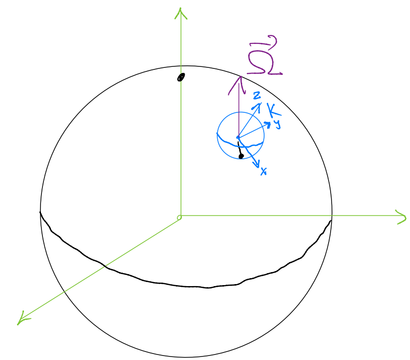
Teo

El mov de un sistema rotante se lleva a cabo como si tres fuerzas adicionales actuaran en cada punto Q de masa m:

1) fuerza inercial de rotación : $m(\dot{\vec{\Omega}} \times Q)$
2) fuerza de Coriolis : $2m(\vec{\Omega} \times \dot{Q})$
3) fuerza centrífuga : $m(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times Q))$

$$m\ddot{Q} = F - m(\dot{\vec{\Omega}} \times Q) - 2m(\vec{\Omega} \times \dot{Q}) - m(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times Q))$$

Péndulo de Foucault



k inercial

Efecto de rotación de la tierra.

- Rotación uniforme $\dot{\vec{\Omega}} = 0$
- Fuerza centrífuga es importante sobre el ecuador, pero el péndulo está cerca del polo norte.

$\vec{\Omega}$ velocidad angular en el marco en movimiento K

$|\vec{\Omega}| \approx 3/1000 \ \frac{rad}{s}$ Norma de la velocidad angular de la tierra.

Péndulo de Foucault

Péndulo esférico

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Restricción holonómica

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2) = 0$$

$$\nabla f = (x, y, z)$$

Lagrangiano modificado

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda f(x,y,z)$$

Ecs E-L

$$m\ddot{x} = \lambda x$$
$$m\ddot{y} = \lambda y$$
$$m\ddot{z} = \lambda z - mg$$

$\lambda = 0$

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} + mg = 0$$

Calculamos λ

$$\lambda = \frac{1}{|\nabla f|^2}\langle m\ddot{q} - F, \nabla f\rangle$$

$$|\nabla f|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$$

$$\lambda = \frac{1}{\ell^2}\langle (m\ddot{x}, m\ddot{y}, m\ddot{z} + mg), (x,y,z)\rangle$$

$$= \frac{m}{\ell^2}(\ddot{x}\cdot x + \ddot{y}\cdot y + \ddot{z}\cdot z + mgz)$$

Truco tomar la derivada de f c.r.a.t

$$\frac{d}{dt}f = 0 \Rightarrow \dot{x}\cdot x + \dot{y}\cdot y + \dot{z}\cdot z = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}f = 0 \Rightarrow \ddot{x}\cdot x + \ddot{y}\cdot y + \ddot{z}\cdot z + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}\cdot x + \ddot{y}\cdot y + \ddot{z}\cdot z = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\lambda = \frac{m}{\ell^2}(gz - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2))$$

Ecs de movimiento

$$\ddot{x} = \frac{1}{l^2}(gz - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2))x$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{l^2}(gz - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2))\cdot y$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{l^2}(gz - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2))\cdot z$$

(Péndulo esférico en cords (x,y,z))

$$m\ddot{q} - F - \lambda\nabla f = 0$$

Prod interno con ∇f

$$0 = \langle m\ddot{q} - F - \lambda\nabla f, \nabla f\rangle$$

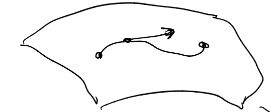
$$= \langle m\ddot{q} - F, \nabla f\rangle - \lambda \underbrace{\langle\nabla f, \nabla f\rangle}_{= |\nabla f|^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{|\nabla f|^2}\langle m\ddot{q} - F, \nabla f\rangle$$

Derivacion de λ.

¿Porqué λ se considera constante al escribir las ecs. de E-L?

La derivada c.r.a. t en E-L es la derivada de una curva contenida en la variedad.
La derivada c.r.a. t pertenece a $T\mathcal{N}$



El término λ está en el campo normal a la variedad $\lambda\nabla f \in N\mathcal{N}$
haz normal.

Por esto tomamos λ constante al calcular E-L.

