

Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

**Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS**

Renato Calleja, 4 de febrero de 2025

Subespacios de un espacio simpléctico

Restringimos la forma bilineal $[\cdot, \cdot]$ a un subespacio.

i) La forma restringida es antisimétrica.

ii) ¿Es degenerada?

Sólo es no-degenerada cuando

$$E \cap E^\perp = \{0\}$$

$$v \in E \quad [v, w] = 0 \quad \forall w \in E \Rightarrow v = 0$$

$$\text{si } v \in E \cap E^\perp \Rightarrow v = 0 \quad \text{si es no degenerada.}$$

Entonces cuando $E \cap E^\perp = \{0\}$ el subespacio es simpléctico.

Por simetría E es simpléctico
si y sólo si $E^\perp$ es simpléctico.

Lema

Sea V un espacio simpléctico.

- i) $\dim V$ es par, $2n$, $n \in \mathbb{N}$.
- ii) Existe una base $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$
con la propiedad;
 $[v_j, v_{k+n}] = \delta_{jk}$ para $1 \leq j < k+n \leq 2n$

A esta base la llamamos base canónica.

Subespacios de un espacio simpléctico

Dem

Sea v_1 un vector distinto de cero.

Como $[\cdot, \cdot]$ es no-degenerada,
existe un v_{n+1} tal que $[v_1, v_{n+1}] = 1$

Si la $\dim V = 2$, terminamos.

Si $\dim V \geq 3$, entonces tomamos $E = \text{span}\{v_1, v_{n+1}\}$
que es simpléctico, pero $E^\perp$ también lo es.

$$\dim E^\perp = \dim V - 2$$

Hacemos inducción sobre la dimensión de los
subespacios complementarios construyendo la base
hasta agotar la dimensión del espacio //

Subespacios de un espacio simpléctico

Si representamos $x, x' \in V$ en términos de elementos de la base

$$x = \sum_{j=1}^{2n} x_j v_j, \quad x' = \sum_{k=1}^{2n} x'_k v_k$$

$$[x, x'] = \langle x, Jx' \rangle = \left[\sum_{j=1}^{2n} x_j v_j, \sum_{k=1}^{2n} x'_k v_k \right]$$

$$= \sum x_j x'_k J_{jk} \quad \text{donde}$$

$J_{jk} = \pm 1$ con $k = j \pm n$ y cero de otra forma.
Entonces la base de la forma bilineal está representada en términos de la matriz J .

Corolario

Si tenemos $[\cdot, \cdot]_1$ y $[\cdot, \cdot]_2$ dos formas bilineales no-degeneradas en V_1 y V_2 dos espacios vectoriales de la misma dimensión, entonces existe un mapeo $T: V_1 \rightarrow V_2$, invertible y tal que $[Tv, Tw]_2 = [v, w]_1$.

De hecho, podemos escoger bases canónicas

$v_j^{(1)}$ y $v_j^{(2)}$ de V_1 y V_2 resp. tal que.

$$Tv_j^{(1)} = v_j^{(2)}$$

Dicho de otra forma, todos los espacios simplécticos de la misma dimensión son equivalentes.

Subespacios de un espacio simpléctico

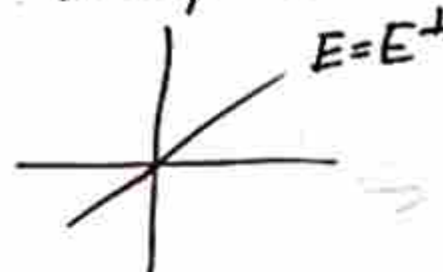
Introducimos vocabulario de subespacios de espacios simplécticos.

i) E es isotrópico si $E \subset E^\perp$

ii) E es co-isotrópico si $E^\perp \subset E$

iii) E es Lagrangiano si $E = E^\perp$

iv) E es simpléctico si $E \cap E^\perp = \{0\}$



Notas

- iv) ya lo habíamos visto
- Todo espacio 1 dimensional es isotrópico
porque $v \in V \quad [v, v] = -[v, v] = 0$
- para E isotrópico $\dim E \leq n$
- para E co-isotrópico $\dim E \geq n$
- para E Lagrangiano $\dim E = n$

Transformaciones de espacios vectoriales

Sea un espacio vectorial $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, clase C^1

$\frac{dx}{dt} = f(x)$ (1) se transforma por $x = u(y)$
($f_1(x), \dots, f_n(x)$)

en $\frac{dy}{dt} = g(y)$ (2), con $g(y) = u_y^{-1} f(u(y))$

$$u_y = \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} \right) \quad \left[\dot{x} = u_y(y) \dot{y} \right]$$

Esta es la ley de transformación para campos vectoriales.

Sea ϕ^t el flujo de (1) y ψ^t el flujo de (2)

Entonces ψ^t satisface que

$$\psi^t = u^{-1} \circ \phi^t \circ u$$

$$\Rightarrow u \circ \psi^t = \phi^t \circ u$$

$$\frac{d\phi^t \circ u}{dt} = u_y \frac{d\psi^t}{dt} = u_y g(\psi^t) = f(u \circ \psi^t) = f(\phi^t \circ u)$$

Ahora escribimos los campos vectoriales como operadores diferenciales parciales

El campo de (1) es,

$$X = \sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\dot{x} = f(u(y))$$

$$u_y \dot{y} = f(u(y))$$

$$\dot{y} = \underbrace{u_y^{-1} f(u(y))}_{g(y)}$$