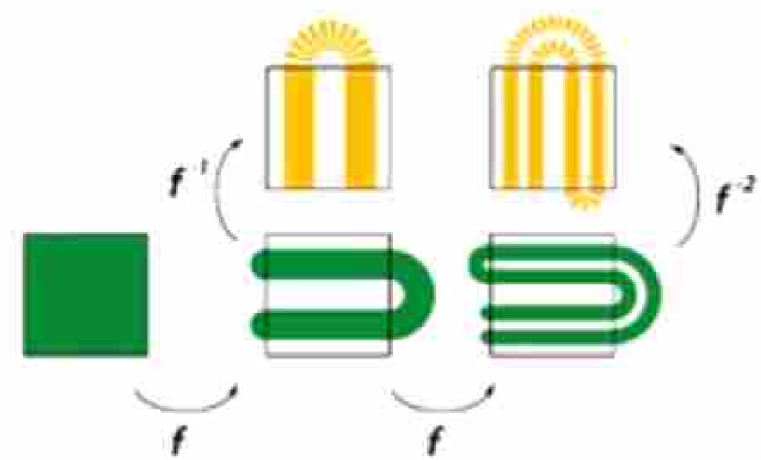
Introducción a la mecánica analítica

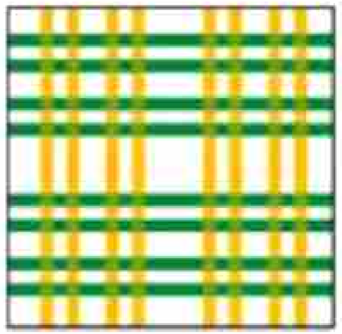
Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS

Renato Calleja, 29 de abril de 2025

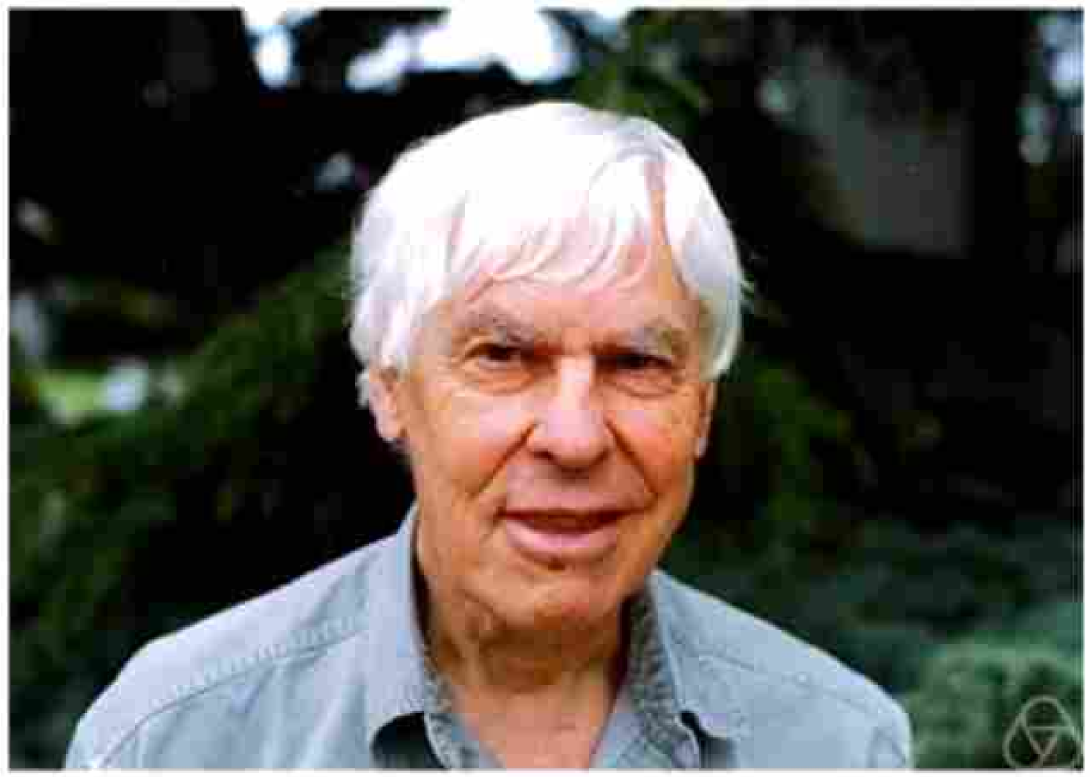
La herradura de Smale



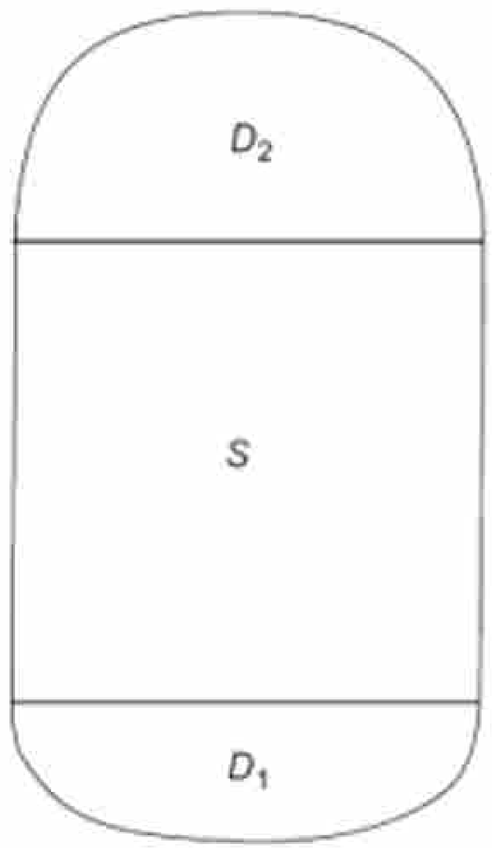
Invariant set of the horseshoe map
is a fractal, selfsimilar structure



Stephen Smale



Región con 3 componentes



S - lados de longitud 1

D_1, D_2 - 2 semicírculos

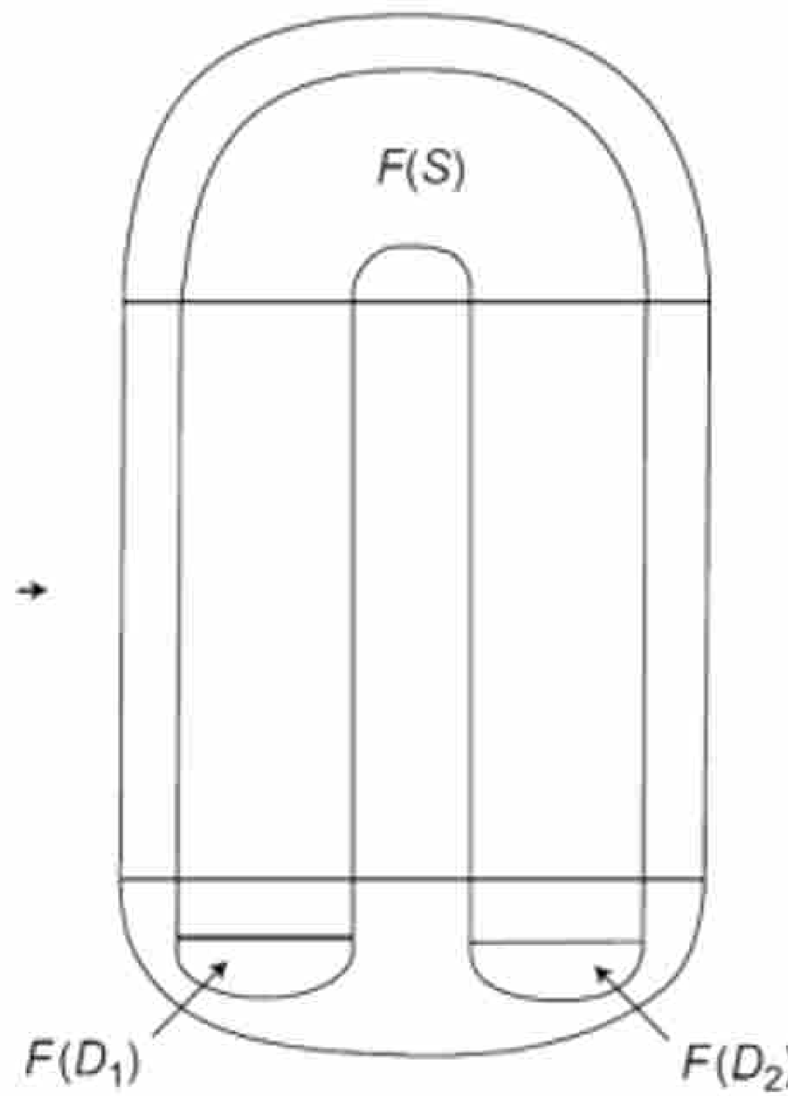
Estadio

F mapea D en sí misma...

