Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS

Renato Calleja, 28 de mayo de 2025

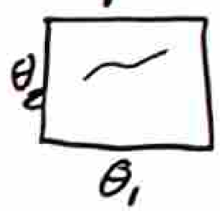
Teorema de Nash-Moser

John Nash (1954, 1956)

Encajes isométricos.

"Toda variedad Riemanniana se puede encajar isométricamente en un espacio euclideano."

Toro plano



$$\simeq \underbrace{\overset{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}{\overset{\|}{S^1}} \times \overset{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}{\overset{\|}{S^1}}}_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{K} \mathbb{R}^3$$

$K \in C^1$

Jürgen Moser (1966)

Demuestra que el método de Nash se puede aplicar a problemas más generales (EDP elípticas)

... Teoría KAM con regularidad finita.

Otras versiones. Gromov, Hamilton, Hörmander, Schwartz, Sergeraert, Zehnder.

Teoremas de la función implícita generalizados

TFI en escalas de espacios de Banach y operadores de suavizamiento.

El paso de Newton pierde derivadas y los operadores suavizantes las restauran.

Escala de espacios de Banach

Familia uno-paramétrica

$\mathcal{X}^r$ espacio de Banach $\forall r$, $0 \le r' \le r \le \infty$

$$\mathcal{X}^0 \supseteq \mathcal{X}^{r'} \supseteq \mathcal{X}^r \supseteq \mathcal{X}^\infty$$

con normas que satisfacen que

$$\|g\|_{\mathcal{X}^r} \le \|g\|_{\mathcal{X}^{r'}}$$

$g \in \mathcal{X}^r$ y $0 \le r' \le r$

Teorema de Nash-Moser

Operadores suavizantes

Def
Sea EEB $\{\mathcal{X}^r\}$, decimos que $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una familia de operadores suav. (O.S.) si,

i) $\lim_{t\to\infty} \|(S_t - I_d)u\|_{\mathcal{X}^0} = 0$, $\forall u \in \mathcal{X}^0$

ii) $\|S_t u\|_{\mathcal{X}^m} \leq C t^{m-l} \|u\|_{\mathcal{X}^l}$, $0 \leq l \leq m$
para toda $u \in \mathcal{X}^l$.

iii) $\|(I_d - S_t)u\|_{\mathcal{X}^l} \leq C t^{-(m-l)} \|u\|_{\mathcal{X}^m}$
$0 \leq l \leq m$ y $u \in \mathcal{X}^m$.

Ejemplos
- funciones analíticas con bandas alrededor del toro (KAM)
- espacios de Sobolev.
- espacios de funciones C^r (norma del supremo)

Desigualdades de interpolación

Prop
Sea $f \in \mathcal{X}^s$, $r \leq s$, $0 \leq \theta \leq 1$ Entonces

$$\|f\|_{\mathcal{X}^{(\theta r + (1-\theta)s)}} \leq C \|f\|_{\mathcal{X}^r}^{\theta} \cdot \|f\|_{\mathcal{X}^s}^{1-\theta}$$

Dem
$t > 0$ y
$f = S_t f + (I_d - S_t) f$

$$\|f\|_{\mathcal{X}^{(\theta r + (1-\theta)s)}} \leq \|S_t f\|_{\mathcal{X}^{\theta r + (1-\theta)s}} + \|(I_d - S_t) f\|_{\mathcal{X}^{\theta r + (1-\theta)s}}$$
$$\leq C t^{\theta r + (1-\theta)s - s} \|f\|_{\mathcal{X}^s} + C t^{-(r - (\theta r + (1-\theta)s))} \|f\|_{\mathcal{X}^r}$$

Voy a cálculo 1 $g(t) = A t^{\alpha} + B t^{\beta}$
minimizamos g con $\alpha = \theta r - \theta s$, $\beta = -(r - (\theta r + (1-\theta)s))$
$\alpha - \beta = r - s$, $A = \|f\|_{\mathcal{X}^s}$, $B = \|f\|_{\mathcal{X}^r}$
el minimizante es $t^* = \left(-\frac{\beta B}{A\alpha}\right)^{1/(\alpha-\beta)}$
$g(t^*) = C \|f\|_{\mathcal{X}^s}^{1-\theta} \|f\|_{\mathcal{X}^r}^{\theta}$.

