

Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

**Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS**

Renato Calleja, 7 de mayo de 2025

Series de Lindstedt

$$l_\varepsilon(\theta) = \varepsilon \varepsilon (\theta + \omega) - 2l_\varepsilon(\theta) + l_\varepsilon(\theta - \omega) = \varepsilon V'(\theta + l_\varepsilon(\theta)) = \sum_{n=1}^{\infty} S^n(\theta) \varepsilon^n$$

de la libro A tutorial on KAM theory, 2001.

a orden ε^n

$$L_\omega l^n(\theta) = S^n(\theta).$$

Necesitamos que $\int_0^1 S^n(\theta) d\theta = 0$

$$\text{Denotamos } l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} l_\varepsilon^i(\theta) \varepsilon^i$$

$$L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) + \varepsilon V'(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) = S^n(\theta) \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1})$$

Consideramos la expresión

$$\frac{d}{d\theta} [\theta + \varepsilon + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta + \varepsilon)] \Big|_{\theta=0} = [1 + (l_\varepsilon^{[<n]})'(\theta)]$$

Multiplicamos la expresión por $[1 + (l_\varepsilon^{[<n]})'(\theta)]$ e integramos

$$0 = \int_0^1 L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) d\theta + \int_0^1 L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) \cdot l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta$$

$$+ \varepsilon \int_0^1 [1 + l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)] V'(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) d\theta$$

$$= \varepsilon^n \int_0^1 S^n(\theta) d\theta - \varepsilon^n \int_0^1 S^n(\theta) l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta + O(\varepsilon^{n+1})$$

$$(\cdot) \int_0^1 [1 + l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)] V'(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) d\theta = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} V(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)) d\theta$$

$$= V(1 + l_\varepsilon^{[<n]}(1)) - V(0 + l_\varepsilon^{[<n]}(0)) = 0$$

$$(\cdot) \int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]}(\theta + \omega) l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta - 2 \int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta + \int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]}(\theta - \omega) l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) d\theta = 0$$

$$= - \int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) d\theta - \int_0^1 \frac{d}{d\theta} (l_\varepsilon^{[<n]}(\theta))^2 d\theta + \int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta + \omega) d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{a orden } \varepsilon^n \int_0^1 S^n(\theta) d\theta = 0$$

Podemos resolver $L_\omega l^n(\theta) = S^n(\theta)$ a todas los órdenes.

Series de Lindstedt

$$l_\varepsilon(\theta) = l_\varepsilon(\theta + \omega) - 2l_\varepsilon(\theta) + l_\varepsilon(\theta - \omega) = -\varepsilon V'(\theta + l_\varepsilon(\theta)) = \sum_{n=1}^{\infty} S^n(\theta) \varepsilon^n$$

detallare A tutorial on KAM theory, 2001.

a orden ε^n

$$L_\omega l^n(\theta) = S^n(\theta)$$

Sabemos que
$$l_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} l^n(\theta) \varepsilon^n$$

Si hubiéramos demostrado que $\exists \varepsilon^* > 0$ tal que

$$l_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} l^n(\theta) \varepsilon^n, \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon^*$$

entonces tendríamos KAM para el mapeo estándar.

Tenemos que las series existen a todos los órdenes pero falta ver que la serie resultante converge a una función analítica.

Podemos calcular la serie
órdenes "altos" numéricamente.

Después usamos la suma parcial para
explorar propiedades de la función.

R. de la Llave, C. Falcolini 1992.

A. Bustamante, R.C. 2019, 2021.

Funciones cuasi-periódicas

Def

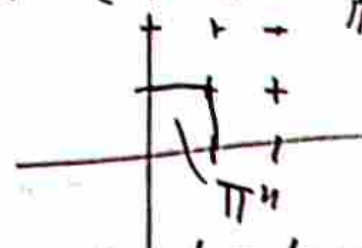
Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función.
Diremos que f es cuasi-periódica cuando existen constantes reales racionalmente independientes $\omega_1, \dots, \omega_n$ ($\sum_{i=1}^n k_i \omega_i$ no es entera para cualquier colección de enteros $k_1, \dots, k_n$)

y una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de periodo uno en cada variable tal que

$$f(t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Notas

- A las frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_n$ se les llama las frecuencias básicas de f .
- A la función F se le llama el levantamiento de f .
- A $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ se le llama el vector frecuencia.
- Como $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica en cada entrada, en realidad es una función del $\mathbb{T}^n$ en $\mathbb{R}$ ($F: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$)



- Sin condiciones ni el vector de frecuencias ni el levantamiento están definidos de manera única.

Funciones cuasi-periódicas

Def

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función.
Diremos que f es cuasi-periódica cuando existen constantes reales racionalmente independientes $w_1, \dots, w_n$ ($\sum_{i=1}^n k_i w_i$ no es entera para cualquier colección de enteros $k_1, \dots, k_n$)

y una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período uno en cada variable tal que

$$f(t) = F(w_1 t, w_2 t, \dots, w_n t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

$$f(t) = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi\sqrt{2}t)$$

Vec. de frecuencias $w = (1, \sqrt{2})$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

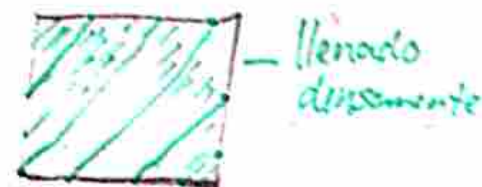
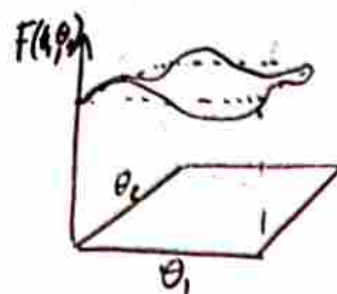
$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \quad \text{si} \quad k_1 + k_2 \sqrt{2} = m \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} = \frac{m - k_1}{k_2} \quad \text{sería racional!}$$

Son racionalmente independientes.

Sea $F(\theta_1, \theta_2) = \sin(2\pi\theta_1) + \sin(2\pi\theta_2): \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = F(w_1 t, w_2 t)$$



La gráfica de $f(t)$ llena densamente la imagen de

Tarea Describir el no ejemplo. $F(\theta_1, \theta_2)$

$$f(t) = \sin(2\pi t) + \sin(4\pi t)$$