Introducción a la Mecánica Analítica

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 5 de noviembre de 2024

Caracterización de funcionales lineales.

Sea $f: V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal en un espacio vect. V (posiblemente de dim infinita).

(a) Si $u_1, u_2 \in V$, $f(u_2)u_1 - f(u_1)u_2 \in \ker f$

Prueba: $f(f(u_2)u_1 - f(u_1)u_2) = f(u_1)f(u_2) - f(u_2)f(u_1) = 0$

(b) $V = \ker f \oplus W$, W es 1-dimensional

Prueba: Consideramos $\{u_1\} \cup \{f(u_i)u_{i+1} - f(u_{i+1})u_i\}_{i\geq 1}$ $(u_1 = u)$ para $u_1 \notin \ker f$, esto se puede cuando $f \neq 0$ y $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es base. Este nuevo cjto es l.i.

Caracterización de funcionales lineales.

(c) Si $g: V \to \mathbb{R}$ es una func. lineal con $\ker f \subset \ker g$

entonces $g = \lambda f$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $u, v \in V$, $f(u)v - f(v)u \in \ker f \subset \ker g$, $u \notin \ker g$.

$$0 = g(f(u)v - f(v)u) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$$

$$0 = \frac{f(u)g(v)}{g(u)} - f(v), \quad g(v) = \left(\frac{f(u)}{g(u)}\right) f(v) = \lambda f(v)$$

Caracterización de funcionales lineales.

(d) Si $g, f_1, \dots, f_k : V \to \mathbb{R}$ con $\bigcap_{i=1} \ker f_i \subset \ker g$,

existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $g = \sum_{i=1} \lambda_i f_i$

Prueba: Para cada f_i, $u, v \in V$ con $u \notin \bigcap_{i=1} \ker f_i$,

$f_i(u)v - f_i(v)u \in \ker f_i$, $f_i(u)g(v) - f_i(v)g(u) = 0$.

$g(v) - \frac{g(u)}{f_i(u)} f_i(v) = 0$ Sumando sobre k obtenemos

$g(v) - \left(\sum_{i=1} \frac{g(u)}{k f_i(u)}\right) f_i(v) = 0$, $g(v) = \sum \lambda_i f_i(v)$

Multiplicadores de Lagrange.

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con rango k en $f^{-1}(0)$. Entonces f define a una subvariedad $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k.

Sea $g: M \to \mathbb{R}$ diferenciable y con un máximo en $p \in M$

(a) $T_pM = \bigcap_{i=1}^{k} \ker df^i$.

prueba: Sea c una curva suave en M. Entonces $0 = (f \circ c)'(0) = d_pf(u)$ con $u = c'(0)$, $p = c(0)$. $d_pf = (df^1(p), df^2(p), \ldots, df^k(p))$

y $df^j = \sum D_i f^j dx^i$, si $d_pf(u) = 0$, necesariamente $u \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker df^i$

Multiplicadores de Lagrange.

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con rango k en $f^{-1}(0)$. Entonces f define a una subvariedad $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k.

Si $g: M \to \mathbb{R}$ diferenciable y con un máximo en $p \in M$

(b) Si $X_p \in T_pM$, $dg(X_p) = 0$. Hay una curva en M

tal que $c(0) = p$, $c'(0) = X_p$ y $dg(X_p) = (g \circ c)'(0)$

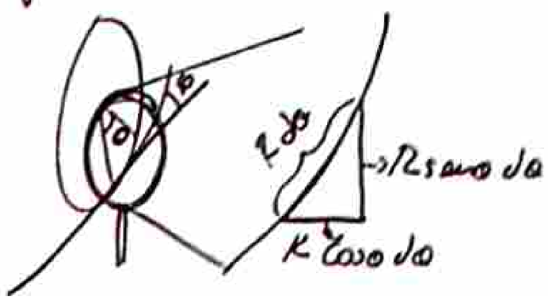
$g \circ c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con un punto crítico en 0.

ent. $0 = (g \circ c)'(0) = dg(X_p)$

Multiplicadores de Lagrange.

