Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

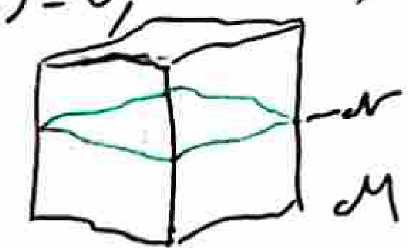
Renato Calleja, 8 de abril de 2025

Subvariedades de una variedad simpléctica

La clase pasada

$L_x \subset T_x\mathcal{M}$ subespacio lineal

$L_x^{\perp} = \{ X \in T_x\mathcal{M} \mid \Omega_x(X,Y) = 0, \ \forall Y \in L_x \}$



$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$

$\mathcal{N}$ subvariedad se llama,

isotropica si $T_x\mathcal{N} \subseteq T_x\mathcal{N}^{\perp}$

co-isotrópica si $T_x\mathcal{N} \supseteq T_x\mathcal{N}^{\perp}$

Lagrangiana si $T_x\mathcal{N} = T_x\mathcal{N}^{\perp}$

Simpléctica si $T_x\mathcal{N} \cap T_x\mathcal{N}^{\perp} = \{0\}$

$\forall x \in \mathcal{N}$.

Sea $j: \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ el mapeo inclusión.

$(\mathcal{M}, \Omega)$

$j^*\Omega$ es la vestricción de Ω a $T\mathcal{N}$

$\llcorner$ es una 2-forma $\mathcal{N}$.

Notamos que $j^*\Omega$ es cerrada.

$d(j^*\Omega) = j^* \cancel{d\Omega}^{0} = 0$

Subvariedades de una variedad simpléctica

Variedades isotrópicas

$T_x N \subseteq T_x N^{\perp}$ se requiere que $\Omega(X,Y)=0$

$\forall X, Y \subset TN$

Por lo tanto, N es isotrópico si $j^*\Omega = 0$

Variedades Lagrangianas.

Es una variedad isotrópica maximal.

N tiene la mitad de la dimensión.

Variedades simplécticas

Simpléctica si $T_x N \cap T_x N^{\perp} = \{0\}$

→ esto es equivalente a la condición de que $T_x N \subset T_x M$ siendo un subespacio simpléctico.

$j^*\Omega$ 2-forma no-degenerada de N.

Sea $j: N \to M$ el mapeo inclusión.

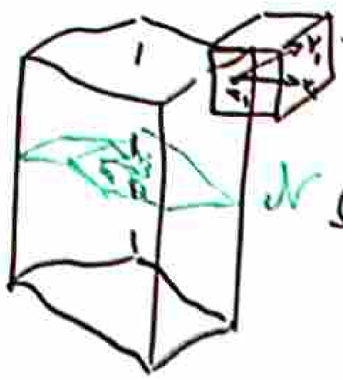
(M, Ω)

$j^*\Omega$ es la restricción de Ω a TN

└ es una 2-forma N.

Notamos que $j^*\Omega$ es cerrada.

$$d(j^*\Omega) = j^* \cancel{d\Omega}^{\,0} = 0$$



Sistemas Hamiltonianos Integrables

En general los sistemas integrables son sistemas con suficientes integrales de movimiento de manera que la solución de la ecuación sea trivial.

- Para un sistema de $\mathbb{R}^m$ se requieren $m-1$ integrales de movimiento.
- para un sistema Hamiltoniano en $\mathbb{R}^{2n}$ se requieren n integrales.

Integrales

Sea $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$ estructura simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$, con corchete de Poisson

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial y_j} \right)$$

para cualquier función $H \in C^2(D)$ $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ dominio

$$X_H = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

sabemos que $X_H F = \{H, F\}$

Una función $F \in C^1(D)$ se llama integral del campo X_H si $X_H F = 0$ pero $dF \neq 0$ en D.

↳ derivada direccional de F en dir X_H.

Sistemas Hamiltonianos Integrables

→ F es constante a lo largo de X_H.

Def Un campo Hamiltoniano X_H se llama integrable en D si posee n-integrales de movimiento $F_j \in \mathcal{C}^2(D)$ con las props,

(i) $dF_1, dF_2, \ldots, dF_n$ son lin. indep en D

(ii) $\{H, F_j\} = 0$ en D.

(iii) $\{F_j, F_k\} = 0$ en D

Sistemas Hamiltonianos Integrables

→ F es constante a lo largo de X_H.

Def Un campo Hamiltoniano X_H se llama integrable en $\mathcal{M}$ si posee n-integrales de movimiento $F_j \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M})$ con las props,

(i) $dF_1, dF_2, \ldots, dF_n$ son lin. indep en $\mathcal{M}$

(ii) $\{H, F_j\}=0$ en $\mathcal{M}$.

(iii) $\{F_j, F_k\}=0$ en $\mathcal{M}$.

$X_{F_j} F_k = 0$

En variedades simplécticas $(\mathcal{M}, \Omega)$ X_H está definido por $\Omega(X_H, \cdot) = -dH$ para $H \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M})$ y $\{F, G\} = \Omega(X_F, X_G)$.

X_H es integrable en $(\mathcal{M}, \Omega)$ siempre que (i), (ii) y (iii) se satisfacen con D reemplazado por $\mathcal{M}$.