Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM IIMAS

Renato Calleja, 6 de mayo de 2025

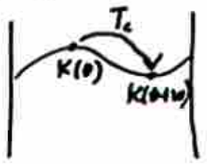
Series de Lindstedt

$$T_\varepsilon\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + p - \varepsilon V'(q) \pmod 1 \\ p - \varepsilon V'(q) \end{pmatrix}$$

$$q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = -\varepsilon V'(q_n) \quad , \quad q_n = n\omega + l_\varepsilon(n\omega)$$

$$K_\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} \theta + l_\varepsilon(\theta) \\ \omega + l_\varepsilon(\theta) - l_\varepsilon(\theta-\omega) \end{pmatrix}, \quad l_\varepsilon : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \quad (H)$$

$$T_\varepsilon \circ K_\varepsilon(\theta) = K_\varepsilon(\theta+\omega)$$



$$l_\varepsilon(\theta+\omega) - 2l_\varepsilon(\theta) + l_\varepsilon(\theta-\omega) = -\varepsilon V'(\theta + l_\varepsilon(\theta)) \quad (L)$$

$$l_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} l^n(\theta)\, \varepsilon^n$$

Unicidad

Si $K_\varepsilon(\theta)$ es solución también lo es $K_\varepsilon(\theta+\sigma)$

$\sigma \in \mathbb{T}^1$ constante

$$K_\varepsilon(\theta+\sigma) = \begin{pmatrix} \theta + \sigma + l_\varepsilon(\theta+\sigma) \\ \omega + l_\varepsilon(\theta+\sigma) - l_\varepsilon(\theta+\sigma-\omega) \end{pmatrix}$$

en (L) si $l_\varepsilon(\theta)$ es solución, entonces $\sigma + l_\varepsilon(\theta+\sigma)$ también lo es.

→ es como promedio

$\Rightarrow$ Imponemos $\int_0^1 l_\varepsilon(\theta)\, d\theta = 0$

(rel. con escoger fase).

Series de Lindstedt

$$\ell_\varepsilon(\theta+\omega) - 2\ell_\varepsilon(\theta) + \ell_\varepsilon(\theta-\omega) = -\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta))$$

$$\ell_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^n(\theta)\,\varepsilon^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\ell^n(\theta+\omega) - 2\ell^n(\theta) + \ell^n(\theta-\omega)\right]\varepsilon^n = -\varepsilon V'\left(\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\ell^n(\theta)\varepsilon^n\right)$$

$\ell^n : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ periódicas.

A orden $n=0$

$$L_\omega \ell^0(\theta) = \ell^0(\theta+\omega) - 2\ell^0(\theta) + \ell^0(\theta-\omega) = 0$$

L_ω es un operador lineal que aparece mucho en teoría KAM y consideramos

$e^{2\pi i k\theta} : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$

(son funciones propias de L_ω)

$$L_\omega e^{2\pi i k\theta} = e^{2\pi i k(\theta+\omega)} - 2e^{2\pi i k\theta} + e^{2\pi i k(\theta-\omega)}$$

$$= \left(e^{2\pi i k\omega} - 2 + e^{-2\pi i k\omega}\right) e^{2\pi i k\theta}$$

$$= \left(2\cos(2\pi k\omega) - 2\right) e^{2\pi i k\theta}$$

$\Rightarrow e^{2\pi i k\theta}$ eigenfunción

$2(\cos(2\pi k\omega) - 1)$ eigenvalor.

Así si $\eta(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k\theta}$, $\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\theta}$

Sean φ y $\eta : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$

$$L_\omega \varphi(\theta) = \eta(\theta)$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} 2(\cos(2\pi k\omega) - 1)\hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\theta} = \sum_{h=0}^{\infty} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k\theta}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$ $\quad 2(\cos(2\pi k\omega) - 1)\hat{\varphi}_k = \hat{\eta}_k$

para $k \neq 0$ $\quad \hat{\varphi}_k = \dfrac{\hat{\eta}_k}{2(\cos(2\pi k\omega) - 1)}$ y si $\omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ irracional.

