Introducción a la Mecánica Analítica

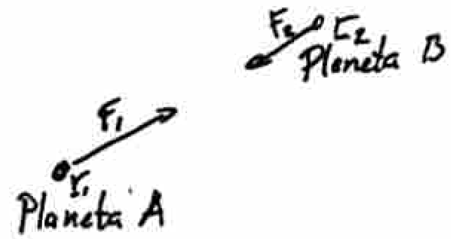
Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 8 de agosto de 2024

Ejemplo Problema de 2 cuerpos

$$\begin{pmatrix} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(r_1, r_2) \\ F_2(r_1, r_2) \end{pmatrix}$$



Planeta A, $m_1 > 0$; Planeta B, $m_2 > 0$

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$F_1(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = -G \frac{(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}{\|\underline{r}_1 - \underline{r}_2\|} \cdot \frac{m_1 m_2}{\|\underline{r}_1 - \underline{r}_2\|^2}$$

$$F_2(r_1, r_2) = -G \frac{(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)}{\|\underline{r}_2 - \underline{r}_1\|} \cdot \frac{m_2 m_1}{\|\underline{r}_2 - \underline{r}_1\|^2}$$

$$F_1(r_1, r_2) = -F_2(r_1, r_2) \implies F_1 + F_2 = 0$$

Singularidad $\{z \in \mathbb{R}^6 : z = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3),\ \underline{r}_1 = \underline{r}_2\}$ Plano de dim $=3$ en $\mathbb{R}^6$.

Se puede generalizar a $n \in \mathbb{N}$ cuerpos.

Newton 1884 $\to$ Las elipses satisfacen (Kepler 1600)

J. Bernoulli 1750 $\to$ Solución completa.

Ejemplo

$$F(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) = -\frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|} \left[\frac{(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t)}{\|\underline{r}\|^2} \right] + \dot{\underline{r}}$$

$$m \ddot{\underline{r}} = F(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$$

Plan de "Mecánica racional"

(i) Escribir las ecuaciones de Newton.
(experimentos, cuestiones matemáticas, principios físicos, etc.)

(ii) Resolver las ecuaciones de Newton
$m \ddot{\underline{r}} = F \to$ Teoría de EDO

(iii) Comparar las soluciones con el los fenómenos físicos.

Algunas notas sobre la teoría de EDO.

Tenemos ecuaciones del tipo

$$\ddot{z} = \tilde{F}(z, \dot{z}, t)$$

Sistemas de segundo orden

$z \in \mathbb{R}^n$

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$$

$$\dot{z} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto (\dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t), \dots, \dot{z}_n(t))$$

Ejemplo 2 planetas

$z = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$

z posiciones

$\dot{z}$ velocidades

$$\tilde{F}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} F_1(z) \\ \frac{1}{m_2} F_2(z) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{z} = \tilde{F}(z)$$

$$\dot{z} = w$$
$$\dot{w} = \tilde{F}(z)$$

Sistema de dim 12.

En general, para sistemas no autónomos

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= w \\ \dot{w} &= \tilde{F}(z, w, t) \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ sistema de dimensión } 2n+1$$

Existencia

Teorema (Picard-Lindelöff)

Sea $\dot{y} = h(y,t)$, $y \in \mathbb{R}^{2n}$ donde

h es loc. Lipschitz en y y cont. en t.

$y \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ abierto que contiene a y_0,

entonces
$$\begin{cases} \dot{y} = h(y,t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \dots (PVI)$$

tiene una única solución clase C^1.
(1 deriv continua.)

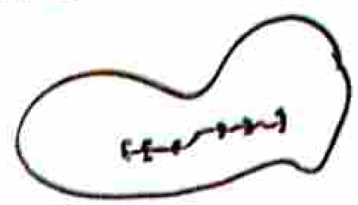
Sobre la dem

$$(PVI) \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} h(y,s)\,ds$$

Sucesión de funciones $\{y_n\}_{n\in 0}^{\infty}$ $\quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} h(y_n(s),s)\,ds$$

- Si h es C^r en $y \Rightarrow y(t) \in C^{r+1}$



Teorema de extensión de soluciones

Teo
Bajo las hipótesis de P-L, las soluciones son únicas para todos los tiempos para los cuales están definidas.

En la dem se usa la desigualdad de Grönwa

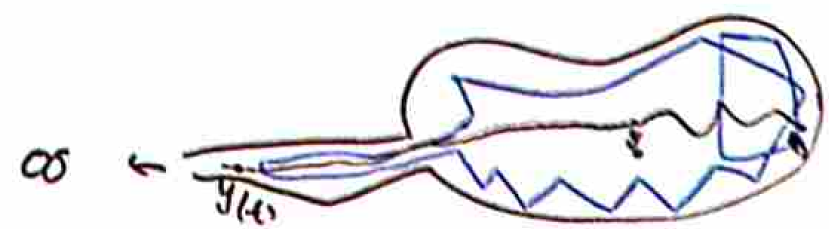
Teo (Lema de escape)

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $J \subseteq \mathbb{R}$, $(\alpha,\beta) \subseteq J$, $y_0 \in \mathcal{U}$

si $h: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, es C^1, y el intervalo maximal de existencia es $\alpha < t < \beta < \infty$

$\Rightarrow \forall K \subseteq \mathcal{U}$ compacto existe una $t \in (\alpha,\beta)$ tal que $y(t) \notin K$.

