Introducción a la Mecánica Analítica

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS

Renato Calleja, 28 de agosto de 2024

Método de Poincaré - Lindstedt

(Anders Lindstedt, Henri J. Poincaré)

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, $x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + \bar{A}e^{-i\omega_0 t} = Ae^{i\omega_0 t} + c.c.$

$= \tilde{A}\cos(\omega_0 t) + \tilde{B}\sin(\omega_0 t)$

$\ddot{q} = -\omega_0^2 q + \varepsilon q^3$ $\qquad -\omega_0^2 q + \varepsilon f(q)$

$-q + \varepsilon q^3 = q(-1 + \varepsilon q^2)$

Si $|\varepsilon| << 1$ sólo hay 1 raíz

Proponemos una solución de la forma

$$q_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t)\varepsilon^k$$

y pedimos que $q_k(t)$ sean acotadas. Porque si $|\varepsilon| << 1$ entonces la solución servirá en $\varepsilon \in (-\varepsilon^*, \varepsilon^*)$.

$q_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica, analítica.

También hay que reparametrizar el tiempo $s = t(\omega_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \dots)$ $s(t)$

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta)$

$\dot{X} = f(X) = f_1 X + \dots$

A primer orden tenemos

$\dot{X} = f_1 X$

$\ddot{q}_\varepsilon(t) = -\omega_0^2 q_\varepsilon(t) + \varepsilon q_\varepsilon^3(t)$

$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{q}_k(t)\varepsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} -\omega_0^2 q_k(t)\varepsilon^k + \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k(t)\varepsilon^k\right)^3$

$\varepsilon(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots)^3$

$\ddot{q} = \frac{d^2 q}{dt^2}$

En la nueva reparametrización

$\left(\omega_0^2 + 2\varepsilon(\omega_1\omega_0) + O(\varepsilon^3)\right)\left(\frac{d^2 q_0}{ds^2} + \varepsilon\frac{d^2 q_1}{ds^2} + \varepsilon^2\frac{d^2 q_2}{ds^2} + O(\varepsilon^3)\right)$

↳ los términos polinomiales se pueden calcular usando productos de Cauchy.

$= -\omega_0^2(q_0(s) + \varepsilon q_1(s) + \varepsilon^2 q_2(s) + O(\varepsilon^3))$

$+ \varepsilon q_0^3(s) + \varepsilon^2(3q_1 q_0^2) + \varepsilon^3(3q_2 q_0^2 + 3q_1^2 q_0) + O(\varepsilon^4)$

Método de Poincaré - Lindstedt

(Anders Lindstedt, Henri J. Poincaré)

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \ , \quad x(t) = A e^{i\omega_0 t} + \bar{A} e^{-i\omega_0 t} = A e^{i\omega_0 t} + c.c.$$

$$= \tilde{A}\cos(\omega_0 t) + \tilde{B}\sin(\omega_0 t)$$

$$\text{sen}\left(\sum q_k(t)\varepsilon^k\right) = \sum s_k(t)\varepsilon^k$$

$$\ddot{q} = -\omega_0^2 q + \varepsilon q^3$$

Orden ε^0

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_0}{ds^2} = -\omega_0^2 q_0 \ , \quad q_0(s) = Ce^{is} + \bar{C}e^{-is}$$

Orden ε^1

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_1}{ds^2} + 2(\omega_1\omega_0)\frac{d^2 q_0}{ds^2} = -\omega_0^2 q_1 + q_0^3$$

(conocido) (conocido)

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_1}{ds^2} = -\omega_0^2 q_1 - 2\omega_1\omega_0 \frac{d^2 q_0}{ds^2} + \overbrace{q_0^3}^{f_1(\omega_0, q_0)}$$

$$= -\omega_0^2 q_1 + 2\omega_1\omega_0\left(Ce^{is} + \bar{C}e^{-is}\right)$$

$$+ \left(C^3 e^{3is} + 3C^2\bar{C}e^{is} + 3C\bar{C}^2 e^{-is} + \bar{C}^3 e^{-3is}\right)$$