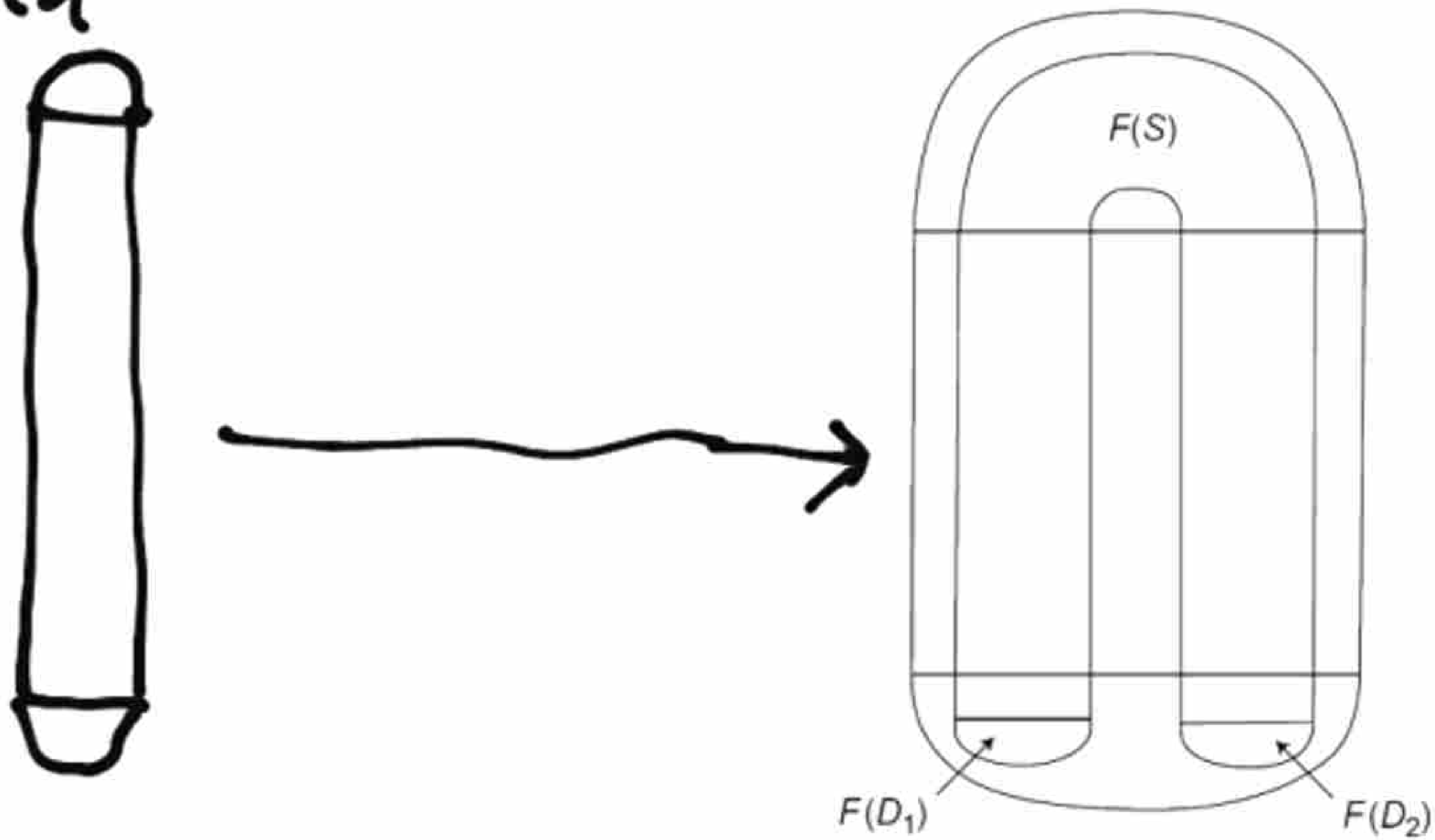
$F : D \to D$

1) F contrae S en dir horizonta
por $\delta < 1/2$ y expande
en dir vertica por $1/\delta$
[$S \to$ largo y delgado)

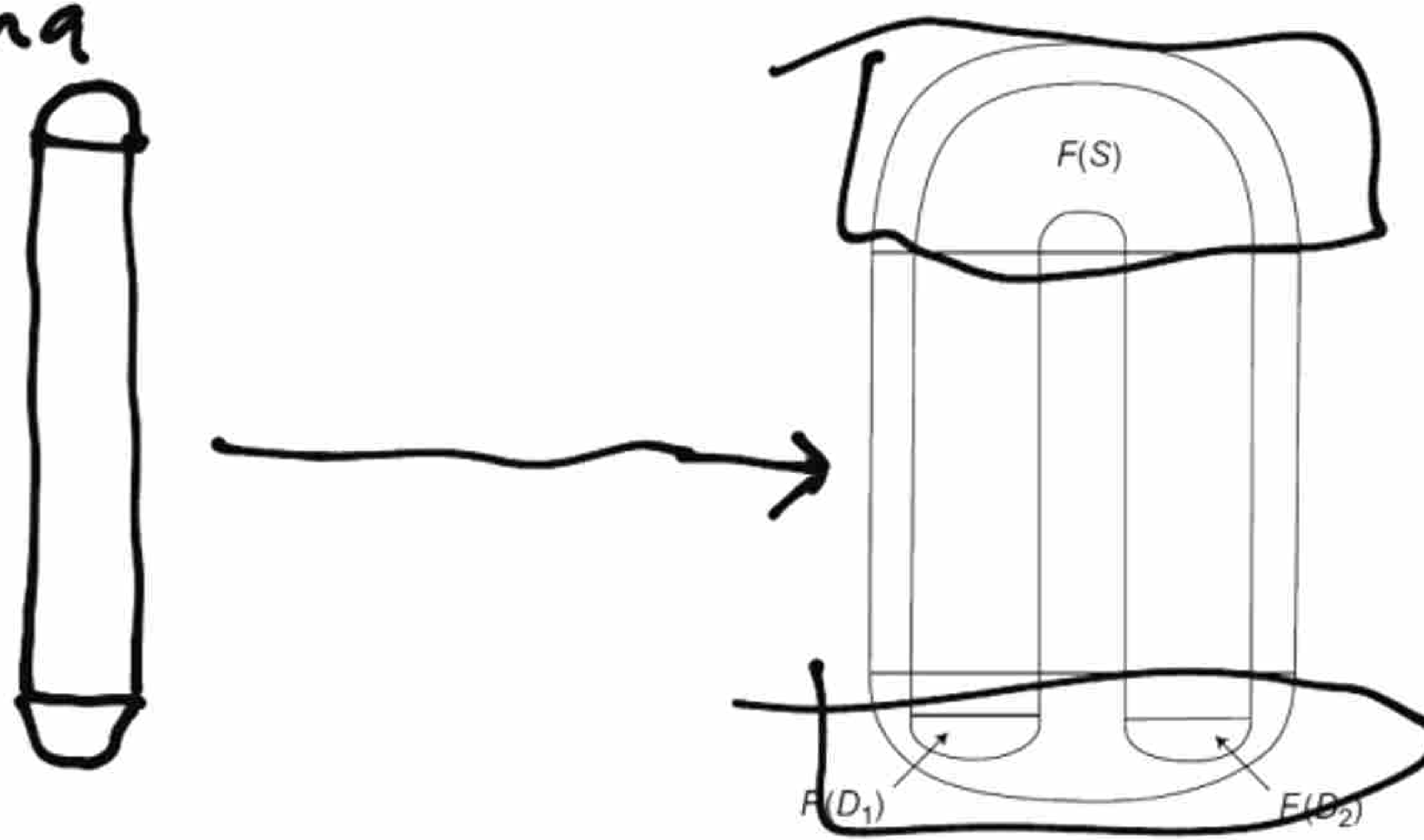
2) Luego F, mete D estirado en D original de la siguiente forma