La frontera de $\mathcal{U}$ no pertenece a ningún compacto



Existencia

Teorema (Picard-Lindelöff)

Sea $\dot{y} = h(y,t)$, $y \in \mathbb{R}^{2n}$ donde
h es loc. Lipschitz en y y cont. en t.
$y \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ abierto que contiene a y_0,

entonces
$$\begin{cases} \dot{y} = h(y,t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \ldots (PVI)$$

tiene una única solución clase C^1.
(C^1 deriv continua.)

Sobre la dem

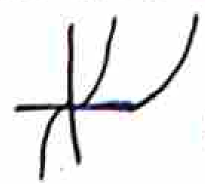
$$(PVI) \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} h(y,s)\,ds$$

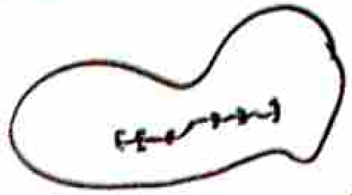
Sucesión de funciones $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} h(y_n(s),s)\,ds$$

- Si h es C^r en y $\Rightarrow y(t) \in C^{r+1}$

$h(x) = x^{2/3}$





Teorema de extensión de soluciones

Teo
Bajo las hipótesis de P-L, las soluciones son únicas para todos los tiempos para los cuales están definidas.

En la dem se usa la desigualdad de Grönwall

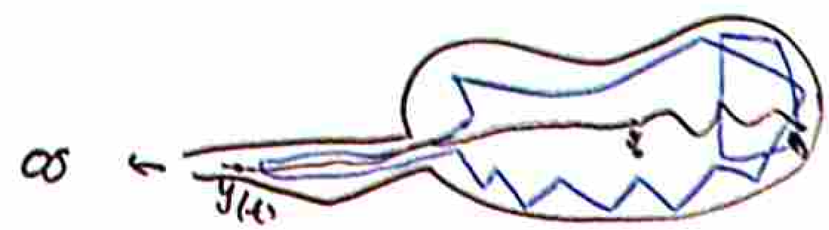
Teo (Lema de escape)

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $J \subseteq \mathbb{R}$, $(\alpha,\beta) \subseteq J$, $y_0 \in \mathcal{U}$

si $h: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, es C^1, y el intervalo maximal de existencia es $\alpha < t < \beta < \infty$

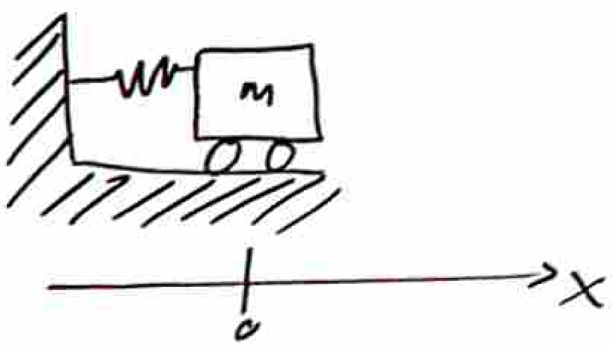
$\Rightarrow \forall K \subseteq \mathcal{U}$ compacto existe una $t \in (\alpha,\beta)$ tal que $y(t) \notin K$.

La frontera de $\mathcal{U}$ no pertenece a ningún compacto



Mecánica Newtoniana y la Energía

Ley de Hooke.



$x \in \mathbb{R}$

$F(x) = -kx$ Fuerza de Hooke.

$m\ddot{x} = -kx$ oscilador armónico.

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$

$\dot{x} = v$

$\dot{v} = -\frac{k}{m}x$, $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -k/m & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x(0)\\ v(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\ v_0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}$, $\mathbb{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -k/m & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = e^{\mathbb{A}t}\begin{pmatrix}x_0\\ v_0\end{pmatrix} = \mathbb{V}\begin{pmatrix}e^{i\sqrt{k/m}\,t} & 0\\ 0 & e^{-i\sqrt{k/m}\,t}\end{pmatrix}\mathbb{V}^{-1}$

Valores propios

$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$, $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -k/m & -\lambda\end{vmatrix} = 0$

$\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$

$\begin{vmatrix}i\sqrt{k/m} & 1\\ -k/m & i\sqrt{k/m}\end{vmatrix} = -\left(\sqrt{k/m}\right)^2 + k/m$

