Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM IIMAS

Renato Calleja, 22 de abril de 2025

Teorema de Arnold-Jost

$$\Psi : \mathbb{T}^n \times D_1 \to \mathcal{U}(\mathcal{N}_{c^*})$$

$$\mu : D_2 \to D_1$$

tales que

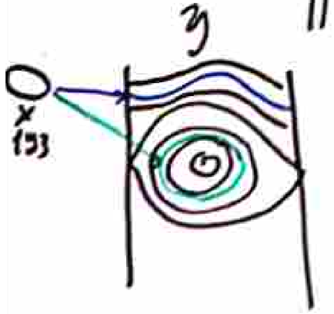
$$\mu \circ F \circ \Psi = y$$

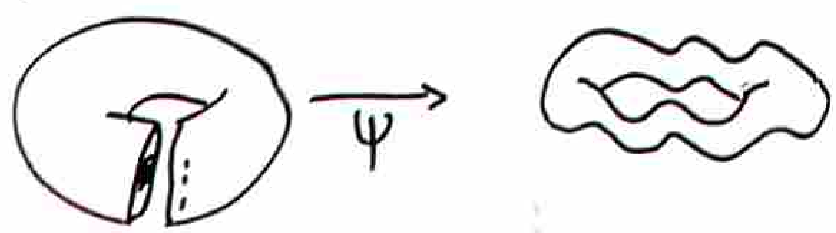
$$\Psi^* \Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$$

Ψ mapea un toro $\mathbb{T}^n \times \{c^*\}$ en $\mathcal{N}_{c^*}$

y $\mathbb{T}^n \times \{y\}$ en $\mathcal{N}_c \cap \mathcal{U}$

en $\mathcal{M}^{2n}$





Corolario

Cualquier sistema Hamiltoniano integrable que está dado por H con integrales F_j se transforma por el difeo. simpléc Ψ en el siguiente sistema en $\mathbb{T}^n \times D$:

$$H \circ \Psi = h(y_1, \dots, y_n) \quad \left(\text{no depende de las } x_j\right)$$

donde x_j, y_j son coords canónicas y $x \in \mathbb{T}^n$ son variables angulares módulo 1.

En particular, en $\mathcal{U}(\mathcal{N})$ el Hamiltoniano es una función de las integrales $F_1, \dots, F_n$.

Dem

Como $\mu \circ F \circ \Psi = y$ entonces $F_j \circ \Psi$ son integrales de movimiento

$$0 = \{ H \circ \Psi , y_i \} = \{ h , y_j \} = - \frac{\partial}{\partial x_j} h$$

y h no depende de x.

Por lo tanto el flujo en $F^{-1}(0)$ es muy simple

$$\dot{x}_j = \frac{\partial h}{\partial y_j} , \quad \dot{y}_j = 0$$

$\Rightarrow$ el toro $\mathbb{T}^n \times \{y\}$ es invariante bajo ϕ^t flujo de h y la restricción al toro lineal

$$\phi^t |_{\mathbb{T}^n \times \{y\}} : (x,y) \longmapsto (x + t\omega , y) \qquad (3.6)$$

con $\omega = \omega(y) = \frac{\partial h}{\partial y}(y)$

Si $\operatorname{Det}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) \neq 0$, las frecs varían de toro a toro. (3.7)

$$\Psi \circ \phi^t \circ \Psi^{-1}(p,q) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} a_j(y) e^{2\pi i \langle j , x + \omega t \rangle}$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} b_j(x,y) e^{2\pi i \langle j , x \rangle}$$

con $b_j(x,y) = a_j(y) e^{2\pi i \langle j , \omega \rangle \cdot t}$

Las vars x, y del teorema están fijas a grandes rasgos. Si x', y' fueran otras, $\exists$ una matriz unimodular M y constantes $c \in \mathbb{R}^n$ tales que

(M unimodular mat de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{Z}$ y $\det(M) = \pm 1$)

$$x' = M \left(x + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$y' = (M^T)^{-1} y + c$$

De (3.7) si $y' = f(y)$ y como $(x,y) \to (x', y')$ es canónico $f_y^T(y) x' = x + \frac{\partial w}{\partial y}$

