Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM IIMAS

Renato Calleja, 29 de enero de 2025

Transformaciones canónicas

Una transformación canónica es una tranformación lineal,

$X = U y$ $\quad U$ matriz de $2n \times 2n$

$$U^T J U = J, \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$J J = -I_{2n}$ (ojo) J es una matriz simpléctica.

$J^T J = I_{2n}$, $J^T = -J$

Las matrices U se llaman simplécticas.

Introducimos una forma bilineal en $\mathbb{R}^{2n}$

Sea $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$

$$[v, w] = \langle v, Jw \rangle = v^T J w$$

Propiedades de $[\cdot,\cdot]$.

(i) antisimétrica

$$[v, w] = -[w, v]$$

$$v^T J w = w^T J^T v = -w^T J v = -[w, v].$$

(ii) no-degenerada.

$[v, w] = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^{2n} \implies v = 0$

$v^T J w = 0 \implies v = 0$ ya que $\det(J) = 1$

Transformaciones canónicas

Una transformación canónica es una tranformación lineal,

$x = Uy$ $\quad$ U matriz de $2n \times 2n$

$$U^T J U = J, \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que las transformaciones canónicas preservan la forma bilineal.

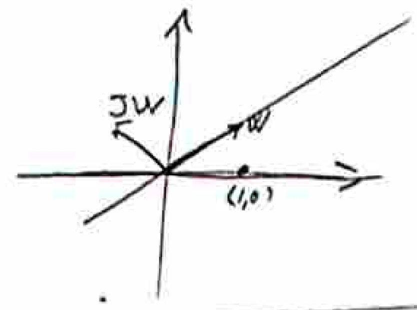
$y \mapsto x = Uy$, $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$

$v' = Uv$, $w' = Uw$

$[v', w'] = (v')^T J w' = v^T U^T J U w = v^T J w = [v, w]$

Decimos que $v \perp w$ "v es ortogonal a w con respecto a la forma simpléctica, $[\cdot, \cdot]$" si $[v, w] = 0$ $\quad$ $0 = v^T J w$

$\mathbb{R}^2$



$0 = v^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v^T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Si E es un subespacio lineal de V (simpléctico), definimos

$$E^{\perp} = \{ w \in V \mid [v, w] = 0, \forall v \in E \}$$

Transformaciones canónicas

De esto se sigue que $E^{\perp}$ es un subespacio lineal

y como $v \perp w \Rightarrow w \perp v$

Esto implica que $(E^{\perp})^{\perp} \supset E$

$$a \in E \Rightarrow \underset{[a,b]=0}{b \in E^{\perp}} \Rightarrow a \in (E^{\perp})^{\perp}$$

Por el hecho de que $[\cdot,\cdot]$ es no degenerada,

tenemos que $\dim E + \dim E^{\perp} = \dim V$

$\dim E = k \quad \dim E^{\perp} = 2n-k$

$\dim (E^{\perp})^{\perp} + \dim E^{\perp} = 2n$

$$\Rightarrow \quad (E^{\perp})^{\perp} = E$$

La def. de ortogonalidad en geo. simpléctica es distinta a geometría euclidiana.

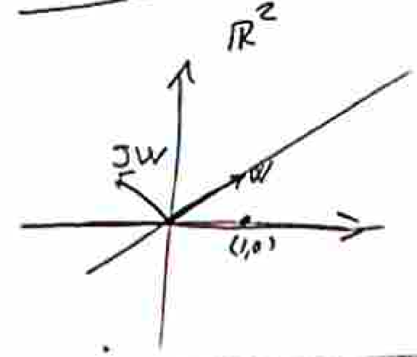
∴ Todo vector $v \in V$ es ortogonal a sí mismo.

$[v,v] = -[v,v] \Rightarrow [v,v] = 0.$

$\Rightarrow$ Si $\dim E = 1$, entonces $E \subset E^{\perp}$.

Decimos que $v \perp w$ "v es ortogonal a w con respecto a la forma simpléctica, $[\cdot,\cdot]$"

si $[v,w]=0 \qquad 0 = v^T J w$



$$0 = v^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v^T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Si E es un subespacio lineal de V (simpléctico), definimos

$$E^{\perp} = \{ w \in V \mid [v,w] = 0,\ \forall v \in E \}$$