Introducción a la Mecánica Analítica

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 6 de agosto de 2024

Mecánica racinal

El objetivo es explicar el movimento de los objetos cuando fuerzas externas actúan sobre ellos.

Aristóles (384-322 A.C.)

$$F = mv$$

Newton ($\sim$1600)

1ª. Un cuerpo permanece en mov. a menos que una fuerza externa actúe sobre el.

2ª - La fuerza es igual a los cambios en el momento.

3ª - A toda acción corresponde una reacción de la misma magnitud pero en sentido contrario.

Newton

posición x

velocidad $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

aceleración $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$p = mv = m\dot{x}$ $\longrightarrow$ momento

$$F = m\ddot{x}$$

$F(x) = m\ddot{x}$ Fuerza sólo depende de la posición.

$\hookrightarrow$ Ec. dif. ord. 2do orden.

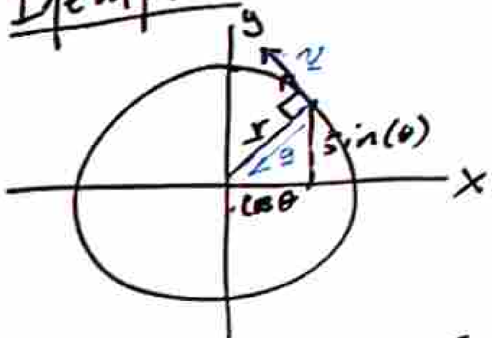
Información $x(0)$ posición inicial

$\dot{x}(0)$ velocidad inicial.

Espacio fase $(x(t), v(t)) = (x(t), \dot{x}(t))$

Mecánica racinal

Ejemplo Movimiento de una partícula sobre el círculo unitario



$x = \cos\theta$
$y = \operatorname{sen}\theta$

$\theta(t)$ posición de la partícula al tiempo t.

$\theta(t) = \omega t$ movimiento levógiro

contrario a las manecillas del reloj.

¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta?

$\omega T = 2\pi \rightsquigarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

↳ frecuencia ↳ Periodo.

$\underline{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (x(t), y(t))$

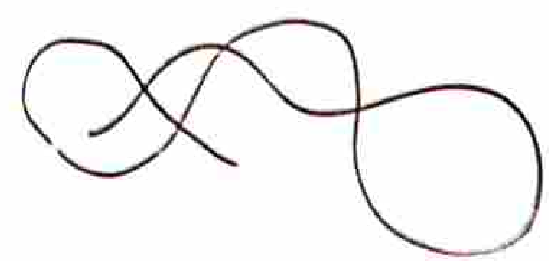
Posición → $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \operatorname{sen}(\omega t) \end{pmatrix}$

Velocidad → $\dfrac{d\underline{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega \operatorname{sen}(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$\underline{r}(t) \cdot \dfrac{d\underline{r}(t)}{dt} = -\omega \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) = 0$

· El espacio fase es el espacio tangente del círculo.

aceleración → $\dfrac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \cos(\omega t) \\ -\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \operatorname{sen}(\omega t) \end{pmatrix}$



Mecánica racinal

Ejemplo Movimiento de un planeta

Trabajamos en $\mathbb{R}^3$ $\underline{r}:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^3$

Asumimos que $\underline{r}$ es diferenciable c.r.a. t tantas veces como queremos.

$$\underline{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$ posición de un planeta en el tiempo t.

La imagen $\underline{r}:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ se llama la trayectoria ó curva.

(i) $\frac{d\underline{r}}{dt}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$ vector tangente a la trayectoria en el punto $\underline{r}(t)$

(ii) Masa constante $m>0$.
Definimos el momento $m\frac{d\underline{r}(t)}{dt}=m\underline{v}=m\dot{\underline{r}}$

Notación $\left(\frac{d}{dt}=\cdot\right)$

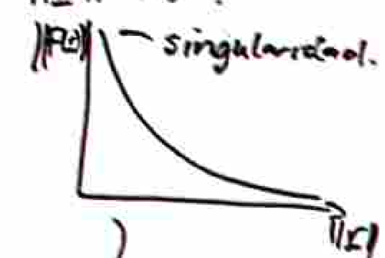
2^a ley $\frac{d}{dt}(m\dot{\underline{r}})=F(\underline{r})$

Ejemplo Campo gravitatorio

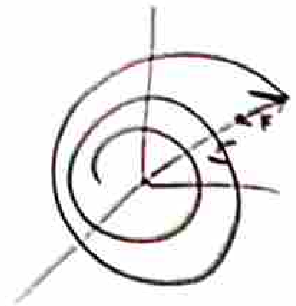
$$F(\underline{r})=-\frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|}\frac{1}{\|\underline{r}\|^2}$$

$\cdot\ \|\underline{r}\|^2=x^2+y^2+z^2$

¿Qué sucede cuando $\|\underline{r}\|\to 0$?



No es diferenciable en $\|\underline{r}\|=0$



Mecánica racinal

Ejemplo

$m\ddot{x} = F(x)$ EDO-A

$m\ddot{x} = F(x,t)$ EDO-NA

$m\ddot{x} = F(\dot{x},x,t)$ EDO

$\Big\}$ segundo orden

$m\dddot{x} = F(\ddot{x},\dot{x},x,t)$ EDO, pero de tercer orden

$m\ddot{x} = F(x(t-\tau))$ ~~EDO~~

Espacio fase infinito dimensional..

Ejemplo (Wheeler-Feynman)

$$F(\underline{r}(t-\tau)) = -\frac{\underline{r}(t-\tau)}{\|\underline{r}(t-\tau)\|}\,\frac{1}{\|\underline{r}(t-\tau)\|^2},\quad \tau = 50,000$$