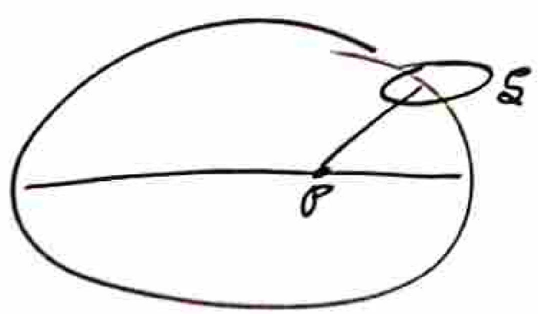
Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

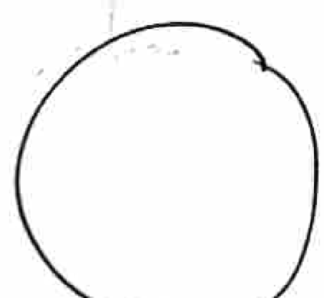
Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 2 de abril de 2025

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\varepsilon\left(\frac{a}{r}\right)^3 \operatorname{sen}(2x - 2f_\varepsilon(t))$$
$$\varepsilon = \frac{3}{2}\,\frac{I_2 - I_1}{I_3}$$





Péndulo $(e=0)$

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\varepsilon(1)^3 \operatorname{sen}(2x - 2t)$$
$$\ddot{x} + \varepsilon \operatorname{sen}(2x - 2t) = 0$$
$$\ddot{\gamma} + \varepsilon \operatorname{sen}(2\gamma) = 0$$

$$\ell_0 = \frac{t - t_0}{T}$$
$$x - t = \gamma$$
$$\ddot{x} = \ddot{\gamma}$$

El corchete de Poisson c.r.a. la estructura simpléctica.

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{M} \text{ var de dim } 2n \\ \Omega \text{ 2-forma no-deg}\end{array}\right\}$ $(\mathcal{M}, \Omega)$ var. simpléctica.

Si F es una función de la var, X_F es el único campo vect tal que $\Omega(X_F, \cdot) = -dF$

Def

El corchete de Poisson de dos funciones F, G se define como la función $\{F, G\}$ donde $\{F, G\} = \Omega(X_F, X_G)$

por antisimetría,
$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

Por no-degeneración,
$$\{F, G\} = 0, \ \forall G, \text{ entonces } dF = 0.$$

Como $\Omega(X_F, \cdot) = -dF$

$$\{F, G\} = \Omega(X_F, X_G) = -dF(X_G) = +dG(X_F)$$

también $-dF(X_G) = -X_G(F)$

por antisimetría $dG(X_F) = -X_G(F)$

$$= X_F(G)$$

Para estudiar la cerradura de Ω en términos del corchete de Poisson introducimos $J(F_1, F_2, F_3)$ para tres funciones F_1, F_2, F_3,

$$J(F_1, F_2, F_3) = \{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\}$$

Se puede probar el siguiente lema (Tarea?)

Lema

(i) $[X_{F_1}, X_{F_2}](F_3) = X_{\{F_1, F_2\}}(F_3) + J(F_1, F_2, F_3)$

(ii) $(d\Omega)(X_{F_1}, X_{F_2}, X_{F_3}) = -J(F_1, F_2, F_3)$

El corchete de Poisson c.r.a. la estructura simpléctica.

Teorema

Si Ω es una 2-forma no-degenerada de $\mathcal{M}$ entonces la condición $d\Omega = 0$ es equivalente a cada una de las siguientes condiciones,

(i) $[X_F, X_G] = X_{\{F, G\}}$ F, G funciones en $\mathcal{M}$

(ii) $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$ F, G, H funcs en $\mathcal{M}$

Subvariedades especiales de una variedad simpléctica

Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$

$\mathcal{N}$ subvariedad, $\mathcal{M}$ var. simpléctica $(\mathcal{M}, \Omega)$

