Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

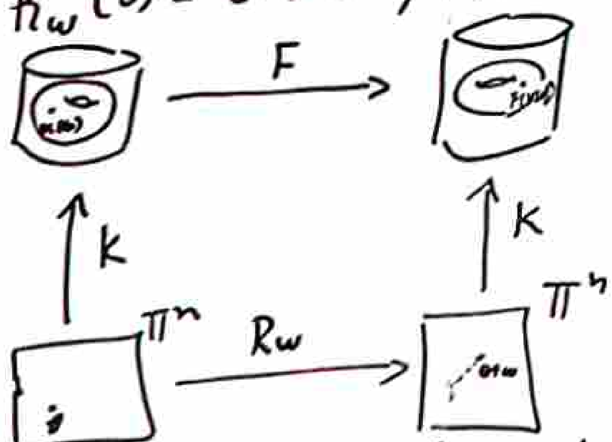
Posgrado en ciencias matemáticas UNAM IIMAS

Renato Calleja, 21 de mayo de 2025

Solución de la ecuación de invarianza.

$$F(K(\theta)) = K(\theta+\omega), \quad F:\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \quad (\mathrm{Inv})$$

$$R_\omega(\theta) = \theta+\omega, \quad R_\omega:\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$$



La incógnita de (Inv) es la $K:\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n$

→ es un encaje del toro en el cilindro.

→ Usar un método iterativo en un espacio de Banach $\mathcal{A}_\rho$

Rüssmann $\mathcal{L}_\omega \varphi(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(\theta+\omega)$

Podemos resolver $\mathcal{L}_\omega \varphi(\theta) = \eta(\theta)$, $\int_{\mathbb{T}^n}\eta(\theta)\,d\theta = 0$, $\|\varphi\|_{\rho-\delta} \le C(\delta)\nu^{-1}\delta^{-\tau}\|\eta\|_\rho$

El error que cometemos al resolver es lineal.

Nota de cálculo

El método de Newton es cuadrático.

· Desventaja → necesitamos una semilla.

Empezamos con una semilla $K_0:\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n$

$$F(K_0(\theta)) - K_0(\theta+\omega) = e_0(\theta)$$

si K_0 es buena semilla, e_0 es pequeña

Buscamos una corrección $K_1(\theta) = K_0(\theta) + \Delta(\theta)$

Queremos que

$$F\circ K_1(\theta) - K_1(\theta+\omega) = e_1(\theta)$$

con $\|e_1\| \ll \|e_0\|$

$$\begin{aligned} e_1(\theta) &= F(K_0(\theta)+\Delta(\theta)) - K_0(\theta+\omega) - \Delta(\theta+\omega) \\ &= F(K_0(\theta)) + DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) + O(\|\Delta\|^2) - K_0(\theta+\omega) - \Delta(\theta+\omega) \\ &= e_0(\theta) + DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) + O(\|\Delta\|^2) \end{aligned}$$

¡lineal!

Si podemos resolver $DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) = -e_0(\theta)$

$\Rightarrow \|\Delta\| \propto \|e_0\|$ y $\|e_1\| \propto \|\Delta\|^2 \propto \|e_0\|^2$

Se va doblando para → 0.

Solución de la ecuación de invarianza.

$$F(K(\theta)) = K(\theta+\omega), \quad F:\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \quad \text{(Inv)}$$

Problema $DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) = -e_0(\theta)$

no tiene coeficientes constantes (como $\mathcal{L}_\omega \Delta = -e_0$)

Ejemplo (Mapeo estándar)

$$\begin{pmatrix}1+\varepsilon V''(K_0^x(\theta)) & 1\\ \varepsilon V''(K_0^x(\theta)) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta^x(\theta)\\ \Delta^y(\theta)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\Delta^x(\theta+\omega)\\ \Delta^y(\theta+\omega)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}e_0^x(\theta)\\ e_0^y(\theta)\end{pmatrix}$$

