulo entre OP y la recta vertical descendente. Además de la fuerza misteriosa, la partícula P también resiente la fuerza de la gravedad.

(a) Haga un diagrama en donde muestre los puntos donde la fuerza misteriosa se anula y su dirección en los otros puntos.

(b) Encuentre expresiones para las energías cinética y potencial de la partícula (añadiendo la fuerza de la gravedad), y así encuentre el Lagrangiano. Deduzca la ecuación de movimiento de la partícula.

(c) Encuentre los equilibrios del sistema (su número dependerá del valor de k comparado con $\frac{1}{2}mgR$).

(d) Determine la estabilidad de los equilibrios encontrados en el inciso anterior y para aquellos que sean estables determine el periodo aproximado de pequeñas oscilaciones.

Ejercicio 2. Una partícula de masa m está restringida a moverse sobre el paraboloide de revolución $z = \alpha(x^2 + y^2)$ donde $\alpha > 0$ (cuyo eje es vertical), bajo la influencia de la gravedad y sin fricción.

(a) Encontrar el problema con un grado de libertad que describe el movimiento.

(b) ¿Qué condiciones debe satisfacer la velocidad inicial de la partícula para que el movimiento sea circular ?

(c) Encontrar el periodo de oscilaciones pequeñas alrededor del movimiento circular encontrado en el inciso (b).

Ejercicio 3. Una coordenada q_i se llama cíclica si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$. Sea $q \in \mathbb{R}^n$ y un Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$. La coordenada q_1 es aquí una "coordenada ciclica" del sistema.

(a) Encuentra una familia uniparamétrica de difeomorfismos que deja a $\mathcal{L}$ invariante y también encuentra la ley de conservación correspondiente.

(b) Considera el Lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r)$ (con $r^2 = x^2 + y^2$) y demuestra que es invariante bajo la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

(c) Haz el cambio de variables a coordenadas polares,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Identifica la variable cíclica y escribe la ley de conservación de acuerdo al inciso (a). Explica la relación entre la ley de conservación y la invarianza bajo la transformación (4).

Ejercicio 4. Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

con $q \in \mathbb{R}^n$. Suponer que los coeficientes $g_{ij}(q)$ definen una matriz simétrica y positiva, $\forall q$.

(a) Escribe las ecuaciones de Euler-Largrange para $\mathcal{L}$ (estas son las ecuaciones geodésicas para la métrica g_{ij}). Mostrar que si $q(t)$ es una solución de las ecuaciones geodésicas, entonces $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = 0$.

(b) Escribe las ecuaciones geodésicas para una supeficie de revolución en $\mathbb{R}^3$ (describir la superficie utilizando coordenadas cilindricas). Escribir la primera integral que corresponde a la simetría respecto a rotaciones. Utilizar esta integral para reducir las ecuaciones a un sistema de un grado de libertad.

Ejercicio 5. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven en el plano bajo las siguientes condiciones :

La partícula m_1 está restringida a moverse en el eje de las x y la partícula m_2 al eje de las y.

Las partículas se mueven bajo la influencia del potencial

$$U = \frac{-k}{d(m_1, m_2)}$$

donde $k > 0$ es una constante y $d(m_1, m_2)$ es la distancia euclideana entre m_1 y m_2.

(a) Dar el espacio de configuraciones del sistema y el número de grados de libertad.

(b) Escribir el Lagrangiano del problema.

(c) En el caso en que $m_1 = m_2 = 1$, escribir el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares y encontrar una variable cíclica y su correspondiente cantidad conservada.

(d) Es sistema del inciso anterior con una cantidad conservada se puede escribir como un sistema de un grado de libertad. Escribir el sistema y determinar una condición sobre la energía del sistema para que el moviemiento de las partículas sea acotado.