C. Siegel 1942

→ Usar decaimiento exponencial de $\hat{\eta}_k$ y permitir que $\frac{1}{2(\cos(2\pi k\omega)-1)}$ crezca polinomialmente.

Series de Lindstedt

$$\ell_\varepsilon(\theta+\omega) - 2\ell_\varepsilon(\theta) + \ell_\varepsilon(\theta-\omega) = -\varepsilon V'(\theta + \ell_\varepsilon(\theta))$$

$$\ell_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^n(\theta)\,\varepsilon^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\ell^n(\theta+\omega) - 2\ell^n(\theta) + \ell^n(\theta-\omega)\right]\varepsilon^n = -\varepsilon V'\left(\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\ell^n(\theta)\varepsilon^n\right)$$

$\ell^n : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ periódicas.

Si $\eta : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ es analítica $\Rightarrow |\hat{\eta}_k| \le C e^{-2\pi\rho|k|}$

ahora $\hat{\varphi}_k = \dfrac{\hat{\eta}_k}{2(\cos(2\pi k\omega) - 1)}$

C. Siegel 1942 si ω es un irracional difícil de aproximar por racionales $\Rightarrow k\omega$ estará cerca de un entero sólo si k es grande

$\boxed{\omega \approx m/k}$ $\quad |k\cdot\omega - m| \geq \nu|k|^{-\tau}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $\nu > 0$, $\tau \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$

$$|\hat{\varphi}_k| \le C e^{-2\pi(\rho-\delta)|k|}, \quad 0 < \delta < \rho$$

$\varphi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^1$ también analítica pero "menos"!

Esto resuelve el problema $L_\omega \varphi = \eta$

$L_\omega \ell^0 = 0$ (problema homogéneo, todas las constantes son solución)

para nosotros $\int_0^1 \ell^0(\theta)d\theta = 0 \Rightarrow \ell^0 = 0$

La solución tomamos funciones tales que $\int_0^1 \eta(\theta)d\theta = 0$ y obtenemos soluciones $\int_0^1 \varphi(\theta)d\theta = 0$

Series de Lindstedt

$$\ell_\varepsilon(\theta+w) - 2\ell_\varepsilon(\theta) + \ell_\varepsilon(\theta-w) = -\varepsilon V'(\theta+\ell_\varepsilon(\theta))$$

$$\ell_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^n(\theta)\,\varepsilon^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\ell^n(\theta+w) - 2\ell^n(\theta) + \ell^n(\theta-w)\right]\varepsilon^n = -\varepsilon V'\left(\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\ell^n(\theta)\varepsilon^n\right)$$

$\ell^n : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ periódicas. $\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} S^n(\theta)\,\varepsilon^n$

Orden ε^1

$$L_w \ell^1(\theta) = -V'(\theta) = S^1(\theta)$$

$$\int_0^1 \ell^1(\theta)\,d\theta = 0$$

Orden ε^2

$$L_w \ell^2(\theta) = -V''(\theta)\ell^1(\theta) = S^2(\theta)$$

$$\int_0^1 \ell^2(\theta)\,d\theta = 0$$

Orden ε^n

$$L_w \ell^n(\theta) = S^n(\theta)$$

S^n es una expresión que involucra derivadas de V y ℓ's calculadas anteriormente..

$$|\hat{\varphi}_k| \le C e^{-2\pi(\rho-\delta)|k|}, \quad 0<\delta<\rho$$

$\varphi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}^1$ también analítica pero "menos"!

Esto resuelve el problema $L_w \ell = \eta$

Orden ε^0

$L_w \ell^0 = 0$ (problema homogéneo, todas las constantes son solución)

para nosotros $\int_0^1 \ell^0(\theta)\,d\theta = 0 \Rightarrow \ell^0 = 0$

La solución tomamos funciones tales que $\int_0^1 \eta(\theta)\,d\theta = 0$ y obtenemos soluciones $\int_0^1 \varphi(\theta)\,d\theta = 0$

Tarea para mañana

Demostrar que $\int_0^1 S^n(\theta)\,d\theta = 0$

Después tomaremos $\int_0^1 \ell^n(\theta)\,d\theta = 0$.