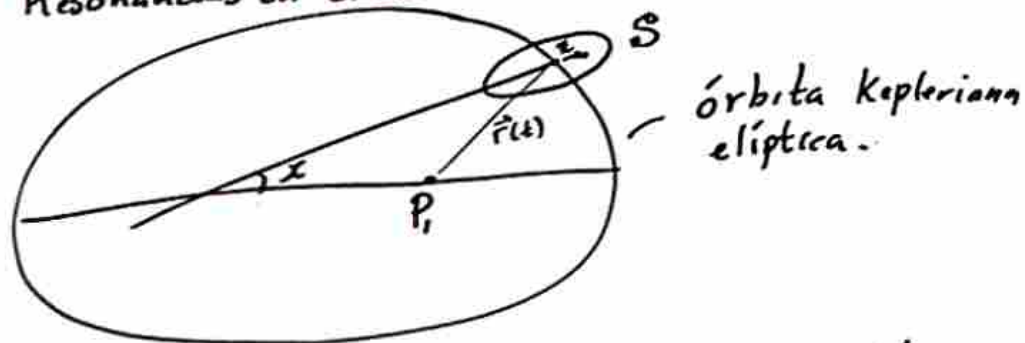


Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

**Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS**

Renato Calleja, 25 de marzo de 2025

Resonancias en el sistema solar



S es un cuerpo rígido de masa m , sujeto a la atracción gravitacional de una masa puntual P_1, M .

$$\tilde{U} = - \int_S \frac{G M m}{|\vec{r}(t) + \vec{x}(t)|} \frac{d\vec{x}}{|S|} \quad \text{Potencial de atracción entre } P_1 \text{ y } S.$$

Desarrollamos $\tilde{U}$ en armónicas esféricas

$$\tilde{U} = -GM \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \frac{1}{r^{i+1}} P_{ij}(\cos \theta) (C_{ij} \cos(j\phi) + S_{ij} \sin(j\phi))$$

(r, ϕ, θ) r - módulo de $\vec{r}(t)$

ϕ - longitud

θ - latitud.

P_{ij} - funciones de Legendre.

Legendre

$$P_{ij}(\sin \theta) = \cos(j\theta) \sum_{k=1}^n T_{ijk} \sin^{i-j-2k} \theta$$

$$n = \left\lfloor \frac{i-j}{2} \right\rfloor$$

$$T_{ijk} = \frac{(-1)^k (2i-2k)!}{2^i k! (i-k)! (i-j-2k)!}$$

Para satélites como la Luna $\tilde{U}_2$ es suficiente

$$\tilde{U}_2 = -\frac{GMm}{r} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 [C_{20} P_2(\sin \theta) + C_{22} P_{22}(\sin \theta) \cos 2\phi]$$

P_2 es el polinomio de Legendre de 2º orden.

$$C_{20} = \frac{1}{2} \frac{1}{m R_e^2} (I_1 + I_2 - 2I_3) \quad \left(I_i \text{ momentos principales de inercia de } S \right)$$

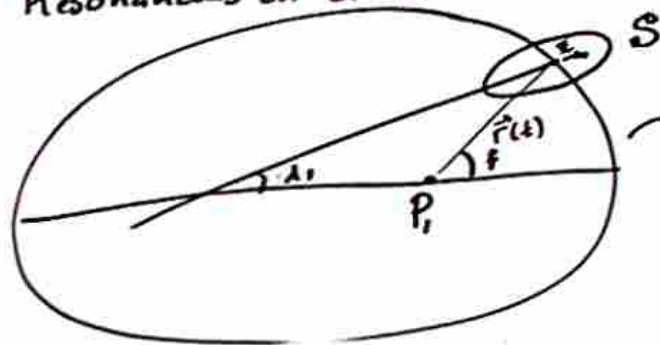
$$C_{22} = \frac{1}{4} \frac{1}{m R_e^2} (I_2 - I_1)$$

$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ son las coords del vec. unitario orientado hacia P_1 en el marco del cuerpo.



