

Introducción a la mecánica analítica

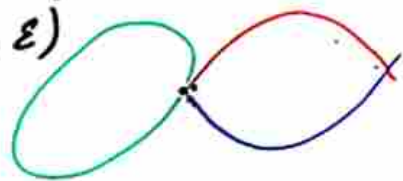
**Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS**

Renato Calleja, 30 de abril de 2025

El problema fundamental de la dinámica

Sist. Hamiltoniano en acción-ángulo (θ, I)

$$H(\theta, I, \varepsilon) = h(I) + \varepsilon f(\theta, I, \varepsilon)$$



campo rect.

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial I} = -\frac{\partial h}{\partial I} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial I}$$

Método de series de Lie

$$\chi = \chi(\phi, \mathcal{J}), \quad \mathcal{L}_\chi(H) = \{\chi, H\}$$

$$K = e^{\varepsilon \mathcal{L}_\chi} H = H \circ T = h(\mathcal{J}) + \varepsilon f(\phi, \mathcal{J}) + \varepsilon \{\chi, h\}(\phi, \mathcal{J}) + o(\varepsilon^2)$$

$\Rightarrow$ resolver la ec. lineal $\{\chi, h\} = -f(\phi, \mathcal{J})$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial \phi_k} \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathcal{J}_k} = -f(\phi, \mathcal{J})$$

Series de Fourier

$$f(\phi, \mathcal{J}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k(\mathcal{J}) e^{2\pi i k \cdot \phi}$$

$$\chi(\phi, \mathcal{J}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\chi}_k(\mathcal{J}) e^{2\pi i k \cdot \phi}$$

y de Arnold-Jost $\frac{\partial h}{\partial \mathcal{J}} = \omega(\mathcal{J})$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k(\mathcal{J}) e^{2\pi i k \cdot \phi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\chi}_k(\mathcal{J}) k \cdot \omega(\mathcal{J}) e^{2\pi i k \cdot \phi}$$

si $k \cdot \omega(\mathcal{J}) \neq 0$ entonces formalmente

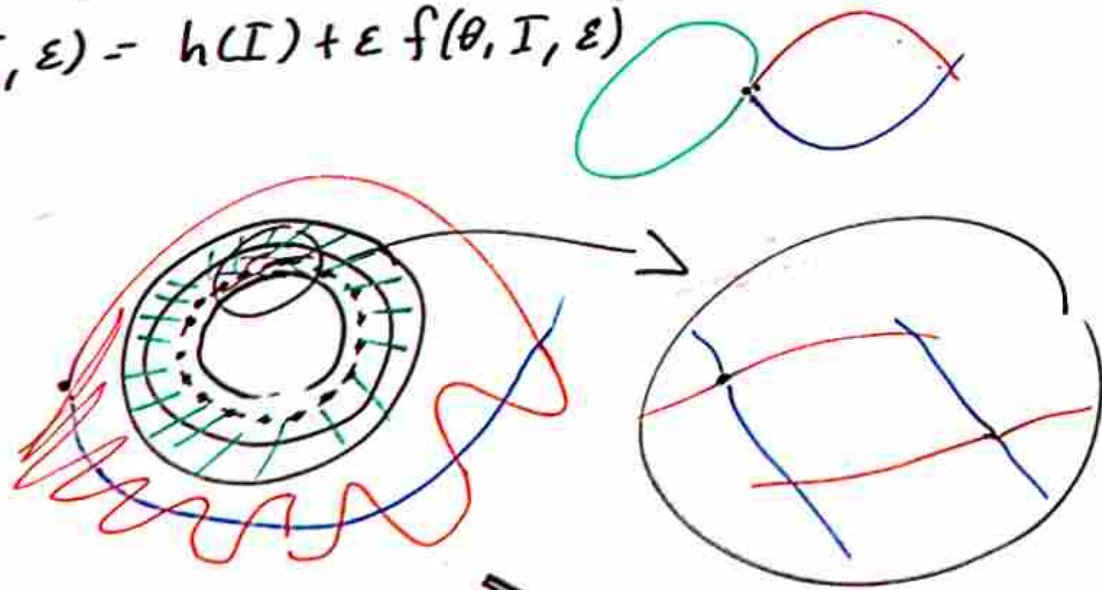
$$\hat{\chi}_k(\mathcal{J}) = -\frac{\hat{f}_k(\mathcal{J})}{2\pi i k \cdot \omega(\mathcal{J})}$$

Ej $\omega = (\omega_1, \omega_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$
 $k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 \neq 0 \quad \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ irracional.