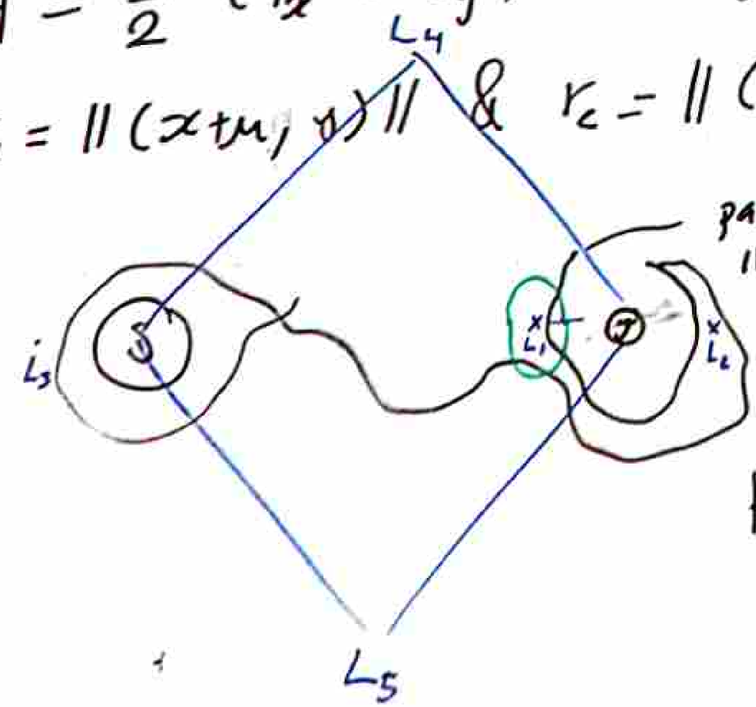
Como el mapeo preserva $\mathbb{Z}^n$, f_y debe tener coefs enteros. //

1880's Oscar II Rey de Suecia y Noruega.

Problema Restringido de los 3 cuerpos. (L. Euler)

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + yP_x - xP_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

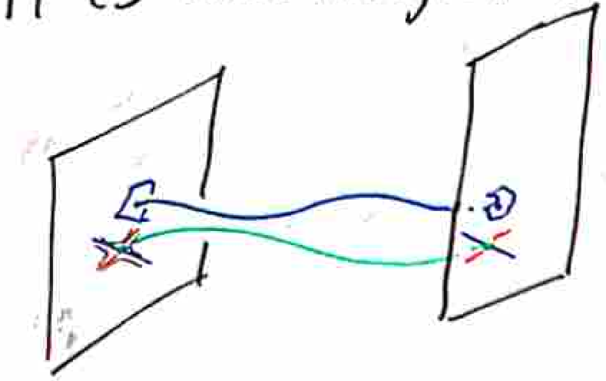
$r_1 = \|(x+\mu, y)\|$ & $r_2 = \|(x-1+\mu, y)\|$



H. Poincaré

H hamilt de dim 4 (2 grados de libertad)

H es una integral de movimiento. (y fijo $H = C$)



El flujo al tiempo t, φ^t es simpléctico de una variedad 2 dim en si misma. φ^t preserva el area.

Variedades invariantes de puntos fijos de difeomorfismos.

$$F(z), \quad F(z^*) = z^*$$

Sea $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ el espacio ambiente

$\mathbb{H} = \mathbb{R}^d$ la variedad modelo con $d \leq n$.

$\mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$

$\mathbb{R}^d$, $s = (s_1, \dots, s_d)$

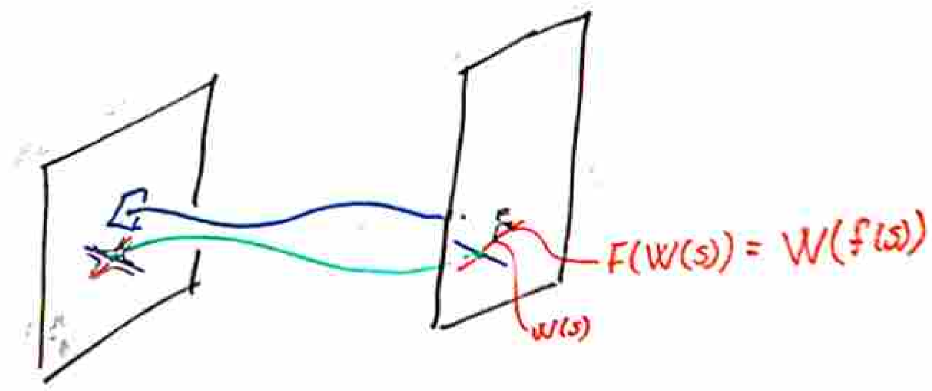
$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo

$z_* \in \mathbb{R}^n$, punto fijo $F(z^*) = z^*$

· Buscamos una variedad d-dimensional $\mathcal{W}$ inmersa por una parametrización $W: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ tal que $W(0) = z_*$

La dinámica $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

La ecuación de invarianza $F(W(s)) = W(f(s))$



Método de la parametrización:

Expandir todo en series de potencias y resolver las ecuaciones a órdenes determinados si fuera posible.