2) Luego F , mete D estirada en D original de la siguiente forma

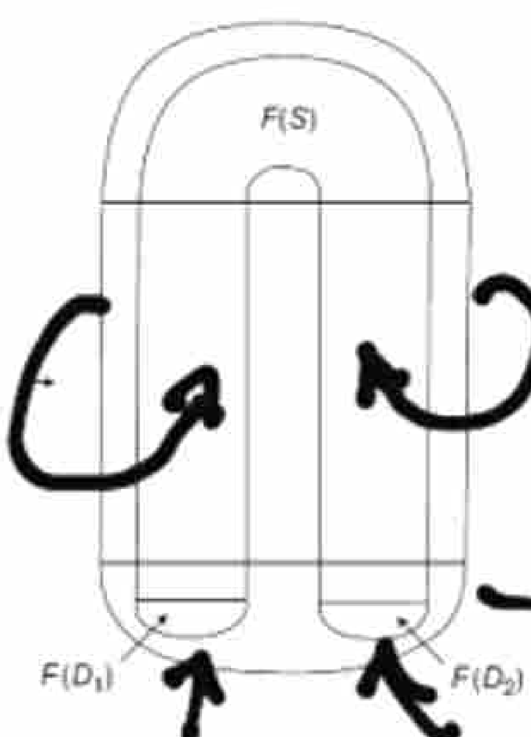


2) Luego F, mete D estirada en D original de la siguiente forma



- F mapea linealmente S sobre los 2 segmentos verticales de la herradura.
- Asumimos que D_1 y D_2 se mapean dentro de D_1

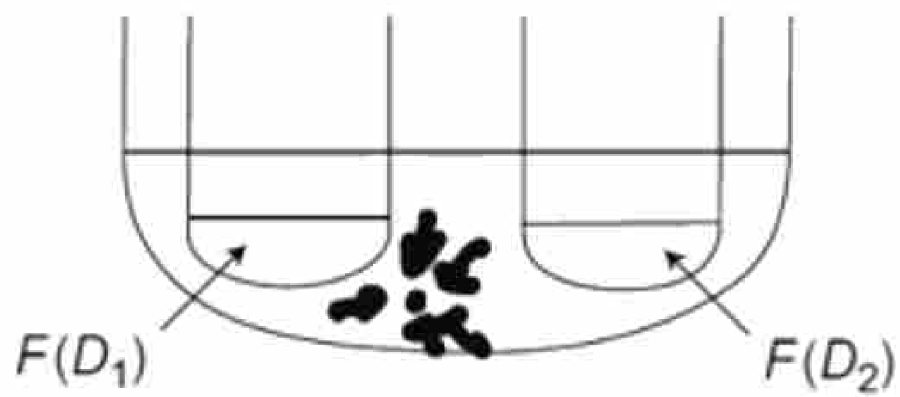
$$F(D_1), F(D_2) \subseteq D_1$$



lineal

D_1

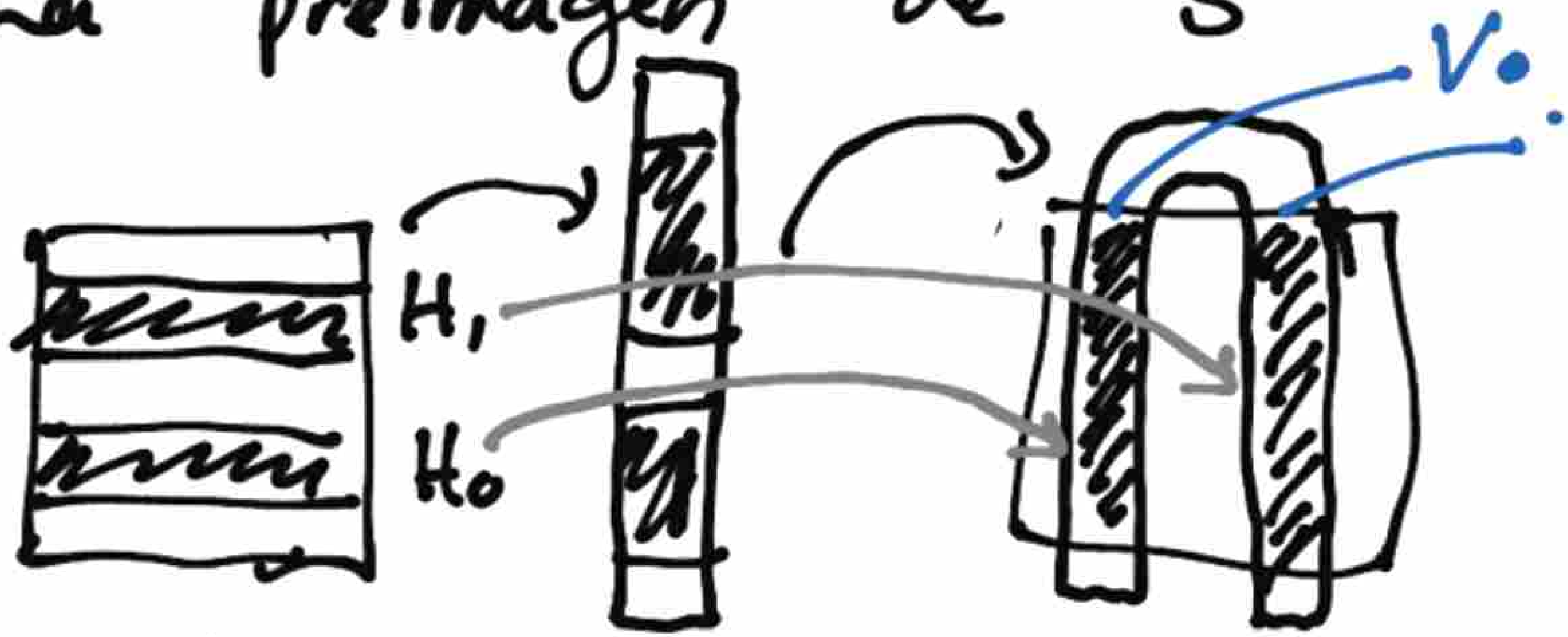
Asumimos que hay un punto fijo dentro de D_1 que atrae todas la órbitas de D_1.



