Tarea 2

MECÁNICA ANALÍTICA

Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Suponga que $U(b) = E$ y que $U(x) < E$ para $x \in (a, b)$. Suponga además que $U'(b) = 0$ y $U''(b) < 0$. Demuestre que existe $0 < \delta < b - a$ tal que

$$\int_{b-\delta}^{b} \frac{dw}{\sqrt{2(E - U(w))}} = \infty.$$

Ejercicio 2. Diseñar con detalle el diagrama de fases de los siguientes sistemas conservativos con un grado de libertad

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -U'(x) \end{aligned}$$

donde el potencial $U(x)$ está dado por :

(1) $U(x) = x^3$,
(2) $U(x) = (x^2 - 1)^2$,
(3) $U(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Ejercicio 3. Considere las ecuaciones de movimiento del péndulo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{g}{\ell} \sin x, \end{aligned} \tag{1}$$

A cada pareja de ángulo inicial y velocidad inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ corresponde un movimiento específico del péndulo. Existen órbitas que en el plano xy se ven como curvas no acotadas. Estas corresponden a un movimiento del péndulo que no es oscilatorio y que da vueltas en un sentido indefinidamente. Otro tipo de órbitas aparecen como curvas cerradas en el plano xy y corresponde a un movimiento periódico del péndulo, que cambia de sentido en cada periodo. Existe un tercer tipo de órbitas que corresponde a la frontera de los dos anteriores movimientos y que en el plano xy es el conjunto de nivel

$$\Lambda = \left\{ E(x, y) = E(\pi, 0) = \omega^2 \right\},$$

donde $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Este conjunto de nivel es llamado la *separatriz*.

(a) Demostrar que la separatriz puede ser descrita como

$$\Lambda = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4\omega^2 \cos^2(x/2) \right\}.$$

(b) Sea $(x_0, y_0) \in \Lambda$ con $y_0 > 0$ y $-\pi < x_0 < \pi$. Sea $(x(t), y(t)) = \Phi^t(x_0, y_0)$ donde Φ es el flujo del sistema de ecuaciones (1). Demostrar que $x(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{x} = 2\omega \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Encontrar $\Phi^t(x_0, y_0)$.

Ayuda : La identidad trigonométrica

$$\frac{1 + \tan(\frac{\alpha}{2})}{1 - \tan(\frac{\alpha}{2})} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha},$$

puede ser de utlilidad.

(c) Demostrar explícitamente que si $(x_0, y_0) \in \Lambda$, $y_0 > 0$ y $-\pi < x_0 < \pi$ entonces $\Phi^t(x_0, y_0)$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{t\to\infty} \Phi^t(x_0, y_0) = (\pi, 0),$$
$$\lim_{t\to-\infty} \Phi^t(x_0, y_0) = (-\pi, 0).$$

(d) Calcular la pendiente de la separatriz en el punto $(\pi, 0)$. Interprete gráficamente el resultado en el diagrama de fases del sistema en el plano xy.

Ejercicio 4. Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el potencial asociado a un sistema conservativo con un grado de libertad. Suponga que $\xi \in \mathbb{R}$ es un mínimo estricto de U con $U''(\xi) > 0$. Encontrar el período de oscilaciones pequeñas en una vecindad de ξ. Es decir, calcular el límite

$$T_0 := \lim_{E\to E_0} T(E)$$

donde E es la energía del sistema y $E_0 := U(\xi)$.

Ejercicio 5. Considere un sistema conservativo con un grado de libertad. Suponga que $S(E)$ es el área comprendida en el interior de una curva cerrada en el espacio de fases correspondiente al nivel de energía E. Mostrar que el período de oscilaciones en esta curva es igual a

$$T = \frac{dS}{dE}.$$

Ejercicio 6. Considere el problema de Kepler

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \frac{-k\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3},$$

donde k es una constante positiva.

Demostrar que si $\mathbf{q}(t)$ es solución entonces también lo es

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) := \ell\mathbf{q}(\ell^{-3/2}t)$$

donde ℓ es una constante positiva arbitraria.