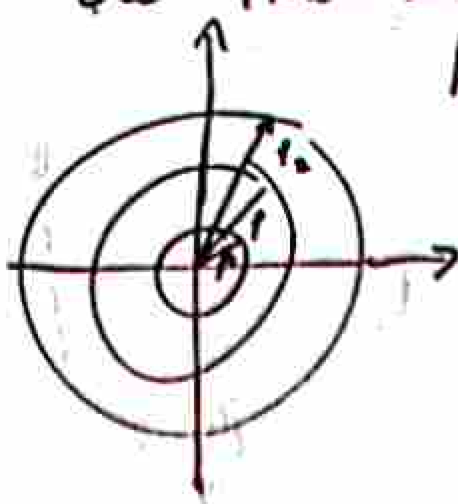
Desigualdades de interpolación

Prop

Sea $f \in \mathcal{H}^s$, $r \le s$, $0 \le \theta \le 1$ Entonces

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{(\theta r + (1-\theta)s)}} \le C \, \|f\|^{\theta}_{\mathcal{H}^r} \cdot \|f\|^{1-\theta}_{\mathcal{H}^s}$$

La demostración en los espacios $\mathcal{A}_\rho$ coincide con el teorema de los tres círculos de Hadamard.



$$\|f\|_\rho = M(\rho)$$

$$\rho_1 < \rho < \rho_2$$

$$M(\rho) \le M(\rho_1)^{\alpha} M(\rho_2)^{1-\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\log(\rho_2/\rho)}{\log(\rho_2/\rho_1)}$$

Teorema de Nash-Moser

Teorema

Sea $\alpha > 0$, $p > \alpha$ y $\mathcal{X}^q$ $p-\alpha \le q \le p+13\alpha$ una E.E.B. con suavizantes. $\mathcal{B}_q$ bola unitaria en $\mathcal{X}^q$

$\tilde{\mathcal{B}}_q = u_0 + \mathcal{B}_q$ bola trasladada, $u_0 \in \mathcal{X}^q$

y $\mathcal{B}(\mathcal{X}^q, \mathcal{X}^{q-\alpha})$ espacio de operadores lineales acotados de $\mathcal{X}^q$ a $\mathcal{X}^{q-\alpha}$

Sea $\mathcal{E} = \mathcal{E}[u]$ con $\mathcal{E} : \tilde{\mathcal{B}}_q \to \mathcal{B}(\mathcal{X}^q, \mathcal{X}^{q-\alpha})$

y sea $\eta = \eta[u]$ con $\eta : \tilde{\mathcal{B}}_q \to \mathcal{B}(\mathcal{X}^q, \mathcal{X}^{q-\alpha})$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_q$ y E es la función que se obtiene al evaluar el funcional $\mathcal{E}$ en u, $E = \mathcal{E}[u]$

y $\Delta = -\eta[u]E$

i) $\mathcal{E}[\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \mathcal{X}^q] \subset \mathcal{X}^q$, $p-\alpha \le q \le p+13\alpha$

ii) $\mathcal{E}|_{\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \mathcal{X}^q} : \tilde{\mathcal{B}}^q \cap \mathcal{X}^q \longrightarrow \mathcal{X}^2$ tiene dos derivadas de Fréchet continuas para $p-\alpha \le q \le p+13\alpha$.

(iii) $\|\Delta\|_{\mathcal{X}^{q-\alpha}} \le C\|E\|_{\mathcal{X}^q}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_q$

(iv) Estimaciones cuadráticas $\|D\mathcal{E}[u]\Delta + E\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}} \le C\|E\|^2_{\mathcal{X}^p}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_p$

(v) $\|E\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \le C(1+\|u\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}})$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_{q+13\alpha}$

Entonces, si $u_0 \in \mathcal{B}_{p+13\alpha}$ tal que $\|E_0\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}}$ es suf. pequeña, existe $u_e \in \mathcal{X}^p$, tal que $\mathcal{E}[u_e] = 0$

$$\|u_e - u_0\|_{\mathcal{X}^p} \le C\|E_0\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}}$$

Teorema de Nash-Moser

Teorema
Sea $\alpha > 0$, $p > \alpha$ y $\mathcal{X}^q$ $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$ una E.E.B. con suavizantes. $\mathcal{B}_q$ bola unitaria en $\mathcal{X}^q$
$\tilde{\mathcal{B}}_q = u_0 + \mathcal{B}_q$ bola trasladada, $u_0 \in \mathcal{X}^q$
y $\mathcal{B}(\mathcal{X}^q, \mathcal{X}^{q-\alpha})$ espacio de operadores lineales acotados de $\mathcal{X}^q$ a $\mathcal{X}^{q-\alpha}$
Sea $\mathcal{E} = \mathcal{E}[u]$ con $\mathcal{E} : \tilde{\mathcal{B}}_q \to \mathcal{B}(\mathcal{X}^q, \mathcal{X}^{q-\alpha})$
y sea $\eta = \eta[u]$ con $\eta : \tilde{\mathcal{B}}_q \to \mathcal{B}(\mathcal{X}^q, \mathcal{X}^{q-\alpha})$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_q$ y E es la función que se obtiene al evaluar el funcional $\mathcal{E}$ en u, $E = \mathcal{E}[u]$
y $\Delta = -\eta[u]E$