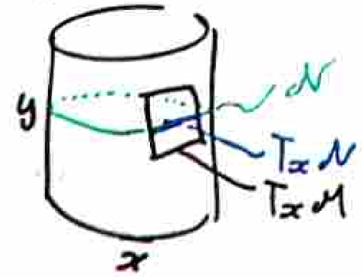
dim $\mathcal{M} = 2n$

El espacio tangente de $\mathcal{N}$

$T_x\mathcal{N} \subset T_x\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$

↳ es un subespacio de un espacio vectorial simpléctico

$T_x\mathcal{M}$ tiene la estructura simpléctica Ω_x



· Si $L_x \subset T_x\mathcal{M}$ es un subespacio lineal, entonces denotamos por $L_x^\perp$ a su complemento ortogonal, es decir,

$$L_x^\perp = \{ X \in T_x\mathcal{M} : \Omega_x(X,Y) = 0, \forall Y \in L_x \}$$

¿ $T_x\mathcal{N}^\perp$ y $\Omega_x = dy \wedge dx$?

En el ejemplo, $T_x\mathcal{N}^\perp = T_x\mathcal{N}$.

Deformando ...

$T_x\mathcal{N}$ tiene la forma $\Omega_x = \boxed{4}\, dy \wedge dx$

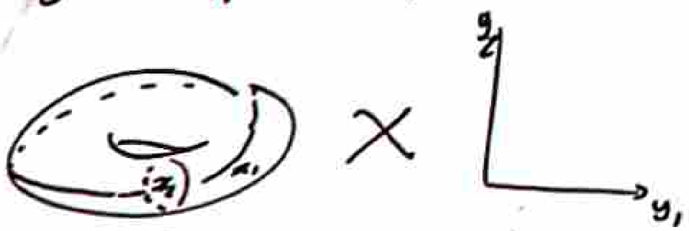
... no importa $T_x\mathcal{N}^\perp = T_x\mathcal{N}$

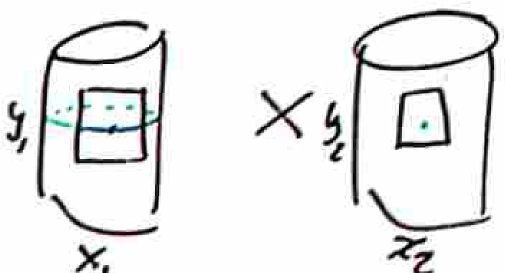
Otro ejemplo $\Rightarrow \mathcal{M} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\Omega = dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2$

¿Ejemplo de $L_x^\perp$?

Subvariedades especiales de una variedad simpléctica

$$\mathcal{M} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \Omega = dy_2 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dx_1$$





$\mathcal{N}$ var 1 dim.

$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$

$L_x = T_x \mathcal{N}$

¿$L_x^\perp$?

$$Y = a^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b^1 \frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$X = a^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + b^2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

$$\Omega_x(X,Y) = (dy_2 \wedge dx_2 + dy_1 \wedge dx_1)(X,Y)$$
$$= (dy_2(X)\,dx_2(Y) - dx_2(X)\,dy_2(Y) + dy_1(X)\,dx_1(Y) - dx_1(X)\,dy_2(Y))$$

Si $L_x \subset T_x\mathcal{M}$ es un subespacio lineal, entonces denotamos por $L_x^\perp$ a su complemento ortogonal, es decir,

$$L_x^\perp = \{ X \in T_x\mathcal{M} : \Omega_x(X,Y) = 0, \forall Y \in L_x \}$$

¿ $T_x\mathcal{N}^\perp$ y $\Omega_x = dy \wedge dx$?

En el ejemplo, $T_x\mathcal{N}^\perp = T_x\mathcal{N}$.

Deformando ...

$T_x\mathcal{N}$ tiene la forma $\Omega_x = \boxed{4}\, dy \wedge dx$

... no importa $T_x\mathcal{N}^\perp = T_x\mathcal{N}$

Otro ejemplo $\Rightarrow \mathcal{M} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\Omega = dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2$

¿Ejemplo de $L_x^\perp$?