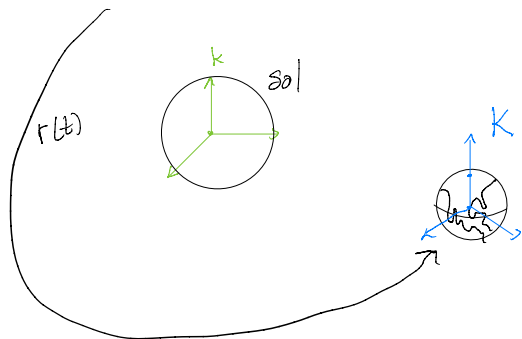


Movimiento traslacional

K marco en movimiento

k marco inercial (fijo)



Teo

Todo movimiento D_t se escribe de forma única como la composición de una

rotación $B_t: K \rightarrow k$ y una

traslación $C_t: k \rightarrow k$

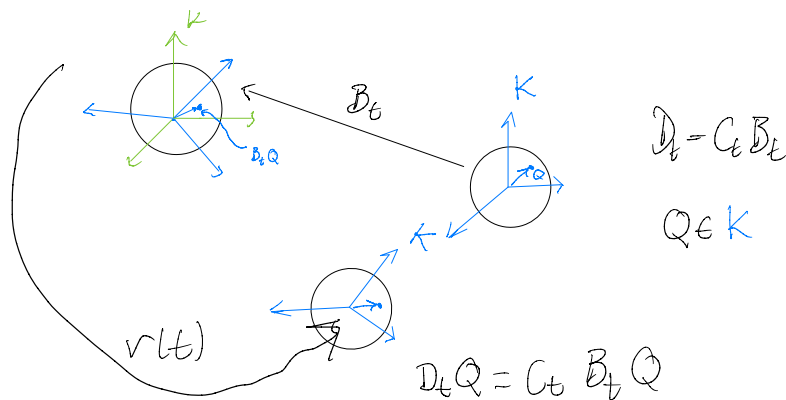
$$D_t = C_t B_t = C_t \circ B_t \quad (\text{son operadores lineales})$$

$$C_t q = q + r(t)$$

$$q, r(t) \in k$$

Def (movimiento traslacional)

D_t es traslacional si el mapeo $B_t: K \rightarrow k$ no depende del tiempo.



Suma de velocidades

"Velocidad absoluta" $\dot{\mathbf{r}}$ $\mathbf{r} \in \mathcal{K}$
en términos de $\mathbf{Q}(t)$ y el movimiento
del sistema de coordenadas.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{B}}_t \mathbf{Q}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)$$

En el mov. traslacional ($\dot{\mathbf{B}}_t = \dot{\mathbf{B}}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{B}}_t = 0$)

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{B}}_0 \mathbf{Q}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)$$

Teo Si el movimiento de $\mathcal{K}$ es traslacional
relativo a $\mathcal{K}$, entonces la vel. absoluta
es la suma de la vel. relativa ($\dot{\mathbf{B}}\mathbf{Q}(t)$)
y la velocidad del movimiento del sistema
($\dot{\mathbf{r}}(t)$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v} & = & \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{vel. absoluta} & & \text{vel. relativa} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \mathbf{v} & = & \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{vel. absoluta} & & \text{vel. relativa} \end{array}} \right\} \text{v. mov. sist.}$$

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{Q}(t) \in \mathcal{K}$$

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} \in \mathcal{K}$$

Velocidad angular

Consideramos $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ (el punto está en
reposo en $\mathcal{K}$)

Este movimiento de $\mathbf{r}(t)$ se llama
rotación transferida.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{B}}_t \mathbf{Q} + \cancel{\dot{\mathbf{B}}_t \mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\mathbf{B}}_t \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Teo

Para cada instante de t , existe
 $\vec{\omega}(t) \in \mathcal{K}$ tal que la velocidad
de transferencia se expresa por

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t), \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{K} \quad (\text{VA})$$

$\vec{\omega}(t)$ es el vector de velocidad angular
instantánea.

Además es único.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{B}}_t \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{r}} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$$

Velocidad transferida

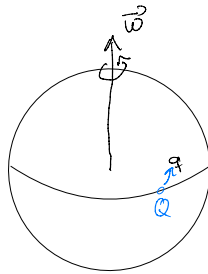
Supongamos que K rota ($r=0$)
y que un punto en K se mueve ($\dot{Q} \neq 0$)

$$q(t) = B_t Q(t) \Rightarrow Q(t) = B_t^{-1} q(t)$$

$$\dot{q}(t) = \dot{B}_t Q(t) + B_t \dot{Q}(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{vel.} \\ \text{absoluta} \end{array} \right\} = \underbrace{\vec{\omega}(t) \times q(t)}_{\text{vel. transferida de rotación}} + \underbrace{B_t \dot{Q}(t)}_{\text{vel. relativa}}$$

$$v = v_n + v'$$



Teo Si el. en movimiento K rota relativo a un punto $O \in K$ es la suma de la velocidad transferida v_n y la vel. relativa v' .