i) $\mathcal{E}[\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \mathcal{X}^q] \subset \mathcal{X}^q$, $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$

ii) $\mathcal{E}|_{\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \mathcal{X}^q} : \tilde{\mathcal{B}}^q \cap \mathcal{X}^q \to \mathcal{X}^2$ tiene dos derivadas de Fréchet continuas para $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$.

(iii) $\|\Delta\|_{\mathcal{X}^{q-\alpha}} \leq C\|E\|_{\mathcal{X}^q}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_q$

(iv) Estimaciones cuadráticas $\|D\mathcal{E}[u]\Delta + E\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}} \leq C\|E\|^2_{\mathcal{X}^p}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_p$

(v) $\|E\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \leq C(1 + \|u\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}})$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_{q+13\alpha}$

Dem
J.T. Schwartz, E. Zehnder
Dados $u \in \mathcal{X}^{p+13\alpha}$ y $E = \mathcal{E}[u]$ con $\|E\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}}$ suf. pequeña
queremos construir u_e tal que $\mathcal{E}[u_e] = 0$
Lo hacemos de forma iterativa.
Sean $\mathcal{K} > 1$, $\beta, \gamma, \delta > 0$, $0 < \psi < 1$ reales
Construimos una sucesión $\{u_n\}_{n \geq 0}$

$$u_{n+1} = u_n - S_{t_n} \eta[u_n] E_n$$

método de cuasi Newton.

donde $t_n = e^{\beta \mathcal{K}^n}$ (crece exp exp)

Vamos a demostrar por inducción que

$(p1; n)$ $(u_n - u_0) \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}^p}$

$(p2; n)$ $\|E_n\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}} \leq \psi \cdot \exp(-\gamma \alpha \beta \mathcal{K}^n)$

$(p3; n)$ $1 + \|u_n\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \leq \psi \cdot \exp(\delta \alpha \beta \mathcal{K}^n)$

Teorema de Nash-Moser

Supongamos que $(P1;j)$, $(P2;j)$ y $(P3;j)$ se cumplen para $j<n$.

Veamos que $(P1;n)$ se cumple.

$$\|u_n - u_{n-1}\|_{\chi^p} = \| S_{t_{n-1}} \eta[u_{n-1}] E_{n-1} \|_{\chi^p}$$

$$\leq C e^{2\alpha\beta\chi^{n-1}} \| \underbrace{\eta[u_{n-1}] E_{n-1}}_{\Delta_{n-1}} \|_{\chi^{p-2\alpha}}$$

$$\leq C e^{2\alpha\beta\chi^{n-1}} C \| E_{n-1} \|_{\chi^{p-\alpha}}$$

$$\leq C\Psi e^{\alpha\beta\chi^{n-1}(2-\gamma)}$$

Ponemos que $\gamma > 2 \Rightarrow \{u_n\}$ es de Cauchy $u_n \to u \in \chi^p$

i) $\xi[\breve{B}_q \cap \chi^q] \subset \chi^q$, $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$

ii) $\xi|_{\tilde{B}_q \cap \chi^q} : \tilde{B}^q \cap \chi^q \to \chi^2$ tiene dos derivadas de Fréchet continuas para $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$.

(iii) $\|\Delta\|_{\chi^{q-\alpha}} \leq C\|E\|_{\chi^q}$, $u \in \tilde{B}_q$

(iv) Estimaciones cuadráticas $\|D\xi[u]\Delta + E\|_{\chi^{p-\alpha}} \leq C\|E\|^2_{\chi^p}$, $u \in \tilde{B}_p$

(v) $\|E\|_{\chi^{q+13\alpha}} \leq C(1+\|u\|_{\chi^{p+13\alpha}})$, $u \in \tilde{B}_{q+13\alpha}$

Teorema de Nash-Moser

Supongamos que $(P1;j)$, $(P2;j)$ y $(P3;j)$ se cumplen para $j<n$.