Vect. propios $\mathbb{V}$

$\Lambda = \begin{pmatrix}i\sqrt{k/m} & 0\\ 0 & -i\sqrt{k/m}\end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{A}\mathbb{V} = \Lambda\mathbb{V}$

$\Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{V}\Lambda\mathbb{V}^{-1}$

$e^{\mathbb{A}t} = e^{\mathbb{V}\Lambda\mathbb{V}^{-1}t} = \mathbb{V}e^{\Lambda t}\mathbb{V}^{-1}$

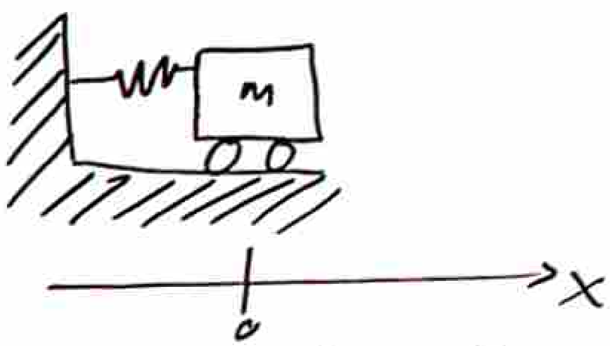
$x(t) = \tilde{c}_1 e^{i\sqrt{k/m}\,t} + \tilde{c}_2 e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$

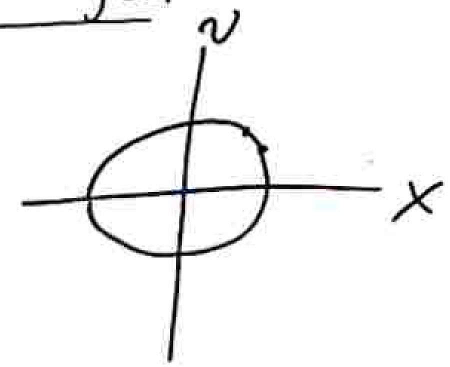
$= C_1\cos(\sqrt{k/m}\,t) + C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{k/m}\,t)$

$v(t) = -C_1\sqrt{k/m}\,\mathrm{sen}(\sqrt{k/m}\,t) + C_2\sqrt{k/m}\cos(\sqrt{k/m}\,t)$

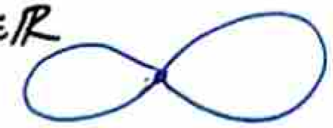
Mecánica Newtoniana y la Energía

Ley de Hooke.





$X \in \mathbb{R}$

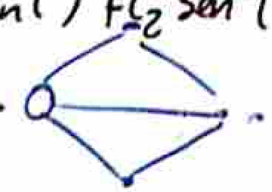


$$\frac{m}{2}v(t)^2 + \frac{k}{2}x(t)^2$$

$$= \frac{m}{2}\left(C_1^2 \frac{k}{m}\,\text{sen}^2(\;) - \cancel{2C_1C_2\frac{k}{m}\text{sen}(\;)\cos(\;)} + C_2^2\frac{k}{m}\cos^2(\;)\right)$$

$$+ \frac{k}{2}\left(C_1^2\cos^2(\;) + \cancel{2C_1C_2\cos(\;)\,\text{sen}(\;)} + C_2^2\,\text{sen}^2(\;)\right)$$

$$= \frac{k}{2}\left(C_1^2 + C_2^2\right) = \text{constante } \forall t$$



Cantidad conservada $\longrightarrow$ Energía del oscilador armónico.

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot v\end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -k/m & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = e^{\mathbb{A}t}\begin{pmatrix}x_0\\ v_0\end{pmatrix} = \mathbb{V}\begin{pmatrix}e^{i\sqrt{k/m}\,t} & 0\\ 0 & e^{-i\sqrt{k/m}\,t}\end{pmatrix}\mathbb{V}^{-1}\big($$

Valores propios

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0, \quad \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -k/m & -\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$$

$$\begin{vmatrix}i\sqrt{k/m} & 1\\ -k/m & i\sqrt{k/m}\end{vmatrix} = -\left(\sqrt{k/m}\right)^2 + k/m$$

Vect. propios $\mathbb{V}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix}i\sqrt{k/m} & 0\\ 0 & -i\sqrt{k/m}\end{pmatrix} \qquad \mathbb{A}\mathbb{V} = \Lambda\mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{V}\Lambda\mathbb{V}^{-1}$$

$$e^{\mathbb{A}t} = e^{\mathbb{V}\Lambda\mathbb{V}^{-1}t} = \mathbb{V}e^{\Lambda t}\mathbb{V}^{-1}$$

$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\sqrt{k/m}\,t} + \tilde{C}_2 e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$$

$$= C_1\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + C_2\,\text{sen}\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$

$$v(t) = -C_1\sqrt{k/m}\,\text{sen}\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + C_2\sqrt{k/m}\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$