Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 5 de marzo de 2025

Prop

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Dem

Sea φ_t el flujo de X

$$\varphi_t(x) = x + t X(x) + o(t)$$

derivando y evaluando en y. $\to d_y \varphi^{-t} = I_d - t\, d_y X + o(t)$

$$y = \varphi^t(x)$$

$$d_{\varphi^t(x)} \varphi^{-t} = I_d - t\, d_{\varphi^t(x)} X + o(t)$$

Notemos que $d_y \varphi^{-t} - d_x \varphi^{-t} = -t(d_y X - d_x X) + o(t)$

$$Y(\varphi_t(x)) = Y(x + tX(x) + o(t))$$

$$= Y(x) + t\, d_x Y \cdot X(x) + o(t)$$

$$L_X Y = \frac{d}{dt} (\varphi^t)^* Y \Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{d_{\varphi^t(x)} \varphi^{-t} \cdot (Y(\varphi^t(x)) - Y(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[(I_d - t\, d_{\varphi^t(x)} X + o(t)) \cdot (Y(x) + t d_x Y \cdot X(x)) - Y(x) \right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\cancel{Y(x)} + t(d_x Y \cdot X(x) - d_{\varphi^t(x)} X \cdot Y(x)) - \cancel{Y(x)} \right]$$

$$= d_x Y \cdot X(x) - d_x X \cdot Y(x)$$

pero

$$d_x Y \cdot X - d_x X \cdot Y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y esta es la expresión en coords del $[X, Y]$. //

$XY(f)$

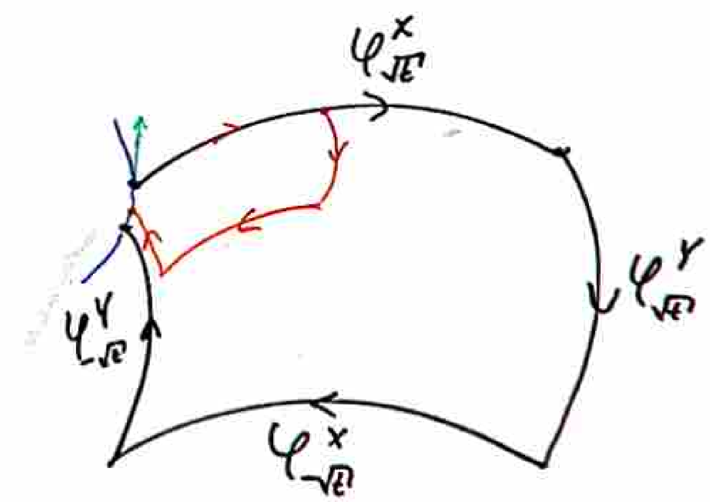
Hay una definición de la derivada de Lie a través de los flujos φ_t^X y φ_t^Y asociados a X y Y.

$$[X,Y] = \frac{d}{dt}\left(\varphi^Y_{-\sqrt{t}} \circ \varphi^X_{-\sqrt{t}} \circ \varphi^Y_{\sqrt{t}} \circ \varphi^X_{\sqrt{t}}\right)\Big|_{t=0}$$

La clase pasada $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$

$$\varphi^Y_{\sqrt{t}} \circ \varphi^X_{\sqrt{t}} \circ \varphi^Y_{\sqrt{t}} \circ \varphi^X_{\sqrt{t}} = Id$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0$$



Teorema
Sean X, Y campos vectoriales en M.
$[X,Y] = 0$ si y sólo si los flujos conmutan localmente.

$$\varphi^Y_s \circ \varphi^X_s = \varphi^X_s \circ \varphi^Y_s$$

Para evaluar la derivada de Lie tenemos la <u>fórmula mágica de Cartan</u> (E. Cartan)

Sea α una k-forma

$$\mathcal{L}_X \alpha = i_X (d\alpha) + d(i_X \alpha)$$

Notación

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

Otra identidad

$$i_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$$

Expresiones explícitas para la derivada exterior de una 1-forma

α - 1-forma.

$$d\alpha(X,Y) = \mathcal{L}_X \alpha(Y) - \mathcal{L}_Y \alpha(X) - \alpha(\mathcal{L}_X Y)$$

Como $\mathcal{L}_X f = X(f)$ y $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])$$

Para k-formas

$$d\alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mathcal{L}_{X_i} (\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha(\mathcal{L}_{X_i}(X_j), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k)$$

Para w una 2-forma

$$dw(X_1, X_2, X_3) = X_1 w(X_2, X_3) + X_2 w(X_3, X_1) + X_3 w(X_1, X_2) - w([X_1, X_2], X_3) - w([X_2, X_3], X_1) - w([X_3, X_1], X_2)$$

Estructuras simplécticas en variedades

La estructura simpléctica

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dy_i \wedge dx_i \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^{2n} \simeq (\mathbb{R}^{2n})^*$$

El espacio tangente $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n},\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$