Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 23 de abril de 2025

Variedades invariantes de puntos fijos de difeomorfismos

$F(z)$, $F(z^*) = z^*$

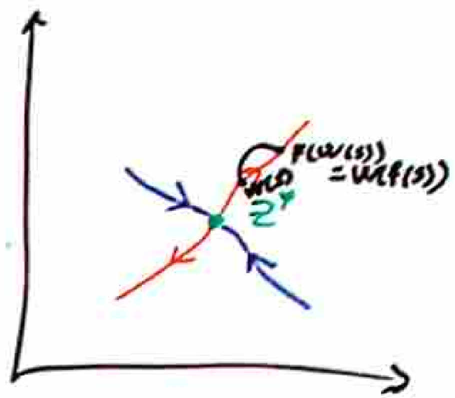
$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeo $z \in \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $s \in \mathbb{R}^d$

W es una variedad d-dim

$W: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$



$$F(W(s)) = W(f(s)) \quad \text{(Inv)}$$

Incógnitas W, f

$f(0) = 0$, $W(0) = z^*$

$W(f(0)) = z^*$

Derivamos (Inv) c.r.a. s y $s=0$.

$$DF(W(0))\,DW(0) = DW(f(0))\,Df(0)$$

$$\Rightarrow DF(z^*)\,DW(0) - DW(0)\,Df(0) = 0 \quad (1.8)$$

$L = DW(0) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ vectores columna

. expande el espacio tangente

a W en z^*, $V^L \in T_{z^*}W$

(1.8) representa la invarianza de V^L bajo la acción de $DF(z_*)$ y $\Lambda_L = Df(0)$ es la representación del mapeo lineal $DF(z_*)$ restringido a V^L

$$DF(z_*)\,L = L\,\Lambda_L$$

Variedades invariantes de puntos fijos de difeomorfismos

$F(z)$, $F(z^*) = z^*$

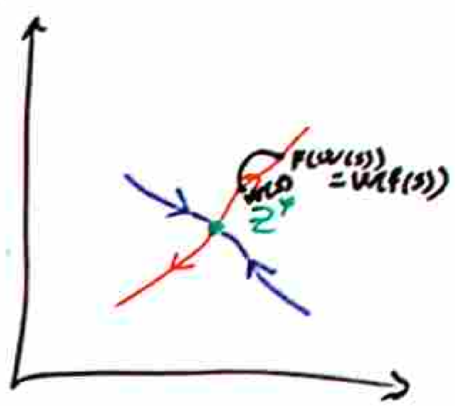
$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ difeo $z \in \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ $\quad s \in \mathbb{R}^d$

W es una variedad d-dim

$W: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$



$$F(W(s)) = W(f(s)) \quad (\mathrm{Inv})$$

Incógnitas W, f

$f(0) = 0$, $W(0) = z^*$

$W(f(0)) = z^*$

· Taylor de W y f

$$W(s) = z^* + \sum_{k \geq 1} W_k(s)$$

$$f(s) = \sum_{k \geq 1} f_k(s)$$

donde W_k (y f_k) son n-vectores (ó d-vectores) de polinomios homogéneos de orden k.

En nuestro caso

$$W(s) = z^* + \sum_{k \geq 1} \begin{pmatrix} W_k^1 \\ W_k^2 \end{pmatrix} s^k$$

$$f(s) = \sum_{k \geq 1} f_k s^k$$

De $DF(z^*)L = L\Lambda_L$ tenemos que el primer orden de la serie es $W_1(s) = Ls$ y $f_1(s) = \Lambda_L s$

Variedades invariantes de puntos fijos de difeomorfismos

El primer paso

- adaptar un sistema de coords lineal a una base de $\mathbb{R}^n$ donde los primeros d-vectores columnas son $L \in \mathbb{R}^{n \times d}$ y las últimas $n-d$ columnas son una matriz $N \in \mathbb{R}^{n \times (n-d)}$.

Sea $P = (L \,\vdots\, N)$ yuxtaposicion de L y N

Notar que P es una matriz invertible, y la vamos a usar para obtener un marco adaptado.

Observar que el espacio normal V^N (los vectores de N) no son invariantes bajo $DF(z^*)$.

Consideramos las series de potencias de la ecuacion (Inv)

$$F(W(s)) - W(f(s)) = 0$$

y juntamos los términos a orden k

→ Llegamos a la siguiente ecuación

$$DF(z^*)W_k(s) - W_k(\Lambda_L s) - Lf_k(s) - E_k(s) = 0$$

donde

- $E_k(s) = \left[F\left(z^* + \sum_{\ell=1}^{k-1} W_\ell(s)\right)\right]_k - \left[z^* + \sum_{\ell=1}^{k-1} W_\ell\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} f_\ell(s)\right)\right]_k$

→ Ecuación cohomológica.