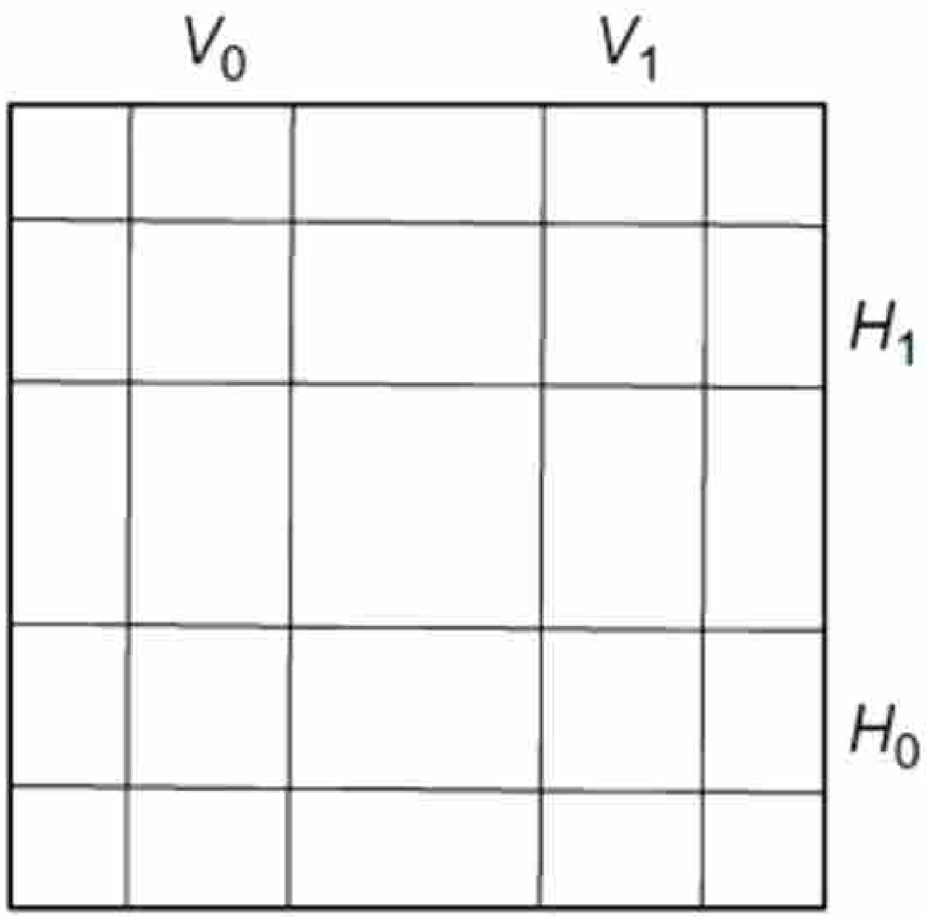
Nota $F(D) \subset D$ es uno a uno pero no es sobre,
$\Rightarrow$ la inversa no está definida de forma global.

Ahora vamos a estudiar la dinámica de F en D.

La preimagen de S



son 2 rectangulos horizontales que se mapean a 2 componentes verticales V_0 y V_1



Por linealidad de $F: H_0 \to V_0$ y $F: H_1 \to V_1$ sabemos que

F lleva líneas horizontales en H_j a líneas horizontales en V_j y verticales en H_j en verticales en V_j.

¿Cuál es el conjunto invariante de F?

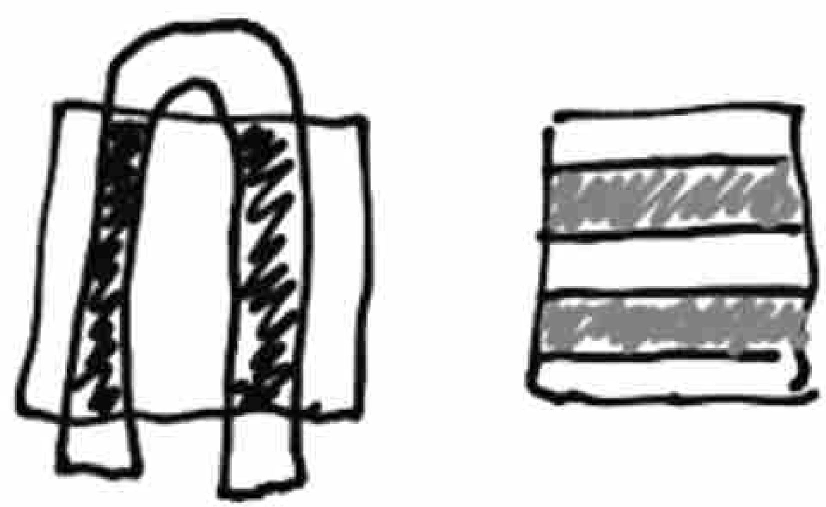
Dividimos en dinámica hacia adelante y dinámica hacia atrás.

Dinámica hacia adelante.

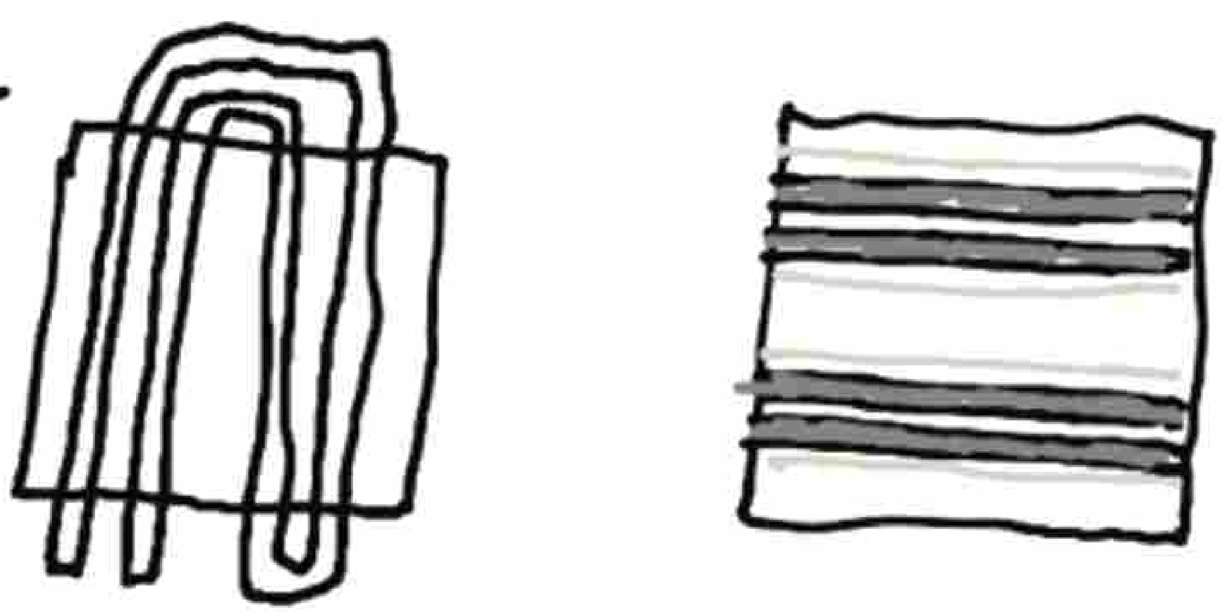
$$\Lambda_+ = \{ x \in S \mid F^n(x) \in S \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \}$$

$n=0$

$n=1$



$n=2$



Dinámica hacia adelante.

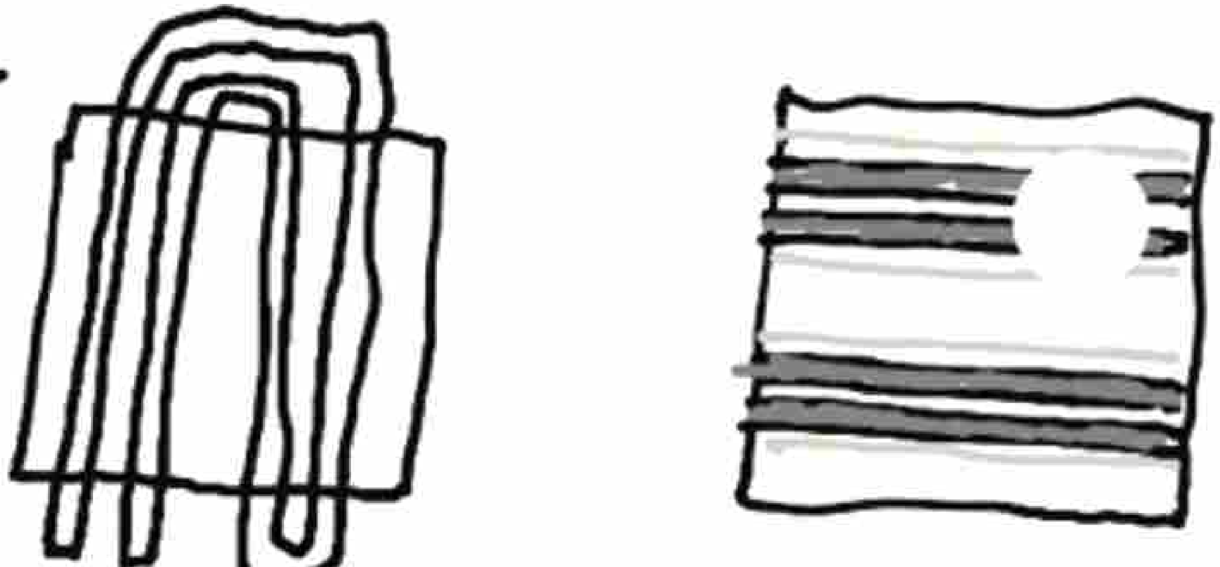
$$\Lambda_+ = \{ x \in S \mid F^n(x) \in S \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \}$$

$n=0$ $\qquad$ $n=1$

$n \to \infty$

Cantor $\times$ $[0,1]$

$n=2$



Dinámica hacia adelante.