Observar que $\varepsilon = 0$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta^x(\theta)\\ \Delta^y(\theta)\end{pmatrix} \dots$$

$$\Delta^x(\theta) + \Delta^y(\theta) - \Delta^x(\theta+\omega) = -e_0^x(\theta)$$

$$\Delta^y(\theta) - \Delta^y(\theta+\omega) = -e_0^y(\theta) \rightsquigarrow \mathcal{L}_\omega \Delta^y(\theta) = -e_0^y(\theta)$$

$$\Delta^x(\theta) - \Delta^x(\theta+\omega) = -e_0^x(\theta) - \Delta^y(\theta) \rightsquigarrow \mathcal{L}_\omega \Delta^x(\theta) = -e_0^x(\theta) - \Delta^y(\theta)$$

como F es exacto, no hay flujo vertical neto

$\Rightarrow \langle e_0^y(\theta)\rangle = 0 \Rightarrow \Delta^y(\theta) + c_{\text{grado de libertad}}$

$\Rightarrow \langle e_0^x(\theta) - \Delta^y(\theta) + c\rangle = 0 \Rightarrow \Delta^x(\theta)$

$\Rightarrow$ En el caso integrable, podemos resolver.

Lo que haremos es transformar el caso no-integrable para que se vea como el integrable.

Ejemplo

$$DF(K_0(\theta)) = \begin{pmatrix}1+\varepsilon V''(K_0^x(\theta)) & 1\\ \varepsilon V''(K_0^x(\theta)) & 1\end{pmatrix}$$

(queremos que) se vea como $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Vamos a introducir un cambio de coordenadas

Para ello, consideramos un toro parametrizado por $K:\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n$.

Vamos a crear un marco adaptado al toro $\mathcal{K} = K(\mathbb{T}^n)$

usando primero un vector tangente

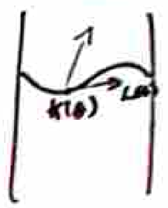
K es el encaje del toro y $D_\theta K(\theta)$ son vectores en el espacio tangente de $\mathcal{K}$ $(T_{K(\theta)}\mathcal{K})$

$$L(\theta) = DK(\theta), \quad L:\mathbb{T}^n \longrightarrow \underbrace{T_{K(\theta)}\mathcal{K}\times T_{K(\theta)}\mathcal{K}\times\dots\times T_{K(\theta)}\mathcal{K}}_{n\text{-veces}} = \mathbb{R}^{n\times n}$$

Solución de la ecuación de invarianza.

$$F(K(\theta)) = K(\theta+\omega), \quad F:\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \quad \text{(Inv)}$$

En 1-dim $(n=1)$

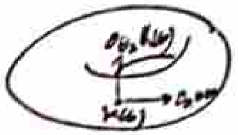


$$K(\theta) = \begin{pmatrix} K^x(\theta) \\ K^y(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}$$

$$DK(\theta) = L(\theta) = \begin{pmatrix} DK^x(\theta) \\ DK^y(\theta) \end{pmatrix} \in \underset{\displaystyle T_{DK(\theta)}K}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}} = \mathbb{R}^{2\times 1}$$

En 2-dim $(n=2)$ $\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}^2$

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} K_1^x(\theta) \\ K_2^x(\theta) \\ K_1^y(\theta) \\ K_2^y(\theta) \end{pmatrix} \qquad \theta \in \mathbb{T}^2, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)$$



$$DK(\theta) = L(\theta) = \begin{pmatrix} \partial_{\theta_1} K_1^x(\theta) & \partial_{\theta_2} K_1^x(\theta) \\ \partial_{\theta_1} K_2^x(\theta) & \vdots \\ \partial_{\theta_1} K_1^y(\theta) & \\ \partial_{\theta_1} K_2^y(\theta) & \end{pmatrix} \in T_{K(\theta)}K \times T_{K(\theta)}K \simeq \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{2\cdot 2\times 2}$$

En n-dim (n)

$$\partial_{\theta_i} K(\theta) \in T_{K(\theta)}K, \quad i=1,\dots,n$$

Como un toro invariante es Lagrangiano,

$$DK(\theta)^T J(K(\theta))\, DK(\theta) = O_n$$

$$\Longleftrightarrow L(\theta)^T J(K(\theta))\, L(\theta) = O_n$$

También recordemos que $J^2 = -I$, $J^T = -J$

Ahora queremos construir un subespacio complementario para completar la matriz de cambio de coordenadas.

