

Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

**Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS**

Renato Calleja, 5 de febrero de 2025

Transformaciones de campos vectoriales

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

Operador diferencial

$$X = \sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad X: C^\infty \rightarrow C^\infty$$

$$h \in C^\infty(D) \quad Xh = \sum f_j \frac{\partial h}{\partial x_j}$$

Tarea ¿Cuál es la diferencia entre C^∞ y analítica?

Podemos recuperar $f_j(x)$,

$$Xx_j = f_j(x)$$

$$\text{Si aplicamos } X = u(y) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = g(y)$$
$$g(y) = u_y^{-1} f(u(y))$$

Ahora transformamos el operador

$$(Xh) \circ u = Y(h \circ u)$$

$$Y(h \circ u) = \sum_{k=1}^n g_k(y) \frac{\partial h \circ u}{\partial y_k}$$

$$g = (g_k), \quad g = u_y^{-1} f \circ u$$

$$\text{Escribimos } u^* X = \sum_{k=1}^n g_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

Este es el Pull-back de X mediante u .

Transformaciones de campos vectoriales

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

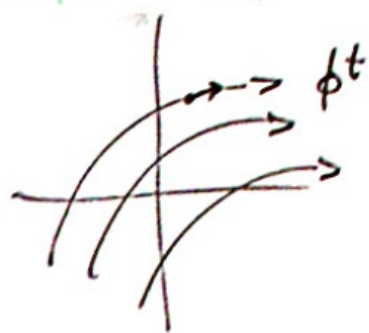
Operador diferencial

$$X = \sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad X: C^\infty \rightarrow C^\infty$$

$$h \in C^\infty(D) \quad Xh = \sum f_j \frac{\partial h}{\partial x_j}$$

Otra relación

$$Xh = \left. \frac{d}{dt} h(\phi^t) \right|_{t=0}, \quad \phi^t \text{ es el flujo de (1).}$$



Xh es la derivada direccional de h a lo largo del campo.

$$Xh = \langle f(x), \nabla h(x) \rangle$$

$$= \dot{h}(\phi^t)|_{t=0}$$

Los campos vectoriales (operad. dif) forman una álgebra de Lie con un conmutador

$$XY - YX = [X, Y]$$

$$X = \sum f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Y = \sum g_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$[X, Y] = \sum_{j,k=1}^n \left(f_j \frac{\partial g_k}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Tarea ¿Es obvio?

$$u^*[X, Y] = [u^*X, u^*Y]$$

La definición de $[X, Y]$ es independiente de la elección de coordenadas.

Transformaciones de campos vectoriales

Campo vectorial Hamiltoniano

$$\dot{x} = J \nabla H(x) \quad (H)$$
$$x = (q, p), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$
$$JJ = -I_{2n}$$

$$\dot{q} = \nabla_p H(q, p)$$

$$\dot{p} = -\nabla_q H(q, p)$$

Sujeto a una transformación $x = u(y)$
 $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$K(y) = H(u(y)): \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$$

Nos gustaría que K fuera el Hamiltoniano de el campo transformado.

$$\dot{x} = u_y \dot{y}, \quad \nabla K = (u_y)^T \nabla H \circ u$$

$$-J\dot{x} = \nabla H(x) \Rightarrow -J u_y \dot{y} = (u_y)^T \nabla H \circ u$$

Entonces si $(u_y)^T J u_y = J$, las ecuaciones transformadas serían Hamiltonianas con hamilt $K = H \circ u$

Conclusión:

Las transformaciones canónicas preservan la estructura Hamiltoniana.

Formas diferenciales

Una forma de grado 1 (1-forma) es una función lineal $W: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

$$W(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 W(v_1) + \lambda_2 W(v_2)$$

El conjunto de todas las 1-formas es un espacio vectorial real. $W_1, W_2 \in (\text{Espacio de funciones lineales})$

$$\left. \begin{aligned} (W_1 + W_2)(v) &= W_1(v) + W_2(v) \\ (\lambda W_1)(v) &= \lambda(W_1(v)) \end{aligned} \right\} \text{ espacio vectorial}$$

El espacio vectorial de todas las 1-formas de $\mathbb{R}^m$ tiene dimensión m y se llama espacio dual a $\mathbb{R}^m$. La notación es $(\mathbb{R}^m)^*$.

En general, sea E un espacio vectorial de dimensión m (finita), con base $e_1, \dots, e_m$

$$E^* = \{ W: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineales} \}$$

con base $e^1, \dots, e^m$.
Se pueden escoger las bases,

$$e^i(e_j) = \delta_{ij}$$

Al tener esta base podemos escribir $W \in E^*$

$$W = \sum_{i=1}^m \lambda_i e^i \quad \text{donde } \lambda_i = W(e_i)$$

Formas diferenciales

Sea $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

B es bilineal si y sólo si es $\mathbb{R}$ -lineal en cada uno de sus argumentos.

Si $\alpha, \beta \in E^*$ entonces.

$$\alpha \otimes \beta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)$$

es bilineal.

Denotamos por $E^* \otimes E^*$ el espacio de todas las transformaciones bilineales $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$.