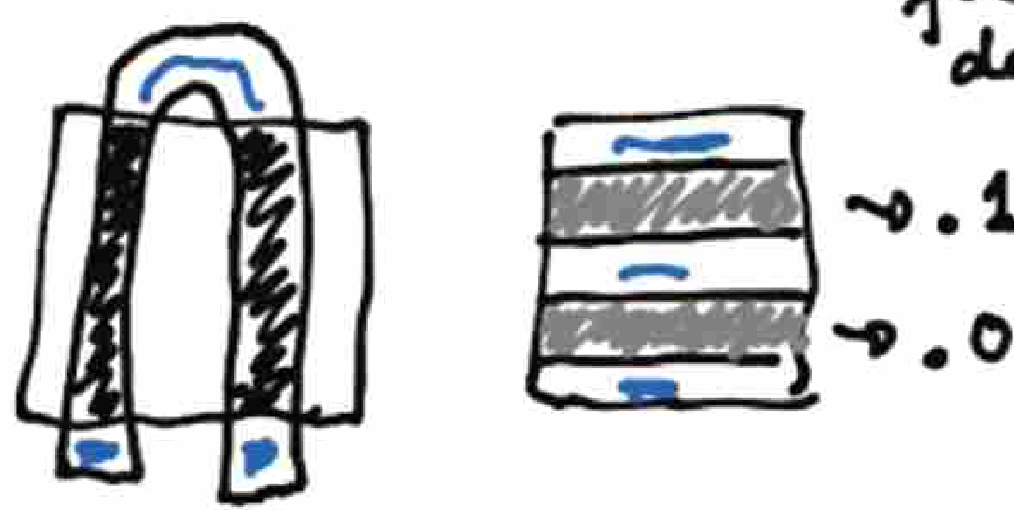
$$\Lambda_+ = \{ x \in S \,/\, F^n(x) \in S \ \text{para}\ n = 0, 1, 2, \ldots \}$$

Los puntos que quedan dentro de S después de 1 iteración

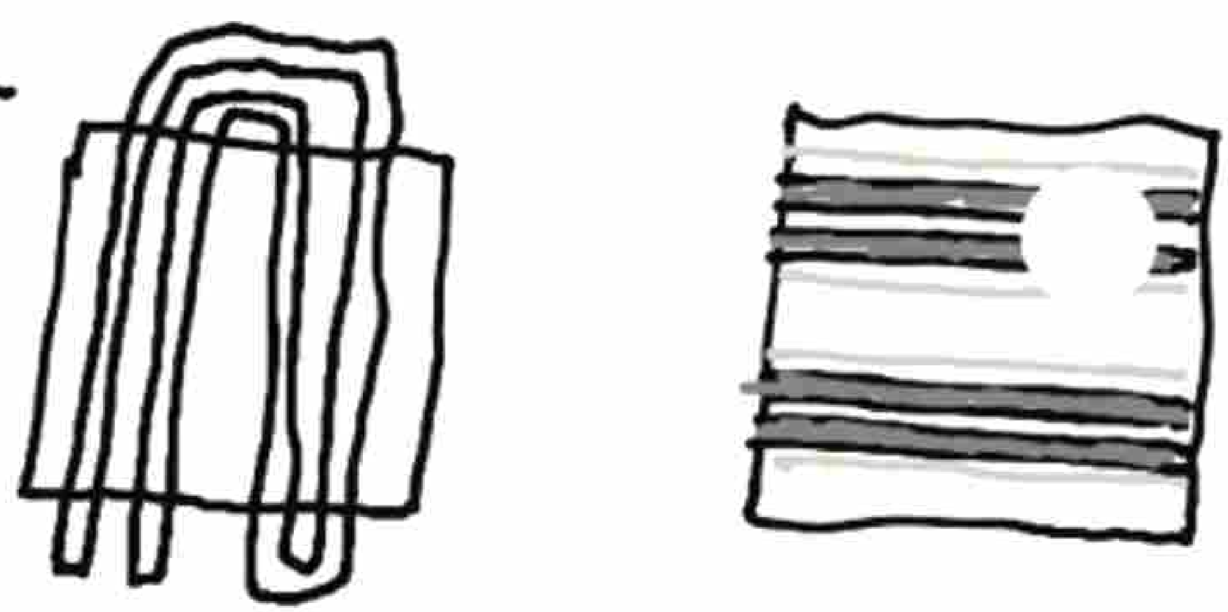
$.s_1 \quad s_1 = 0$ ó 1

$n=0$

$n=1$



$n=2$



Dinámica hacia adelante.

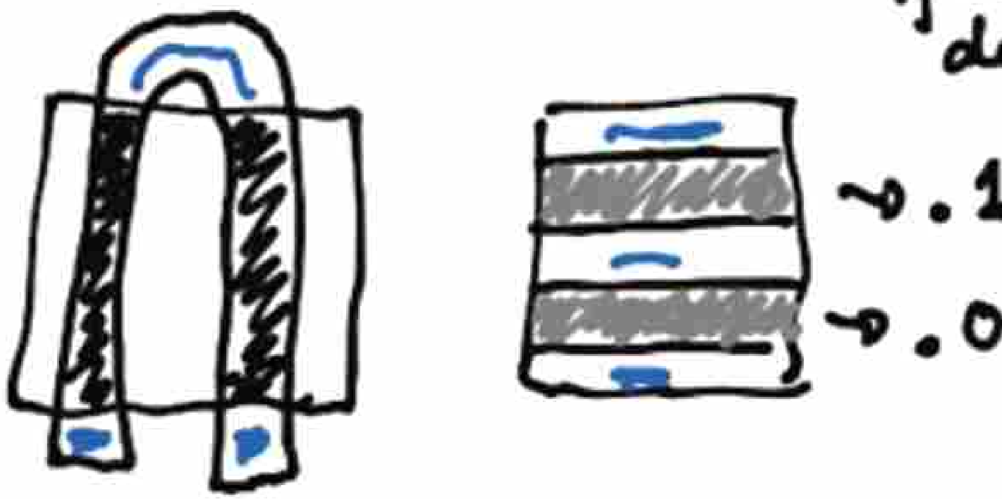
$$\Lambda_+ = \{ x \in S \mid F^n(x) \in S \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \}$$