Tomamos $N: \mathbb{T}^n \longrightarrow \overbrace{N_{K(\theta)}K \times \dots \times N_{K(\theta)}K}^{\text{n-veces el espacio normal al toro } K} = \mathbb{R}^{2n\times n}$

con la propiedad que

$$P(\theta) = \left(L(\theta) \;\vdots\; N(\theta)\right) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

y que sea un marco simpléctico,

$$P(\theta)^T J(K(\theta))\, P(\theta) = J_0 = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$$

En nuestro caso, vamos a tomar lo siguiente

$$N(\theta) = J(K(\theta)) L(\theta)\, G(\theta)^{-1} \longrightarrow \text{vector simpléctico conjugado a } L$$

donde $G(\theta) = L^T(\theta) L(\theta)$

Solución de la ecuación de invarianza.

$P(\theta)$ es simpléctica

$$P(\theta)^T J(K(\theta)) P(\theta) = \begin{pmatrix} L(\theta)^T \\ N(\theta)^T \end{pmatrix} J(K(\theta)) \left(L(\theta) \,\vdots\, N(\theta) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} L(\theta)^T J(K(\theta)) L(\theta) & L(\theta)^T J(K(\theta)) N(\theta) \\ N(\theta)^T J(K(\theta)) L(\theta) & N(\theta)^T J(K(\theta)) N(\theta) \end{pmatrix}$$

porque $\mathcal{K}$ es Lagrangiana

$$= \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$$

$$N(\theta)^T J(K(\theta)) N(\theta) = G(\theta)^{-T} L(\theta)^T J(K(\theta))^T J(K(\theta)) J(K(\theta)) L(\theta) G(\theta)$$

$$= -G(\theta)^{-T} \underbrace{L(\theta)^T J(K(\theta)) L(\theta)}_{O_n} G(\theta) = 0$$

$$L(\theta)^T J(K(\theta)) N(\theta) = L(\theta) J(K(\theta)) J(K(\theta)) L(\theta) G(\theta) = -L^T L\, G = -I_n$$

Fácil $\to N^T J L = I_n$ $\implies P(\theta)$ es simpléctica.

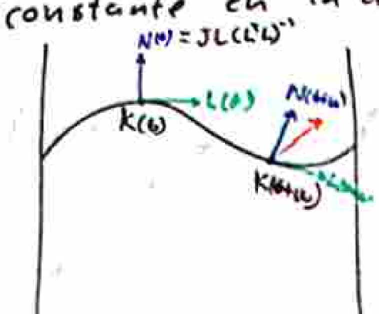
Las ideas vienen, Llave, Villanueva, González, Jorba 2005.
detalles en el Libro Haro, Canadell, Luque, Figueras, Mondelo 2...

La inversa de P

$$P^{-1}(\theta) = -J_0 P(\theta)^T J(K(\theta))$$

Ejemplo 1-dim

La idea es que este marco transforma la acción de la matriz $DF(K(\theta))$ a una matriz que es constante en la diagonal.



$$J(K(\theta)) = J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^T J L = 0$$

$$L^T L = \frac{1}{|L|^2}$$

$$DF(K(\theta)) P(\theta) = P(\theta+\omega) \begin{pmatrix} A(\theta) & T(\theta) \\ C(\theta) & B(\theta) \end{pmatrix} = P(\theta+\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Por invarianza $F(K(\theta)) = K(\theta+\omega)$

derivando c.r.a. $\theta \implies DF(K(\theta)) L(\theta) = L(\theta+\omega) + O_n N(\theta+\omega)$

$$DF(K(\theta)) N(\theta) = L(\theta+\omega) T(\theta) + N(\theta+\omega) B(\theta)$$