$dg = \sum D_i g\, dx^i$, $df^j = \sum D_i f^j dx^i$, por lo que acabamos de ver, $\bigcap_{i=1} \operatorname{Ker} df^i \subset \ker dg$. Por independencia lineal, y aplicando el resultado previo, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tales que $dg = \sum \lambda_i df^i$ ← multiplicadores de Lagrange.

Ej 1. En un péndulo, pedimos $r' = 0$. Esto es $(r \circ c)'(0) = dr(u) = 0$ para todo vector tangente u. La forma es $\omega = a_r dr + a_\theta d\theta = dr$, $a_r = 1$, $a_\theta = 0$

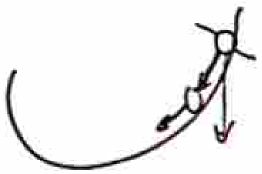
Ej 2. 

$dx = R\cos\theta\, d\theta$, $\omega_1 = dx - R\cos\theta\, d\theta = \overset{1}{a'_x} dx + \overset{0}{a'_y} dy + \overset{-R\cos\theta}{a'_\theta} d\theta + \overset{0}{a'_\varphi} d\varphi$

$dy = R\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$ $\quad \omega_2 = dy - R\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = \ ''\ \ ''\ \ ''\ \ ''$

Principio diferencial de D'Alembert

Sea $\phi_p(u) = \langle F(c(t)) - m\ddot{c}(t), u \rangle$ con $c(0)=p \in M \subseteq \mathbb{R}^n$



con M subvariedad. Tenemos que $\phi_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$

El principio de D'Alembert nos dice que $\phi_p(u)=0$ en M

Además, si $u \in \bigcap_i \ker \omega_i$ para algunas 1-formas (restricciones)

$\bigcap_{i=1} \ker\omega_i \subset \ker \phi_p$ y existirán $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ (que varían con p)

tales que $\phi_p(u) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(p)\,\omega_i(u)$

Ecs. de Euler-Lagrange.

Sean $q^1, \dots, q^n$ coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y $x^1, \dots, x^k$ coordenadas de una subvariedad M de dimensión K.

Escribamos $m\mathbb{C} = (m_1 c_1, \dots, m_n c_n)$, $F = \sum_{\alpha=1}^{k} F_\alpha$

Luego $\langle F(c(t)) - m\ddot{c}(t), u \rangle = \sum_{\alpha=1}^{k} (F_\alpha(c(t)) - m_\alpha \ddot{c}_\alpha(t)) u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} (F_\alpha(c(t)) - m_\alpha \ddot{c}_\alpha(t)) dx^\alpha(u)$

Pero $dx^\alpha = \sum_{i=1}^{n} D_i x^\alpha dq^i$, luego $\langle F - m\ddot{c}, u \rangle = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (F_\alpha(c(t)) - m_\alpha \ddot{c}(t)) D_i x^\alpha dq^i$

Por otro lado, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \omega^j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_j a_i^j dq^i$, comparando:

$$(F_\alpha(c(t)) - m_\alpha \ddot{c}(t)) D_i x^\alpha = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_i^j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

Ejemplo: El péndulo.

El lagrangiano 'general' en coordenadas polares es

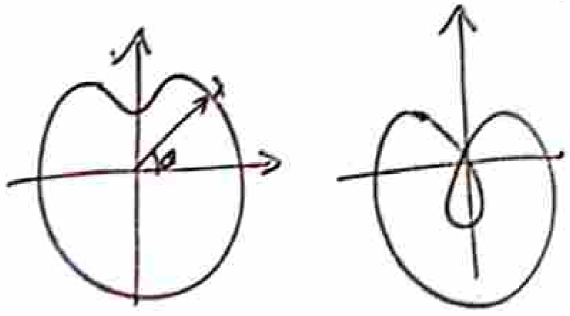
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta.$ La restricción es $dr=0$

$0 = \omega' = a'_r dr + a'_\theta d\theta = dr, \quad a'_r = 1, \quad a'_\theta = 0.$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \lambda_j a^j_r = \lambda$, entonces $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda.$

Como $\ddot{r}=0$, $-mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda$

$-L - mg\cos\theta = \lambda$



← λ como función de θ que depende del parámetro Θ

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$mr^2\ddot{\theta} + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$