Los puntos que quedan dentro de S después de 1 iteración

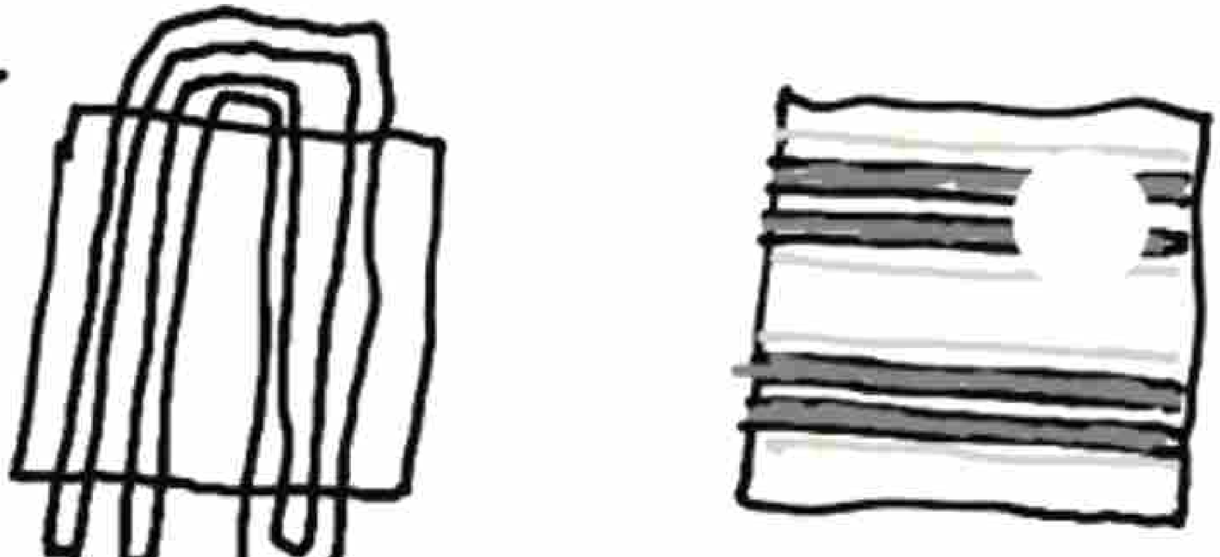
$\cdot s_1 \quad s_1 = 0$ ó 1

$n=0$

$n=1$



$n=2$



Dinámica hacia adelante.

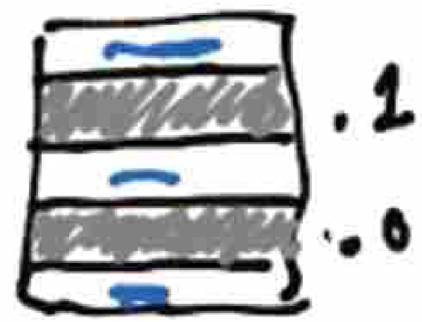
$$\Lambda_+ = \{ x \in S \,/\, F^n(x) \in S \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \}$$

Los puntos que quedan dentro de S después de 1 iteración

$.s_1 \quad s_1 = 0$ ó 1

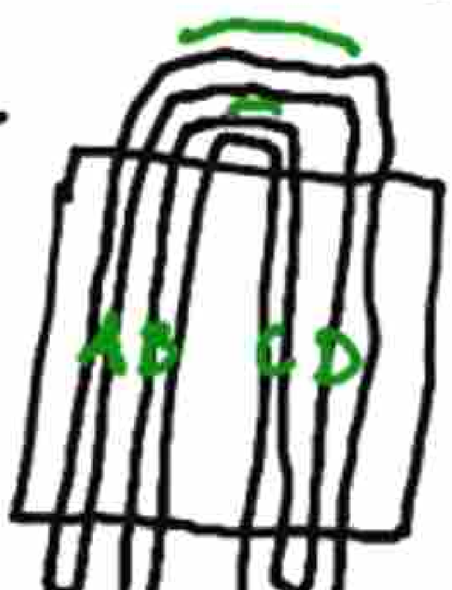
n=0

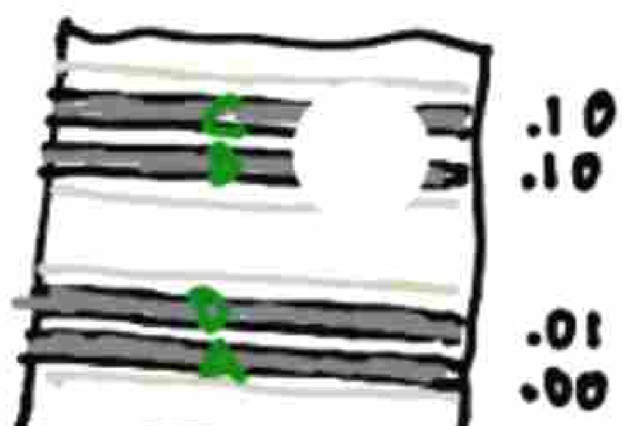
n=1



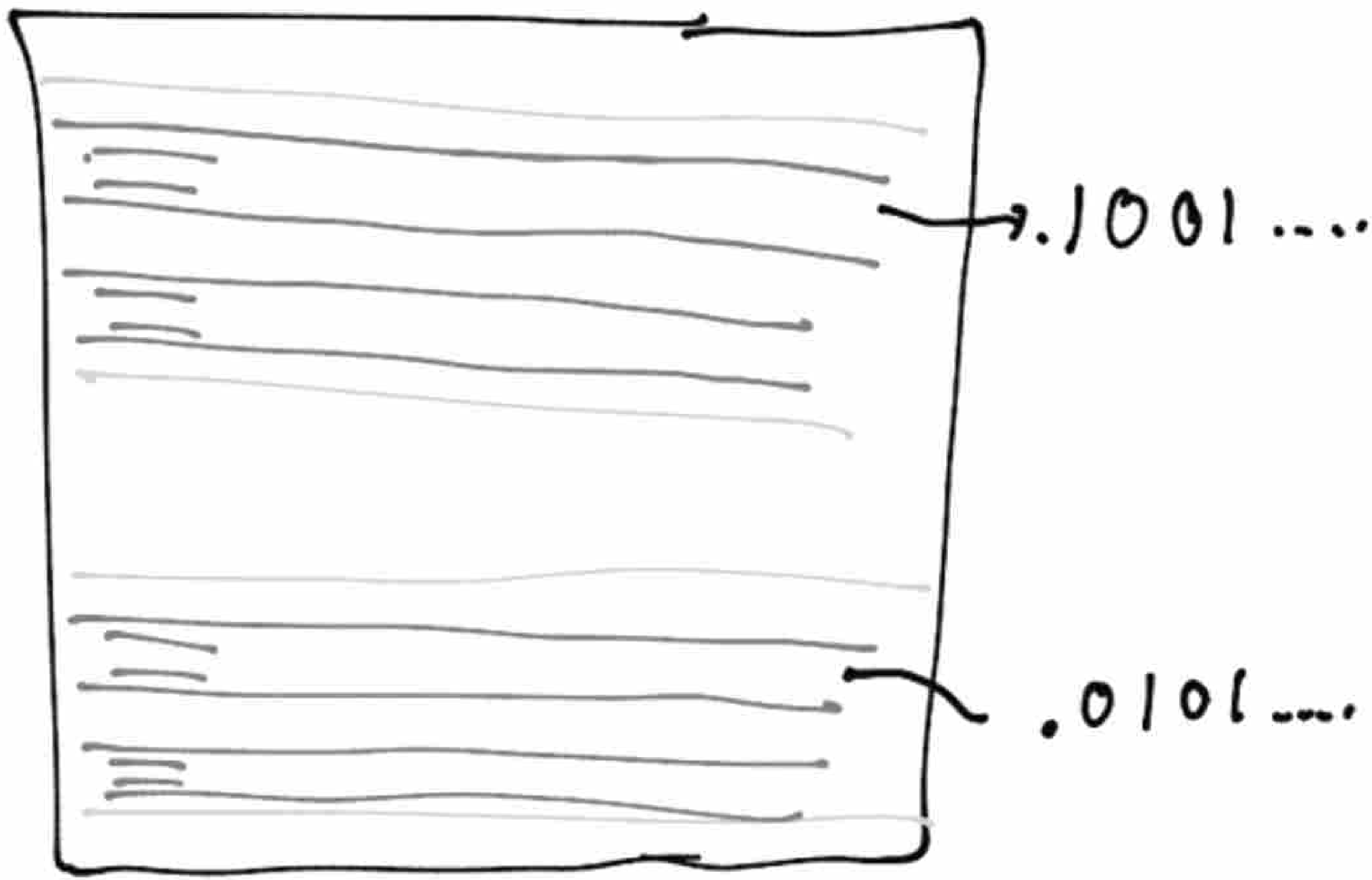
$.s_1 s_2 \quad s_i = 0$ ó 1

n=2





En el límite $n \to \infty$ Conj Cantor

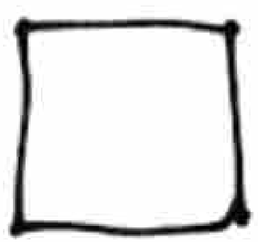


$.s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots.$ $\qquad s_j = 0$ ó 1