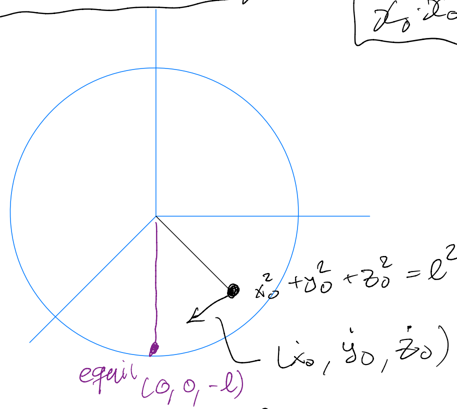
Voluntario $\rightarrow$ J

Las condiciones iniciales deben estar sobre la restricción.

$$\boxed{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \ell^2}$$

$$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \cdot (x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\boxed{\dot{x}_0 \cdot x_0 + \dot{y}_0 \cdot y_0 + \dot{z}_0 \cdot z_0 = 0}$$



Calculamos las frecuencias de oscilación cerca del equilibrio vertical.

sol. de equilibrio

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= -\ell \\ \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{equil.}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{\ell^2}\left(gz - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right)x$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{\ell^2}\left(gz - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right)\cdot y$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{\ell^2}\left(gz - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right)\cdot z$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x + \underbrace{O(\text{cuadrático})}_{}$$

$x^2, y^2, z^2, x\dot{x},$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{\ell}y + O(\text{cuad})$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{\ell^2}g(-\ell^2) + O(\text{cuad}) = O(\text{cuad})$$

$$\omega = \sqrt{g/\ell}$$

sist. lin

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y$$

$$\ddot{z} = 0$$

El marco K se desplaza sobre la superficie de la tierra c.r.a. K

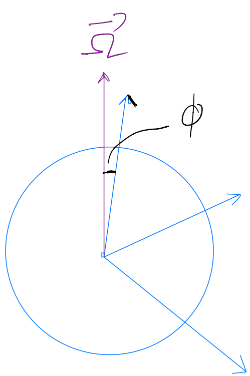
Despreciamos fuerza centrífuga y fuerza de desplazamiento inercial.

$$-2m\,\vec{\Omega}\times\mathring{Q}$$

$$\mathring{Q} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ 0\end{pmatrix}$$ cerca del equilibrio.

$$\vec{\Omega} = |\vec{\Omega}|\cos\phi\,\vec{E}_z + |\vec{\Omega}|\operatorname{sen}\phi\,\vec{E}_x$$

$$= |\vec{\Omega}|\begin{pmatrix}+\operatorname{sen}\phi\\ 0\\ \cos\phi\end{pmatrix}$$



$$-2m\,\vec{\Omega}\times\mathring{Q} = -2m\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ |\Omega|\operatorname{sen}\phi & 0 & |\Omega|\cos\phi\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix}$$

$$= -2m\left(-\hat{\imath}\,|\Omega|\cos\phi\,\dot{y} + \hat{\jmath}\,\dot{x}|\Omega|\cos\phi + \hat{k}\,\dot{y}|\Omega|\operatorname{sen}\phi\right)$$

$$-2m\,\vec{\Omega}\times\mathring{Q} = -2m\begin{pmatrix}-\dot{y}|\Omega|\cos\phi\\ \dot{x}|\Omega|\cos\phi\\ \dot{y}|\Omega|\operatorname{sen}\phi\end{pmatrix}$$

Cerca del polo norte

$\operatorname{sen}\phi \simeq 0$ $\quad$ $|\Omega|\cos\phi$ $\quad$ //

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + 2\,\Omega_z\,\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2\,\Omega_z\,\dot{x}$$

$$\ddot{z} = 0 + \dot{y}\,\Omega_x = 0$$

À la Arnold

$z(t)\in\mathbb{C}$, $\quad z(t) = x(t) + i\,y(t)$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) - 2i\,\Omega_z \dot{z}(t)$$

$$\ddot{z}(t) + 2i\,\Omega_z \dot{z}(t) + \omega^2 z(t) = 0$$

$$z(t) = e^{\mu t}$$

$$\mu^2 + 2i\,\Omega_z \mu + \omega^2 = 0$$

$$\mu = \frac{-2i\Omega_z \pm \sqrt{-4\Omega_z^2 - 4\omega^2}}{2} \simeq -i(\Omega_z \pm \omega)$$

$\omega >> \Omega_z$

↳ mucho más grande que

$$z(t) = C_1 e^{-i(\Omega_z+\omega)t} + C_2 e^{-i(\Omega_z-\omega)t}$$

$$= e^{-i\Omega_z t}\left(C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{+i\omega t}\right)$$

Péndulo visto desde arriba.