Hasta ahora

$$v = \dot{q} \in K$$

$$v' = B_t \dot{Q}(t) \in K$$

$$v_n = \dot{B}_t Q(t) = \vec{\omega} \times q \in K$$

$$v = v_n + v'$$

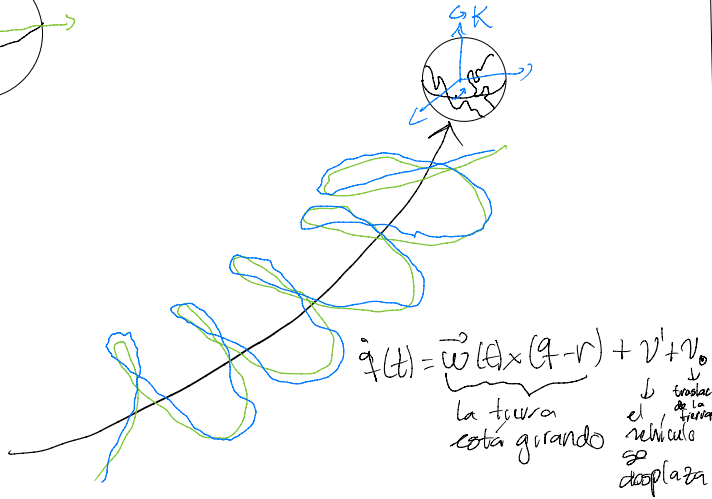
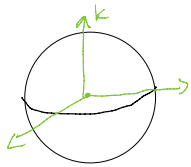
Caso más general

$$q(t) = B_t Q(t) + r(t)$$

$$\Rightarrow Q(t) = B_t^{-1} (q(t) - r(t))$$

$$\dot{q}(t) = \underbrace{\dot{B}_t Q(t)}_{v_n \text{ r.t.r.}} + \underbrace{B_t \dot{Q}(t)}_{v' \text{ r.rel.}} + \underbrace{\dot{r}(t)}_{v_0 \text{ rel. mov. dist.}}$$

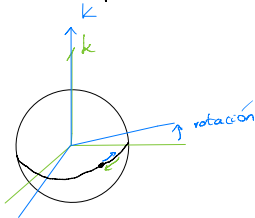
$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \dot{B}_t B_t^{-1} (q(t) - r(t)) + v' + v_0 \\ &= \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (q(t) - r(t))}_{v_n \text{ vel. transferida de rotación}} + v' + v_0 \end{aligned}$$



$$r(t) = B_t Q(t) + r(t)$$

Queremos escribir el vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ en el marco de rota. K .

Suponemos que $r(t) = r_0$ (la tuerca girando en la dirección contraria al eje z)
 $r(t) = r_0$



$$r_0 = B_t Q(t)$$

$$Q(t) = B_t^{-1} r_0$$

$$\dot{Q}(t) = \dot{B}_t^{-1} r_0$$

$$B_t^{-1} B_t = E$$

$$\dot{B}_t^{-1} B_t + B_t^{-1} \dot{B}_t = 0$$

$$\dot{B}_t^{-1} = -B_t^{-1} \dot{B}_t B_t^{-1}$$

$$\dot{Q}(t) = -B_t^{-1} \dot{B}_t B_t^{-1} r_0$$

$$= -B_t^{-1} \dot{B}_t Q(t)$$

Sea $H = -B_t^{-1} \dot{B}_t$ operador antisimétrico
 Tiene una representación matricial.

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ lo escribimos como el producto cruz con un vector } \Omega$$

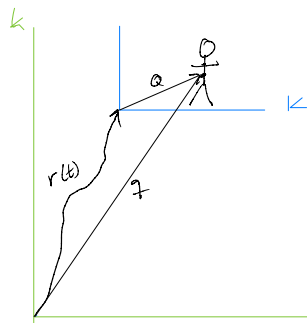
$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{Q}(t) = Q(t) \times \vec{\Omega}(t)$$

$$\boxed{\text{si } \Omega = B_t^{-1} \dot{B}_t \Rightarrow \dot{Q}(t) = -\Omega(t) Q(t)}$$

$\vec{\Omega}$ es la velocidad angular en el marco K .

Fuerzas inerciales y efecto coriolis.



El caso más sencillo es cuando el movimiento es puramente traslacional.

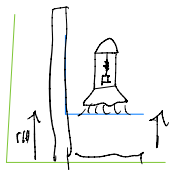
$$Q = \mathcal{F} - r$$

Una masa sobre K sobre la cual actúa una fuerza inercial $F_I = -m\ddot{r}$, $\ddot{r}$ aceleración de K

La fuerza ejercida sobre Q está dada por,

$$m\ddot{Q} = m\ddot{\mathcal{F}} - \underbrace{m\ddot{r}}_{F_I}$$

Ejemplo



$$\begin{aligned} &\ddot{r} \uparrow \\ &\downarrow m(g - \ddot{r}) \end{aligned}$$

En un sistema de coordenadas rotantes $B_t: K \rightarrow k$ rotación relativa c.r.a. el marco fijo

$$Q(t) \in K, \quad \mathcal{F}(t) = B_t Q(t) \in k$$

El vector de velocidad angular en K se denota por Ω .

$\mathcal{F}$ en k está sujeto a las ecuaciones de Newton

$$m\ddot{\mathcal{F}} = f(\mathcal{F}, \dot{\mathcal{F}})$$

T00

El mov de un sistema rotante se lleva a cabo como si tres fuerzas adicionales actuaran en cada punto Q de masa m :

1) fuerza inercial de rotación : $m (\vec{\dot{\Omega}} \times Q)$

2) fuerza de Coriolis : $2m (\vec{\Omega} \times \dot{Q})$

3) fuerza centrífuga : $m (\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times Q))$

$$m \ddot{Q} = F - m (\vec{\dot{\Omega}} \times Q) - 2m (\vec{\Omega} \times \dot{Q}) - m (\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times Q))$$