$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \cos \phi \cos \theta & P_2(\sin \theta) &= \frac{2\tilde{z}^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}{2} \\ \tilde{y} &= \sin \phi \cos \theta & P_{22}(\sin \theta) \cos 2\phi &= \frac{2}{5} (\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) \\ \tilde{z} &= \sin \theta \end{aligned}$$

Resonancias en el sistema solar



órbita Kepleriana
elíptica.

f - anomalía verdadera

$R_1(\alpha), R_2(\alpha), R_3(\alpha)$ rotaciones con respecto al eje corresp al índice.

Si f es la anomalía verdadera, de S en la órbita,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = R_3(\alpha) R_1(J) R_3(g) R_1(k) R_3(h) \begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{pmatrix}$$

A finales del s. XVII G. D. Cassini

3 leyes del movimiento de la luna

$$(J=K=0, \quad \alpha=l=f=h=0)$$



- (1) La Luna rota alrededor de su eje principal en una resonancia sincrónica.
- (2) El eje de rotación y la órbita normal forman un ángulo constante ($k = \text{cte}$)
- (3) El eje de rotación, la normal a la órbita y la normal a la eclíptica están en el mismo plano.

Para satélites como la Luna $\tilde{U}_2$ es suficiente

$$\tilde{U}_2 = -\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 I_3 \cos(2\lambda_1 - 2f(t))$$

Podemos escribir un sistema Hamiltoniano.

$$H_0(\Lambda_1, \lambda_1, t) = \frac{\Lambda_1^2}{2I_3} - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 I_3 \cos(2\lambda_1 - 2f(t))$$

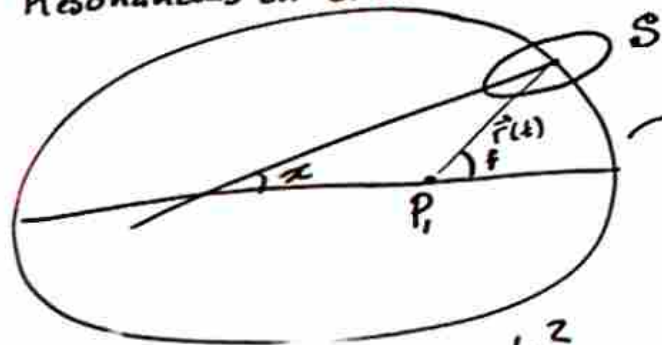
f y r son funciones periódicas (dependen de t)

$\Rightarrow H_0$ depende explícitamente de t .

$\Rightarrow H_0$ no se conserva.

Cambio de variables $y = \frac{\Lambda_1}{\sqrt{I_3}}, \quad x = \lambda_1$

Resonancias en el sistema solar



órbita Kepleriana

elíptica.

f - anomalía verdadera

$$H(y, x, t) = \frac{y^2}{2} - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \cos(2x - 2f(t))$$

H depende del tiempo, de manera periódica.

Espacio fase

$$x \in \mathbb{T}, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}$$

$$(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \text{cilindro.}$$

$$\alpha = y dx, \Omega = d\alpha = dy \wedge dx$$

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, \Omega)$$

var simpléctica



$$\alpha = -dH = -y dy - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin(2x - 2f(t)) dx$$

$$X = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\alpha = i_X \Omega = dy(X) dx - dx(X) dy = B dx - A dy$$

$$A = y, B = -\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin(2x - 2f(t))$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin(2x - 2f(t))$$

$$d(i_X \Omega) = d(-y dy - \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin(2x - 2f(t)) dx) = 0$$

$$\mathcal{L}_X \Omega = d(i_X \Omega) + i_X d\Omega = 0$$

$\Rightarrow \varphi_t$ flujo de X es simpléctico.

$$(\varphi_t)^* \Omega = \Omega$$



En el espacio fase no hay atractores