El problema fundamental de la dinámica

Sist. Hamiltoniano en acción-ángulo (θ, I)

$$H(\theta, I, \varepsilon) = h(I) + \varepsilon f(\theta, I, \varepsilon)$$



1894 Poincaré: Esta serie no tiene oportunidad de converger.
No hay ningún abierto de $\mathcal{T}$, donde $k \cdot \omega(\mathcal{T}) \neq 0$.

Series de Fourier

$$f(\phi, \mathcal{T}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k(\mathcal{T}) e^{2\pi i k \cdot \phi}$$

$$\chi(\phi, \mathcal{T}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\chi}_k(\mathcal{T}) e^{2\pi i k \cdot \phi}$$

y de Arnold-Jost $\frac{\partial h}{\partial \mathcal{T}} = \omega(\mathcal{T})$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_k(\mathcal{T}) e^{2\pi i k \cdot \phi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\chi}_k(\mathcal{T}) k \cdot \omega(\mathcal{T}) e^{2\pi i k \cdot \phi}$$

si $k \cdot \omega(\mathcal{T}) \neq 0$ entonces formalmente

$$\hat{\chi}_k(\mathcal{T}) = -\frac{\hat{f}_k(\mathcal{T})}{2\pi i k \cdot \omega(\mathcal{T})}$$

Ej $\omega = (\omega_1, \omega_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$
 $k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 \neq 0 \quad \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ irracional.

El problema fundamental de la dinámica

2º intento: Series de Lindstedt

Mapeo estándar

$$T_\varepsilon \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + P - \varepsilon V'(q) \pmod{1} \\ p - \varepsilon V'(q) \end{pmatrix} \quad (\text{St Ham})$$

con $V(q) = V(q+1)$ es un potencial suave

$$q_{n+1} = (q_n + P_{n+1}) \pmod{1}$$

$$P_{n+1} = P_n - \varepsilon V'(q_n)$$

$$\stackrel{\text{Leg}}{\Rightarrow} P_{n+1} = q_{n+1} - q_n$$

$$P_n = q_n - q_{n-1}$$

$$q_{n+1} - q_n = q_n - q_{n-1} - \varepsilon V'(q_n)$$

$$\Leftrightarrow q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = -\varepsilon V'(q_n)$$

$$(\text{St L}) \quad \ddot{q} = -\varepsilon \sin(q)$$

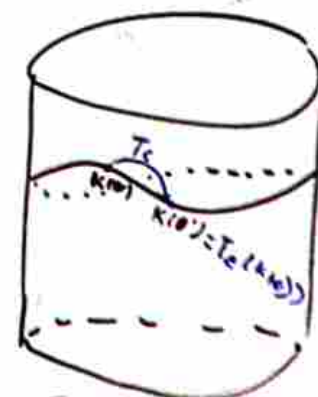
Suponemos también que

$$\int_0^1 V'(q) dq = 0$$

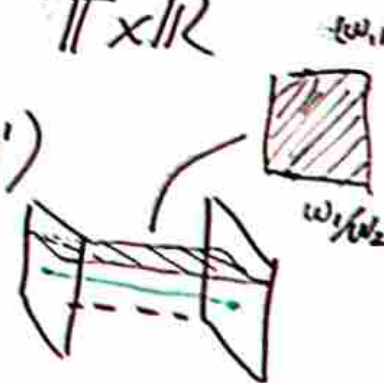
Buscamos soluciones cuasi-periódicas escribiendo una ecuación de invarianza.