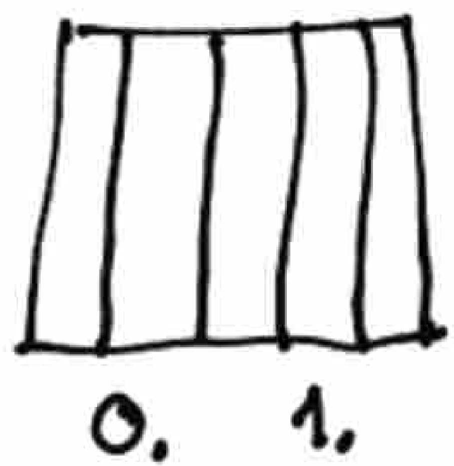
En el pasado

$$\Lambda = \{ x \in S \mid F^{-n}(x) \in S \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \}$$

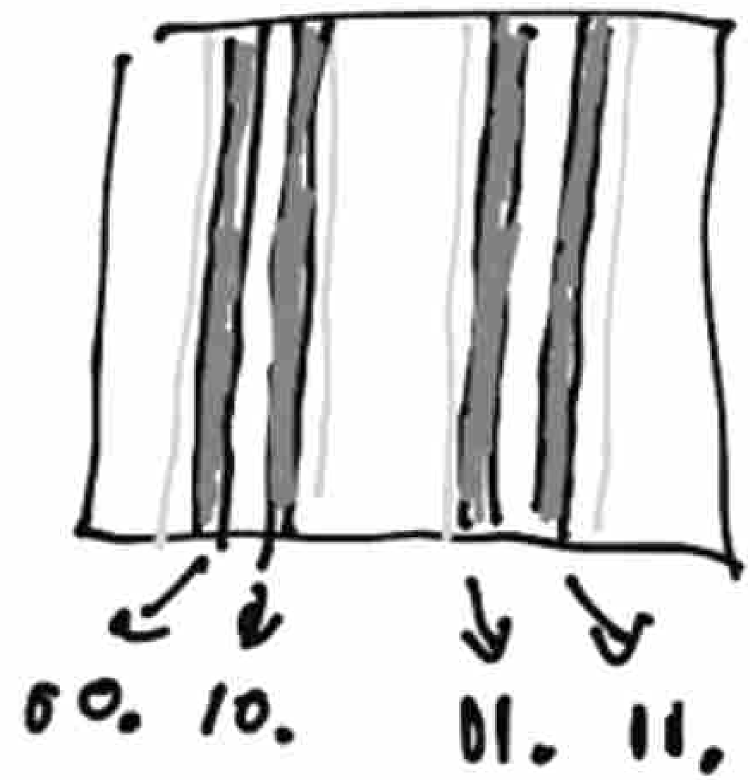
$n=0$



$n=1$

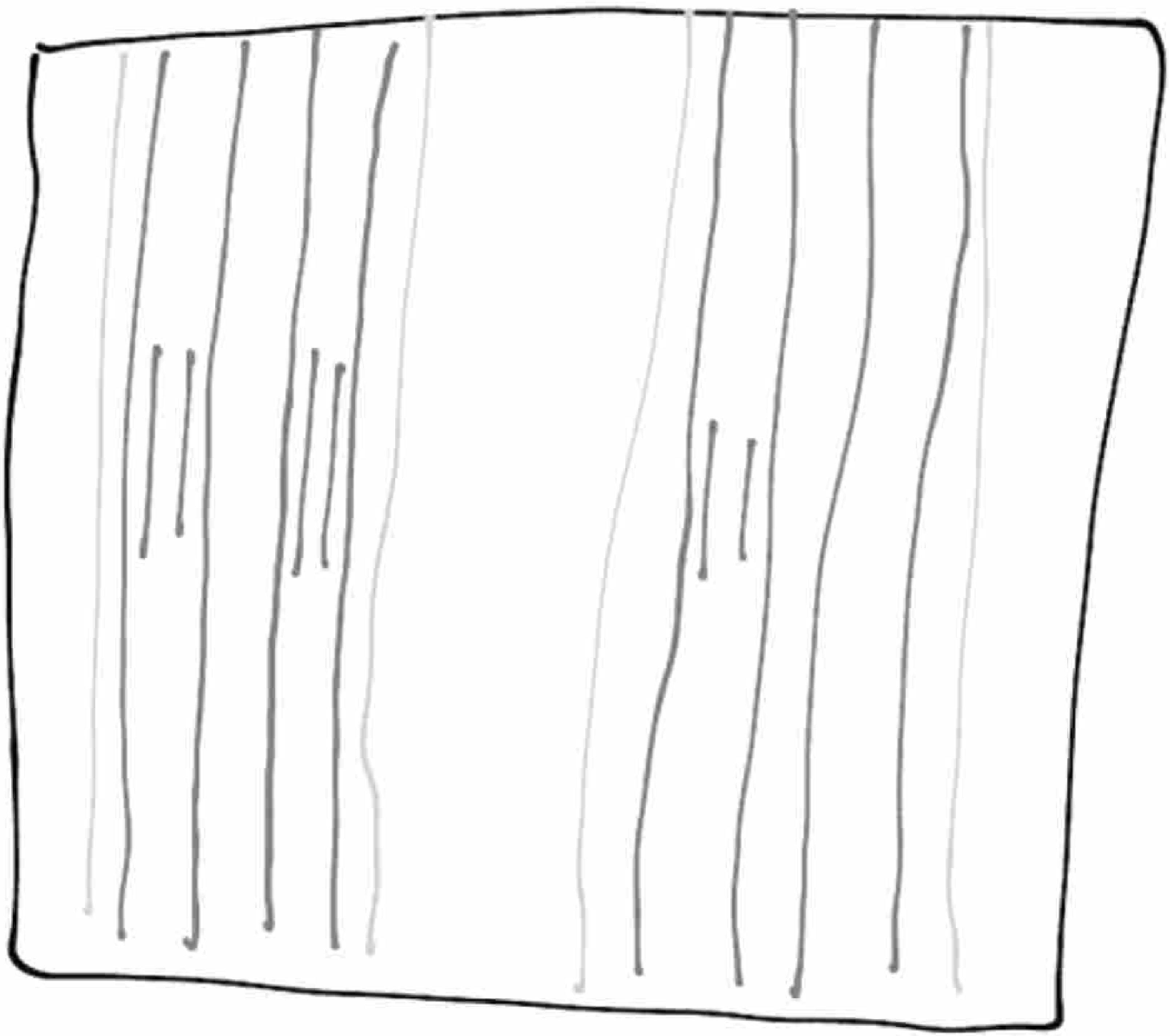


$n=2$



$n \to \infty$ Conjunto de Cantor $\times$ I^{0}

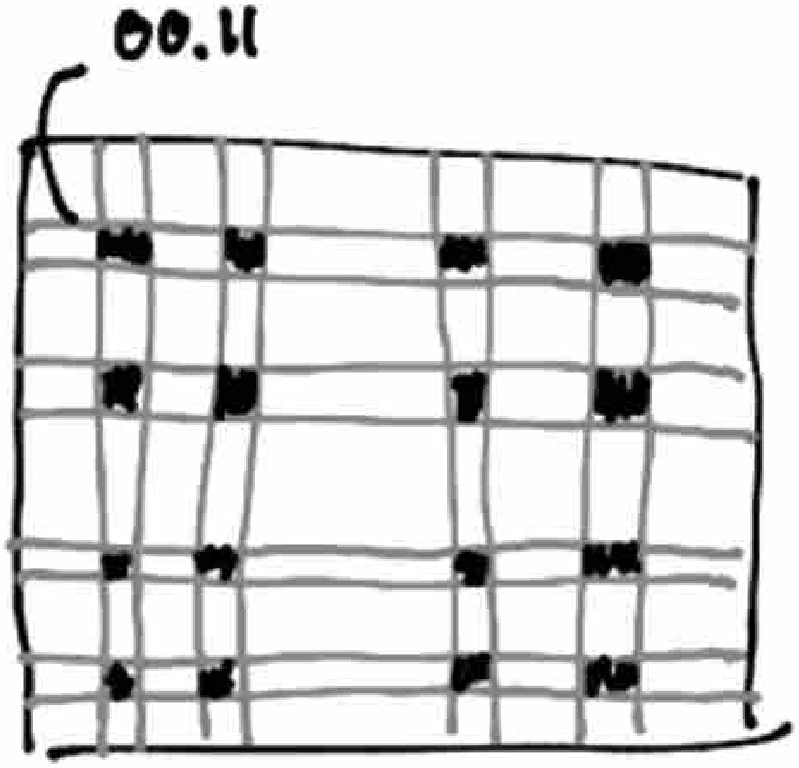
En el límite



Cantor $\times \, I_0^1$

$\ldots \; s_{-4}\, s_{-3}\, s_{-2}\, s_{-1}.$ $\qquad s_{-j} = 0$ ó 1

Los puntos van a estar etiquetados por series bi-infinitas.