Veamos que $(P1;n)$ se cumple.

$$\|u_n-u_{n-1}\|_{\mathcal{X}^p} = \|S_{t_{n-1}}\eta[u_{n-1}]E_{n-1}\|_{\mathcal{X}^p}$$
$$\le C e^{2\alpha\beta\mathcal{X}^{n-1}}\|\underbrace{\eta[u_{n-1}]E_{n-1}}_{=\Delta_{n-1}}\|_{\mathcal{X}^{p-2\alpha}}$$
$$\le C e^{2\alpha\beta\mathcal{X}^{n-1}} C\|E_{n-1}\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}}$$
$$\le C\Psi e^{\alpha\beta\mathcal{X}^{n-1}(2-\gamma)}$$

Ponemos que $\gamma>2 \Rightarrow \{u_n\}$ es de Cauchy, $u_n \to u \in \mathcal{X}^p$

i) $\mathcal{E}[\tilde{B}_q \cap \mathcal{X}^q] \subset \mathcal{X}^q$, $p-\alpha \le q \le p+13\alpha$

ii) $\mathcal{E}|_{\tilde{B}_q\cap\mathcal{X}^q} : \tilde{B}^q \cap \mathcal{X}^q \to \mathcal{X}^2$ tiene dos derivadas de Fréchet continuas para $p-\alpha \le q \le p+13\alpha$.

(iii) $\|\Delta\|_{\mathcal{X}^{q-\alpha}} \le C\|E\|_{\mathcal{X}^q}$, $u\in\tilde{B}_q$

(iv) Estimaciones cuadráticas $\|D\mathcal{E}[u]\Delta + E\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}} \le C\|E\|^2_{\mathcal{X}^p}$, $u\in\tilde{B}_p$

(v) $\|E\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \le C(1+\|u\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}})$, $u\in\tilde{B}_{q+13\alpha}$

Dem

$$\|u_n-u_0\|_{\mathcal{X}^p} \le C\Psi\frac{e^{\alpha\beta(\mathcal{X}-1)(2-\gamma)}}{1-e^{\alpha\beta(\mathcal{X}-1)(2-\gamma)}}$$

Si $\gamma>2$ y β suf grande $\|u_n-u_0\|_{\mathcal{X}^p}\le C\Psi$

$\Rightarrow (P1;n)$

Vamos a demostrar por inducción que

$(P1;n)$ $(u_n-u_0)\in B_{\mathcal{X}^p}$

$(P2;n)$ $\|E_n\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}} \le \Psi\cdot\exp(-\gamma\alpha\beta\mathcal{X}^n)$

$(P3;n)$ $1+\|u_n\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \le \Psi\cdot\exp(\delta\alpha\beta\mathcal{X}^n)$

Teorema de Nash-Moser

Supongamos que $(P1;j), (P2;j)$ y $(P3;j)$

se cumplen para $j<n$.

Veamos que $(P2;n)$ se cumple.

$$E_n = E_n - E_{n-1} + D\mathcal{E}[u_{n-1}](S_{t_{n-1}}\eta[u_{n-1}]E_{n-1})$$
$$- D\mathcal{E}[u_{n-1}]\eta[u_{n-1}]E_{n-1} + E_{n-1}$$
$$+ D\mathcal{E}[u_{n-1}](I - S_{t_{n-1}})\eta[u_{n-1}]E_{n-1}$$

Utilizando desigualdades de interpolación y las propiedades de S etc.

$$\|E_{n-1}\|^2_{\chi^p} \leq C\|E_{n-1}\|^{26/14}_{\chi^{p-\alpha}} \|E_{n-1}\|^{2/14}_{\chi^{p+13\alpha}} \Rightarrow (P2;n)$$

i) $\mathcal{E}[\mathcal{B}_q \cap \chi^q] \subset \chi^q,\ p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$

ii) $\mathcal{E}|_{\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \chi^q} : \tilde{\mathcal{B}}^q \cap \chi^q \to \chi^2$ tiene dos derivadas de Fréchet continuas para $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$.

(iii) $\|\Delta\|_{\chi^{q-\alpha}} \leq C\|E\|_{\chi^q},\ u \in \mathcal{B}_q$

(iv) Estimaciones cuadráticas $\|D\mathcal{E}[u]\Delta + E\|_{\chi^{p-\alpha}} \leq C\|E\|^2_{\chi^p},\ u \in \tilde{\mathcal{B}}_p$

(v) $\|E\|_{\chi^{p+13\alpha}} \leq C(1+\|u\|_{\chi^{p+13\alpha}}),\ u \in \tilde{\mathcal{B}}_{q+13\alpha}$

Teorema de Nash-Moser

Supongamos que $(P1;j), (P2;j)$ y $(P3;j)$ se cumplen para $j<n$.