Tenemos ω_1 por determinar

$$\frac{2\omega_1}{\omega_0}\left(Ce^{is} + \bar{C}e^{-is}\right) + \frac{3}{\omega_0^3}\left(C^2\bar{C}e^{is} + C\bar{C}^2 e^{-is}\right) = 0$$

$$C|C|^2 + \bar{C}|C|^2$$

$$\omega_1 = -\frac{3}{2\omega_0}|C|^2 \in \mathbb{R}$$

$$q_1(s) = De^{3is} + \bar{D}e^{-3is}$$

Orden ε^2

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_2}{ds^2} = -\omega_0^2 q_2 + \omega_2\, \text{Polinomio}(\omega_1, \omega_0)\frac{d^2 q_0}{ds^2} + \text{Polinomio}(\omega_1, \omega_0)\frac{d^2 q_1}{ds^2} + 3q_1 q_0^2$$

$f_2(\omega_0, \omega_1, q_0, q_1)$

polinomio trig $e^{is} + c.c.$, $e^{3is} + c.c.$, $e^{5is} + \ldots$

→ Escoger ω_2 para cancelar los términos resonantes y resolver la ec. lineal forzada para $q_2(s)$

$$q_2(s) = Ee^{5is} + \bar{E}e^{-5is} + \text{otros órdenes menores}$$

Orden ε^N

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_N}{ds^2} = -\omega_0^2 q_N + \omega_N\, \text{Polinomio}(\omega_0, \ldots, \omega_{N-1})\frac{d^2 q_0}{ds^2}$$

$$+ f_N(\omega_0, \ldots, \omega_{N-1}, q_0, \ldots, q_{N-1})$$

$$q_N(s) = C_N e^{iNs} + c.c. + \text{órdenes menores (no resonantes)}$$

Método para aproximar la solución.

Verlet (Loup Verlet)

$\ddot{x} = f(X)$, conds. iniciales $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $x(0) = x_0$

$x(t)$ es la solución.

Expansión de Taylor alrededor de $t=0$

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{\ddot{x}(0)}{2}t^2 + \frac{\dddot{x}(0)}{6}t^3 + O(t^4)$$

$X(0) = X_0$

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

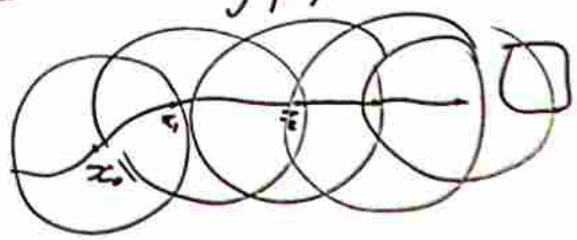
$\ddot{x}(0) = ?$ / $\quad \ddot{x} = f(X) \Rightarrow \ddot{x}(0) = f(X(0))$

$\dddot{x}(0) = ?$ / $\quad \dddot{x} = \frac{d\ddot{x}}{dt} = \frac{d\, f(x(t))}{dt} = f'(X(t))\dot{X}(t)$

$\dddot{x}(0) = f'(X_0)\dot{X}_0$

$\ddddot{x}(0) = ?$ / $\quad \ddddot{x} = \frac{d\dddot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[f'(X(t))\cdot\dot{X}(t)\right] = f''(X(t))\dot{X}(t)^2 + f'(X(t))\cdot\ddot{X}(t)$ ($\ddot{X}(t) = f(X(t))$)

$$X(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{f(x_0)}{2}t^2 + \frac{f'(x_0)\dot{x}_0}{6}t^3 + \frac{f''(x_0)\dot{x}_0^2 + f'(x_0)f(x_0)}{24}t^4 + \dots$$

Podemos escribir todos los ordenes.

El radio de convergencia de $X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$ puede ser muy pequeño.