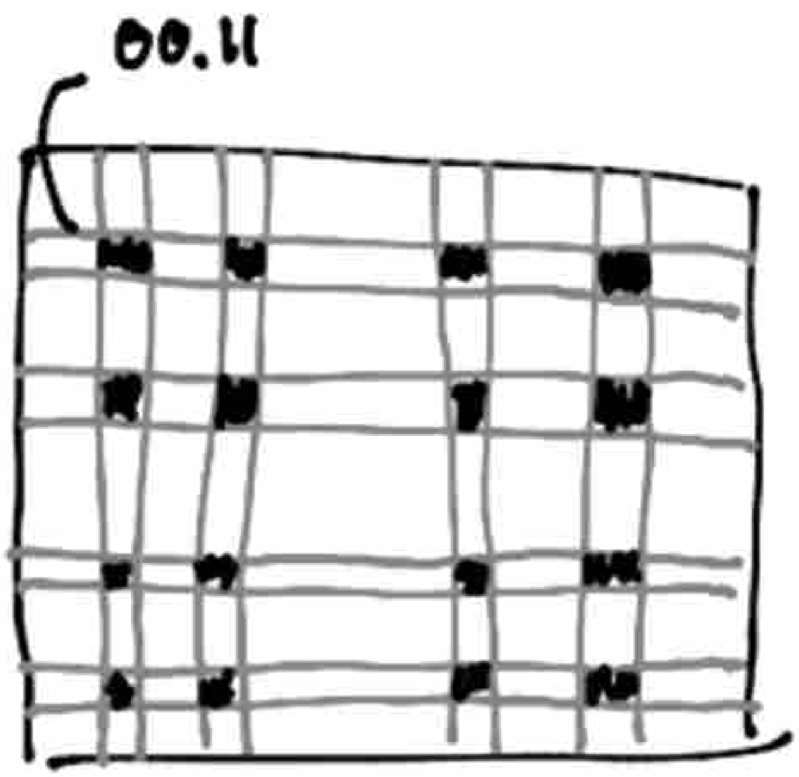
2 iteraciones

$s_{-2}s_{-1}.s_0s_1$

En el límite. $x \in \Lambda$ se pueden describir

$$\Sigma_2 = \{(s) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots)$$

Los puntos van a estar etiquetados por series bi-infinitas.



2 iteraciones

$s_{-2}s_{-1}.s_0s_1$

En el límite. $x \in \Lambda$ se pueden describir

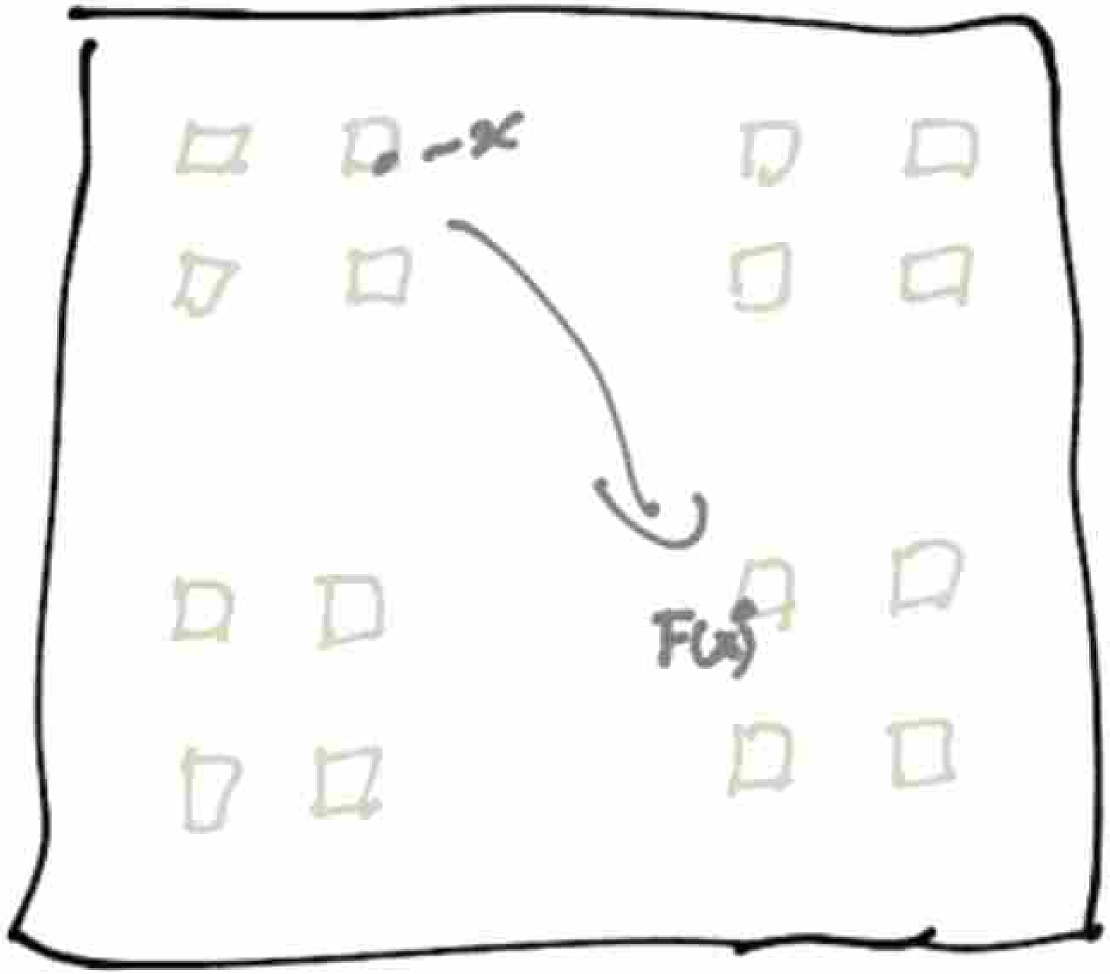
$$\Sigma_2 = \{(s) = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots) \mid s_i = 0 \text{ ó } 1$$

El mapeo de corrimiento es el modelo para la restricción de F sobre Λ

S es tal que

$$S(F(x)) = (\ldots s_{-1} s_0 . s_1 s_2 \ldots) = \sigma(S(x))$$

- S es el mapeo itinerario que da la conjugación entre F sobre Λ y σ sobre Σ_2.



$x \in \Lambda$

$F(x)$

la dinámica de $F(x)$ es equivalente

$x \rightsquigarrow \ldots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\ldots$

$\sigma(\ldots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\ldots)$

$=(\ldots s_{-2}s_{-1}s_0.s_1s_2\ldots)$

$$S(F(x)) = \sigma(S(x))$$

S – es un homeomorfismo.

Lo que se puede ver con esto.

- Cantidad infinita de órbitas periódicas con periodo arbitrario.
- Dependencia sensible a las condiciones iniciales
- Transitividad topológica.
  - Si tomamos 2 abiertos podemos encontrar un punto que va a visitar los dos.

Existencia de Caos

Capítulo 16 de Hirsch, Devaney, Smale.