→ Error a orden k.

- i, j son las componentes de los vectores.
- $s = (s_1, \dots, s_d)$, $m = (m_1, \dots, m_d)$
- $|m| = m_1 + \dots + m_d$, $s^m = s_1^{m_1} s_2^{m_2} \cdots s_d^{m_d}$

Resolver las ecuaciones cohomológicas consiste en calcular los coeficientes de los polinomios homogéneos.

$$W_k^i(s) = \sum_{|m|=k} W_m^i s^m \; (i=1,\dots,n), \quad f_k^j(s) = \sum_{|m|=k} f_m^j s^m \; (j=1,\dots,d)$$

$$\text{y } E_k^i(s) = \sum_{|m|=k} E_m^i s^m \quad (i=1,\dots,n)$$

Variedades invariantes de puntos fijos de difeomorfismos

Hacemos un cambio de variables utilizando el marco adaptado, la corrección a orden k

$$\xi_k(s) = P^{-1} W_k(s) \qquad (P\xi_k(s) = W_k(s))$$

$$DF(z^*)P = DF(z^*)(L \vdots N) = (L \vdots N)(\Lambda_L \vdots \Lambda_N) = P\Lambda$$

$$\Lambda \xi_k(s) - \xi_k(\Lambda_L s) - \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix} f_k(s) = \eta_k(s)$$

donde $\eta_k(s) = -P^{-1} E_k(s)$, $\quad DF(z^*)L = L\Lambda_L$

Podemos separar en las direcciones, y para las direcciones normales

$$\Lambda_N \xi_k^N(s) - \xi_k^N(\Lambda_L s) = \eta_k^N(s)$$

donde $\underbrace{\eta_k^N = (0 \ Id_{n-d})\eta_k, \ \xi_k^N = (0, Id_{n-d})\xi_k}_{\text{proyecciones al espacio } N}$

y las direcciones tangentes

$$\Lambda \xi_k^L(s) - \xi_k^L(\Lambda_L s) - f_k(s) = \eta^L(s) - T\xi_k^N(s)$$

viene del hecho de que las direcciones normales no son invariantes.

Cuando

Λ_L matriz de eigenvectores tangentes

Λ_N matriz de eigenvectores normales

$$\Lambda_L = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

$$\Lambda_N = \mathrm{diag}(\lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n)$$

Así $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con columnas reales correspondientes a eigenvectores reales y columnas imaginarias provenientes de pares complejos conjugados.

Variedades invariantes de puntos fijos de difeomorfismos

Ecuaciones cohomológicas normales

La ecuación cohomológica normal, $i=d+1,\dots,n$

$$\lambda_i \xi_k^i(s) - \xi_k^i(\Lambda_L s) = \eta_k^i(s)$$

Notamos que estas ecuaciones son diagonales en los coeficientes de ξ_m^i de $\xi_k^i(s)$

En particular para $i=d+1,\dots,n$, $|m|=k$

$$(\lambda_i - \lambda_L^m)\xi_m^i = \eta_m^i$$

La notación es, $\lambda_L^m = \lambda_1^{m_1}\cdots\lambda_d^{m_d}$

podemos depejar ξ_m^i siempre que $\lambda_i \neq \lambda_L^m$

(el caso cuando $\lambda_i = \lambda_L^m$ son resonancias cruzadas)

$$\xi_m^i = \frac{\eta_m^i}{\lambda_i - \lambda_L^m}$$

y las direcciones tangentes

$$\Lambda \xi_k^L(s) - \xi_k^L(\Lambda_L s) - f_k(s) = \eta^L(s) - T\xi_k^N(s)$$

viene del hecho de que las direcciones normales no son invariantes.

Ecuación tangente

$$\lambda_i \xi_k^i(s) - \xi_k^i(\Lambda_L s) - f_k^i(s) = \tilde{\eta}_k^i(s)$$

donde $\tilde{\eta}_k = \eta^L(s) - T\xi_k^N(s)$

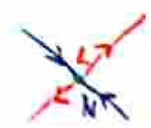
Las ecuaciones para ξ_m^i nos quedan

$$(\lambda_i - \lambda_L^m)\xi_m^i - f_m^i = \tilde{\eta}_m^i$$

Si no hay resonancias cruzadas.

$$\xi_m^i = \frac{\tilde{\eta}_m^i + f_m}{(\lambda_i - \lambda_L^m)}$$

$$W_k(s) = P\begin{pmatrix}\xi_k^L(s)\\ \xi_k^N(s)\end{pmatrix}$$



Próxima clase, ejemplo con mapeo estandar.