Veamos que $(P2;n)$ se cumple.

$$E_n = E_n - E_{n-1} + D\xi[u_{n-1}]\left(S_{t_{n-1}}\eta[u_{n-1}]E_{n-1}\right) - D\xi[u_{n-1}]\eta[u_{n-1}]E_{n-1} + E_{n-1}$$
$$+ D\xi[u_{n-1}](I - S_{t_{n-1}})\eta[u_{n-1}]E_{n-1}$$

Utilizando desigualdades de interpolación y las propiedades de suav.

$$\|E_{n-1}\|^2_{\mathcal{X}^p} \leq C\|E_{n-1}\|^{26/14}_{\mathcal{X}^{p-\alpha}} \|E_{n-1}\|^{2/14}_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \Rightarrow (P2;n)$$

i) $\xi[\breve{\mathcal{B}}_q \cap \mathcal{X}^q] \subset \mathcal{X}^q$, $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$

ii) $\xi|_{\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \mathcal{X}^q} : \mathcal{B}^q \cap \mathcal{X}^q \to \mathcal{X}^2$ tiene dos derivadas de Fréchet continuas para $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$.

→(iii) $\|\Delta\|_{\mathcal{X}^{q-\alpha}} \leq C\|E\|_{\mathcal{X}^q}$, $u \in \mathcal{B}_q$

(iv) Estimaciones cuadráticas $\|D\xi[u]\Delta + E\|_{\mathcal{X}^{p-\alpha}} \leq C\|E\|^2_{\mathcal{X}^p}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_p$

(v) $\|E\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \leq C(1+\|u\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}})$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_{q+13\alpha}$

Dem

La desigualdad $(P2;n)$ se satisface cuando

$$C\left(\psi e^{2\alpha\beta\chi^{n-1}(2-\delta)} + \psi^2 e^{\alpha\beta\chi^{n-1}(\delta/7 - 13/7\,\gamma)} + \psi e^{\alpha\beta\chi^{n-1}(\delta-R)}\right) \leq \psi e^{-\delta\alpha\beta\chi^n}$$

Tomamos β suf. grande ψ suf pequeña

y
$$\gamma(2-\chi) > 4$$
$$\gamma(26-14\chi) > 2\delta \quad \text{tenemos } (P2;n)$$
$$12 - \gamma\chi > \delta$$

Para demostrar $(P3;n)$

$$1 + \|u_n\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \leq 1 + C\psi\sum_{j=1}^{n-1} e^{\alpha\beta(1+\delta)\chi^j}$$

$$\Rightarrow (1 + \|u_n\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}})e^{-\delta\alpha\beta\chi^n} \leq e^{-\delta\alpha\beta\chi^n} + C\psi\sum_{j=1}^{n-1} e^{\alpha\beta\chi^j(1+\delta-\chi)}$$

Para demostrar

$(P3;n)$ $1 + \|\hat{u}_n\|_{\mathcal{X}^{p+13\alpha}} \leq \psi \cdot \exp(\delta\alpha\beta\chi^n)$

tomamos que $\delta > 1/(\chi-1)$ $(1+\delta-\chi\delta) < 0$

Consideramos $\chi = 4/3$, $\gamma = 61/10$, $\delta = 7/2$, $\delta > \frac{1}{\chi-1}$

Se satisfacen todas las desigualdades y se completa la prueba.//

Teorema de Nash-Moser

Supongamos que $(P1;j)$, $(P2;j)$ y $(P3;j)$

se cumplen para $j < n$.

Veamos que $(P2;n)$ se cumple.

$$\|E_n\|_{\chi^{p-\alpha}} \leq \Psi \exp\left(-\gamma \alpha \beta \kappa^n\right)$$

se va a cero superexponencialmente

$$\|E_n\|_{\chi^{p-\alpha}} \longrightarrow 0 \quad \mathcal{E}[u_n] \to 0$$

i) $\mathcal{E}[\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \chi^q] \subset \chi^q$, $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$

ii) $\mathcal{E}|_{\tilde{\mathcal{B}}_q \cap \chi^q} : \tilde{\mathcal{B}}^q \cap \chi^q \to \chi^2$ tiene dos derivadas de Fréchet continuas para $p-\alpha \leq q \leq p+13\alpha$.

(iii) $\|\Delta\|_{\chi^{q-\alpha}} \leq C\|E\|_{\chi^q}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_q$

(iv) Estimaciones cuadráticas $\|D\mathcal{E}[u]\Delta + E\|_{\chi^{p-\alpha}} \leq C\|E\|^2_{\chi^p}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_p$

(v) $\|E\|_{\chi^{p+13\alpha}} \leq C(1+\|u\|_{\chi^{p+13\alpha}})$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_{q+13\alpha}$