→ Buscamos una $K_\varepsilon: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$

tal que $T_\varepsilon(K(\theta)) = K(\theta')$



$$T_\varepsilon(K(\theta)) = K(\theta + w)$$



$$K(\pi) = \mathcal{K} \\ \theta' = \theta + w$$

El problema fundamental de la dinámica

2º intento: Series de Lindstedt

Mapeo estándar
 $T_\varepsilon \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + p - \varepsilon V'(q) \pmod{1} \\ p - \varepsilon V'(q) \end{pmatrix}$ (St. Ham)

Lindstedt buscamos $K_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\theta) \varepsilon^n$

$$T_\varepsilon(K_\varepsilon(\theta)) = T_0 \circ K_0 + \varepsilon [T_1 \circ K_0 + (DT_0 \circ K_0)K_1] + \varepsilon^2 (DT_1 \circ K_0)K_2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (D^2 T_0 \circ K_0)[K_1, K_1] + \dots + \text{t.o.m.}$$

$$T_0 \circ K_0(\theta) = K_0(\theta + \omega)$$

$$K_0^q(\theta) + K_0^p(\theta) = K_0^q(\theta + \omega)$$

$$K_0^p(\theta) = K_0^p(\theta + \omega)$$

Fácil: Tarea.

Suponemos también que

$$\int_0^1 V'(q) dq = 0$$

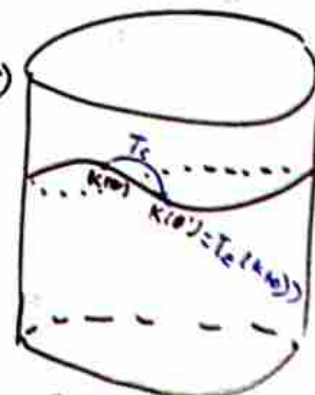
Buscamos soluciones cuasi-periódicas escribiendo una ecuación de invarianza.

→ Buscamos una $K_\varepsilon: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$

tal que $T_\varepsilon(K_\varepsilon(\theta)) = K_\varepsilon(\theta')$

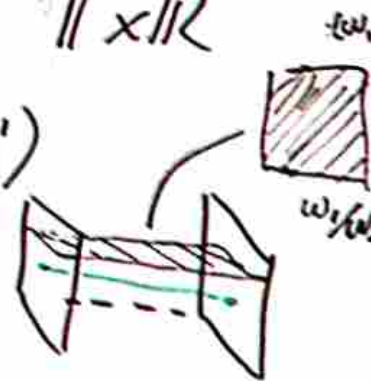
$$\hat{\chi}_K(\mathcal{J}) = \frac{-\hat{f}_K(\mathcal{J})}{2\pi i K(\omega(\mathcal{J}))}$$

problema de pequeños divisores.



$$T_\varepsilon(K_\varepsilon(\theta)) = K_\varepsilon(\theta + \omega)$$

$$K(\pi) = \mathcal{X} \\ \theta' = \theta + \omega$$



El problema fundamental de la dinámica

2do intento: Series de Lindstedt

Mapeo estándar
 $T_\varepsilon \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + p - \varepsilon V'(q) \pmod{1} \\ p - \varepsilon V'(q) \end{pmatrix}$ (St. Ham)

Lindstedt buscamos $K_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\theta) \varepsilon^n$

$$T_\varepsilon(K_\varepsilon(\theta)) = T_0 \circ K_0 + \varepsilon [T_1 \circ K_0 + (DT_0 \circ K_0)K_1] + \varepsilon^2 (DT_1 \circ K_0)K_2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (D^2 T_0 \circ K_0)[K_1, K_1] + \dots + \text{t.o.m.}$$

$$T_0 \circ K_0(\theta) = K_0(\theta + \omega)$$

$$K_0^q(\theta) + K_0^p(\theta) = K_0^q(\theta + \omega)$$

$$K_0^p(\theta) = K_0^p(\theta + \omega)$$

Fácil: Tarea.

Suponemos también que

$$\int_0^1 V'(q) dq = 0$$

En la formulación Lagrangiana

$$K_\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} \theta + l_\varepsilon(\theta) \\ \omega + l_\varepsilon(\theta + \omega) - l_\varepsilon(\theta) \end{pmatrix} \text{ donde}$$

$$l_\varepsilon: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1, \quad q = \theta + l_\varepsilon(\theta)$$

$$p_{n+1} = q_{n+1} - q_n = \theta + \omega + l_\varepsilon(\theta + \omega) - \theta - l_\varepsilon(\theta)$$

La for. Lagrangiana nos permite encontrar la K en términos de una única función periódica $l_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(\theta) \varepsilon^n$.