Solución de la ecuación de invarianza.

$$DF(K(\theta))N(\theta) = L(\theta+\omega)T(\theta) + N(\theta+\omega)B(\theta)$$

Multiplicamos por $L(\theta+\omega)^T J^T$

$$\Rightarrow L(\theta+\omega)^T J^T DF(K(\theta))N(\theta) = \underbrace{L(\theta+\omega)^T J^T L(\theta+\omega)}_{0 \text{ por Lagrangianidad}} T(\theta) + L(\theta+\omega)^T J^T N(\theta+\omega)B(\theta)$$

$$L(\theta+\omega)^T J^T J L G^{-1} B = -L(\theta+\omega)^T L(\theta+\omega) G^{-1}(\theta+\omega)B(\theta) = -I\,B(\theta).$$
$$= -B(\theta)$$

$$L(\theta+\omega)^T \underbrace{J^T DF(K(\theta))J}_{\text{Tarea: verificar que}} L(\theta)G(\theta) = L(\theta+\omega)^T DF(K(\theta))^{-T} L(\theta)G(\theta)$$

$$G(\theta) = (L(\theta)^T L(\theta))^{-1}$$

$$J^T DF(K(\theta))J = DF(K(\theta))^{-T}$$

Además

$$L(\theta+\omega)^T DF(K(\theta))^{-T} = (DF(K(\theta))^{-1} L(\theta+\omega))^T = (L(\theta))^T$$

$$\Rightarrow = L^T(\theta)L(\theta)(L(\theta)^T L(\theta))^{-1} = 1$$

La matriz $T(\theta)$ se llama la torsión
→ Es cuanto se tuerce el vector $DF(K(\theta))N(\theta)$ en la dir. $L(\theta+\omega)$

Multiplicamos por $(G(\theta+\omega))^{-1}L(\theta+\omega)^T$

$$G(\theta+\omega)^{-1}L(\theta+\omega)^T DF(K(\theta))N(\theta) = \underbrace{(G(\theta+\omega))^{-1}L(\theta+\omega)^T L(\theta+\omega)}_{I} T(\theta) + (G(\theta+\omega))^{-1} L(\theta+\omega)^T \underbrace{[N(\theta+\omega)]^T J^T N(\cdot)}_{0 \text{ Lagrangianidad}}$$

$$\Rightarrow T(\theta) = G(\theta+\omega)^{-1} L(\theta+\omega)^T DF(K(\theta))N(\theta)$$

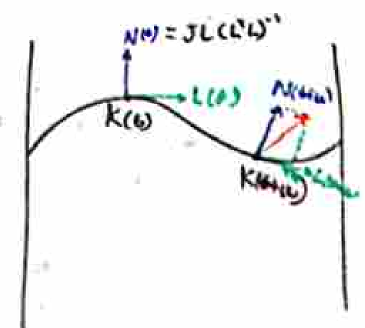
Las ideas vienen, Llave, Villanueva, González, Jorba 2005.
detalles en el Libro Haro, Canadell, Luque, Figueras, Mondelo

La inversa de P

$$P^{-1}(\theta) = -J_0 P(\theta)^T J(K(\theta))$$

En dim n tenemos

$$DF(K(\theta))P(\theta) = P(\theta+\omega)\begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$



$$J(K(\theta)) = J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^T J L = 0$$

$$L^T L = \frac{1}{|L|^2}$$

$$DF(K(\theta))P(\theta) = P(\theta+\omega)\begin{pmatrix} A(\theta) & T(\theta) \\ C(\theta) & B(\theta) \end{pmatrix} = P(\theta+\omega)\begin{pmatrix} 1 & T(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Por invarianza $F(K(\theta)) = K(\theta+\omega)$
derivando c.r.a. $\theta \Rightarrow DF(K(\theta))L(\theta) = L(\theta+\omega) + O_n N(\theta+\omega)$

$$DF(K(\theta))N(\theta) = L(\theta+\omega)T(\theta) + N(\theta+\omega)B(\theta)$$