# Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

## Posgrado en ciencias matemáticas UNAM IIMAS

**Renato Calleja, 25 de febrero de 2025**

## Corchete de Poisson

**Lema**

El corchete de Poisson satisface las siguientes propiedades, $F, G, H \in C^\infty$

·) $\{F, G\} = -\{G, F\}$

··) $\{\{F,G\}, H\} + \{\{G,H\}, F\} + \{\{H,F\},G\} = 0$ (Identidad de Jacobi)

Tarea. Demostrar la identidad de Jacobi (en Mecánica es obligatorio).

$\dot{x} = J \nabla F(x)$ . . . (1) $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

$$X_F = \sum_{j=1}^{n} \left( F_{p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - F_{q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \qquad (OD)$$

$$X_F G = \langle F_p, G_q \rangle - \langle F_q, G_p \rangle = \{F, G\} = -\{G, F\} = -X_G F$$

Es claro que el corchete de Poisson forma una Álgebra de Lie.

### Observación

Recordamos el corchete de Lie

$$[X_F, X_G] = X_F X_G - X_G X_F$$

Resulta que este campo es Hamiltoniano.

De hecho, $[X_F, X_G] = +X_H \ (= +X_{\{F,G\}})$

con $H = \{F, G\}$

Sea $h \in C^\infty$

$$\begin{aligned}
[X_F, X_G]h &= X_F X_G h - X_G X_F h \\
&= X_F \{G,h\} - X_G \{F,h\} \\
&= \{F, \{G,h\}\} - \{G, \{F,h\}\} \\
&= \{\{F,G\},h\} = X_{\{F,G\}} h
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Tarea: Unificar signos}}$

$$-X_H h = \{H,h\} = -\{\{F,G\},h\}$$

$$\left( +\{\{F,G\},h\} = +\{F,\{G,h\}\} - \{G,\{F,h\}\} \right)$$

# Flujo de un sistema Hamiltoniano

**Teorema**

Un campo vectorial

$$X = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

es Hamiltoniano si y sólo si el $\phi^t$ (el flujo correspondiente) es canónico.

**Dem**

[$\Longrightarrow$] Sea $\phi^t$ el flujo de $\dot{x} = f(x)$

$$\frac{d\phi^t}{dt} = f(\phi^t)$$

La matriz jacobiana de $\phi^t_x(x) = \Phi(t,x)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) = F(\phi^t(x))\Phi(t,x)$$

$$F(x) = f_x(x)$$

Como el campo es Hamiltoniano

$$f = J\nabla H \qquad F = J H_{xx}$$

(Notar que $H_{xx}$ es simetrica, $H$ es suave)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi^T J \Phi) = \Phi^T F^T J \Phi + \Phi^T J F \Phi$$

$$= \Phi^T (F^T J + JF)\Phi$$

$$= \Phi^T (H_{xx} J^T J + J J H_{xx})\Phi$$

$$= 0$$

Si $t=0$ $\Phi(0,x) = I_d$

$$\Phi^T(0,x) J \Phi(0,x) = J$$

$$\Phi^T J \Phi = J$$

# Flujo de un sistema Hamiltoniano

Teorema

Un campo vectorial

$$X = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

es Hamiltoniano si y sólo si el $\phi^t$ (el flujo correspondiente) es canónico.

Dem

[$\Leftarrow$] Si $\phi^t(x)$ es canónica $\Rightarrow \Phi(t,x)$ es simplectica.

Sabemos que $F^T J + JF = 0$

$\Rightarrow F^T J^T = JF$ porque $J = -J^T$

$JF$ es simétrica

$JF = Jf_x = g_x \rightarrow \dfrac{\partial g_j}{\partial x_k} = \dfrac{\partial g_k}{\partial x_j}$

Esto implica que localmente podemos definir una función $g$ que satisface esto. Hamiltoniano.

# Derivada exterior

La derivada exterior $d\alpha$ de una $k$-forma $\alpha$ en $\mathcal{M}$ es una $(k+1)$-forma de $\mathcal{M}$ que satisface,

(i) Si $\alpha$ es una función (0-forma), entonces $d\alpha$ es la 1-forma de la derivada $\alpha = f$, $df$

(ii) $d\alpha$ es lineal en $\alpha$

(iii) $d\alpha$ satisface la regla del producto,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

donde $\alpha$ es una $k$-forma y $\beta$ es una 1-forma.

(iv) $d^2 = 0$, es decir, $d(d\alpha) = 0$ $\forall$ $k$-forma $\alpha$.

(v) $d$ es un operador local, i.e., $d\alpha_p$ depende sólo de $\alpha$ restringido a cualquier vecindad de $p$.

