MECÁNICA ANALÍTICA

Tarea 1 Semestre 2025-1 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 0. Escribir las ecuaciones de Newton de n masas puntuales que interactúan por la ley de atracción gravitacional de Newton.

Ejercicio 1. Resuelva el sistema

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}, \quad m, k, \gamma > 0$$

(el oscilador amortigüado).

(a) Haga un dibujo del plano fase.

(b) Muestre que $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$, donde $E = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

Ejercicio 2. Sea el sistema

$$i\dot{A} = i\gamma A + \delta\overline{A}, \quad \gamma, \delta > 0$$

donde $A = x + iy$, x, y reales.

Encuentre la estabilidad del origen y haga un dibujo del espacio fase. (Notar que $\overline{A} = x - iy$

Ejercicio 3. Sea el sistema

$$m\ddot{x} = -x(x-1)(x-2)$$

Haga un dibujo cualitativo del plano fase. Identifique el rango de energias en cada región de diferentes tipos de movimiento.

Ejercicio 4. Sea el sistema

$$m\ddot{q} = -\nabla V \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

conm $V = V(|q|)$ y $|q|$ la norma euclidiana

(a) Muestre que la dirección de la fuerza es hacia el origen.

(b) Muestre la conservación del *momento angular* $L = mq \times \dot{q}$ de la partícula (en dimensiones 2 y 3).

(c) En el caso tridimensional, el origen, la posición inicial $q(0)$ y la velocidad inicial $\dot{q}(0)$ de la partícula definen un plano $P_0 \subset \mathbb{R}^n$. Muestre que la trayectoria se queda en P_0 para cada tiempo t (de su existencia) y que el problema tridimensional se reduce al problema plano.

(d) Problema plano : Escribe las ecuaciones de Newton en coordenadas polares r, θ. Muestra que

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{L^2}{r^3} \quad \text{(ecuacion radial)}$$

Explica en que sentido la conservación del momento angular nos permite reducir el problema a un problema unidimensional.

(e) Estudio del potencial Newtoniano I, $V(q) = -\frac{GMm}{|q|}$ en el plano (G, M, m son constantes positivas. Haz dibujos del plano fase de la ecuación radial anterior para los casos $L = 0$ y $L \neq 0$. En el caso $L = 0$ especifica las condiciones iniciales para las cuales la partícula choca con el centro. En el Caso $L \neq 0$ muestra que la partícula nunca puede chocar con el centro.

(f) Estudio del potencial Newtoniano en el plano II. Especifica las condiciones para las cuales la partícula escapa hacia el infinito (para $L = 0$ y $L \neq 0$). Muestra que el tiempo de escape es siempre infinito.

Ejercicio 5. Sea la ecuación

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta - \varepsilon\dot{\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

que describe el péndulo matemático amortigüado. Encuentre los puntos fijos y su estabilidad. Haga un dibujo qualitativo del espacio fase.

Ejercicio 7.

(1) Mostrar que las condiciones del teorema de existencia y unicidad (Picard-Lindelöff) no se cumplen para el problema de valores iniciales

$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(0) = 0$$

(2) Considerar el problema,

$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(t_0) = 0$$

Encontrar todas las soluciones para este problema.

(3) ¿Se cumplen las condiciones de existencia y unicidad para el siguiente PVI ? ¿Porqué ?

$$\dot{x} = x^{1/5}, \quad x(0) = \frac{1}{2}$$

Calcular una solución y encontrar el intervalo maximal de existencia.