Si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{M}$ $\quad d(\alpha|_{\mathcal{U}}) = (d\alpha)|_{\mathcal{U}}$

En cordenadas (localmente) tenemos

$$\alpha_x = \sum a^{i_1 \cdots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\Rightarrow (d\alpha)_x = \sum \left( \sum \frac{\partial a^{i_1 \cdots i_k}}{\partial x_s}(x)\, dx_s \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

También es invariante bajo cambios de coordenadas

$$d(\mathcal{U}^* \alpha) = \mathcal{U}^*(d\alpha)$$

Sea $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$ un mapeo entre variedades.

da lugar a un mapeo "pull-back", $f^*$ que mapea formas en $\mathcal{M}_1$ hacia atrás en formas de $\mathcal{M}$.

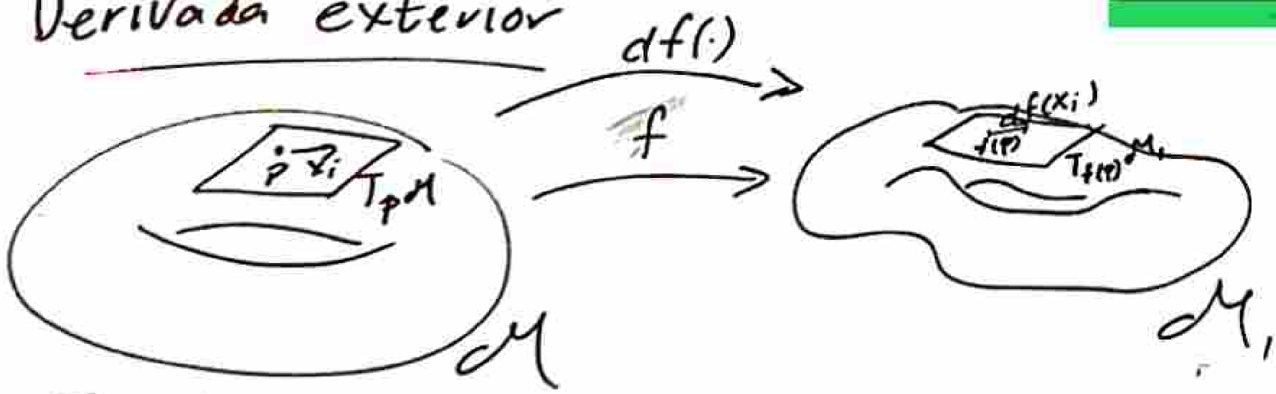
**Def**

Si $\alpha$ es una $k$-forma en $\mathcal{M}_1$ entonces

$$(f^*\alpha)_p (X_1, \dots, X_k) = \alpha_{f(p)}(df(X_1), \dots, df(X_k))$$

$$p \in \mathcal{M} \quad X_i \in T_p\mathcal{M}$$

# Derivada exterior




**Ejemplo**

$$f : \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \to \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2}$$

$$(u,v) \mapsto (e^u \cos v, e^u \sin v) = (x,y)$$

$$\alpha = \underbrace{x^2}_{\alpha_1} dx - \underbrace{e^x}_{\alpha_2} dy$$

$$f^*\alpha = \alpha_1(e^u\cos v, e^u \sin v)\, dx + \alpha_2(e^u \cos v, e^u \operatorname{sen} v)\, dy$$

$$= e^{2u}\cos^2 v \, d(e^u \cos v) + e^{e^u\cos v} d(e^u \operatorname{sen} v)$$

$$= e^{2u}\cos^2 v\,(e^u \cos v\, du - e^u \operatorname{sen} v\, dv)$$

$$+ e^{e^u \cos v}(e^u \operatorname{sen} v\, du + e^u \cos v\, dv)$$

$$= (e^{3u}\cos^3 v + e^{e^u\cos v + u} \operatorname{sen} v)\, du$$

$$+ (- e^u \operatorname{sen} v + e^u \cos v)\, dv$$

En cordenadas (localmente) tenemos

$$\alpha_x = \sum a^{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\Rightarrow (d\alpha)_x = \sum \left( \sum \frac{\partial a^{i_1\dots i_k}}{\partial x_s}(x)\, dx_s \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

También es invariante bajo cambios de coordenadas.

$$d(U^*\alpha) = U^*(d\alpha)$$

Sea $f : M \to M_1$ un mapeo entre variedades.
da lugar a un mapeo "pull-back", $f^*$
que mapea formas en $M_1$ hacia atrás en formas de $M$.

**Def**

Si $\alpha$ es una k-forma en $M_1$ entonces

$$(f^*\alpha)_p (X_1, \dots, X_k) = \alpha_{f(p)}(df(X_1), \dots, df(X_k))$$

$$p \in M \quad X_i \in T_pM$$