Introducción a la Mecánica Analítica

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 21 de agosto de 2024

Fuerzas centrales y leyes de conservación

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\nabla_{\underline{r}_i} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \text{ de fuerza central.}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \langle m_i \dot{\underline{r}}_i, \dot{\underline{r}}_i \rangle + \mathcal{U}(\underline{r})$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{s} P_i = \sum_{i=1}^{s} m_i \dot{\underline{r}}_i$$

Nota

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\sum_{i=1}^{s} \nabla_{\underline{r}_i} \mathcal{U}(\underline{r})$$

$$R = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{s} m_i \underline{r}_i$$

Prop

$$\frac{d}{dt}(m\dot{R}) = \sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i$$ la suma de las fuerzas externas del problem

(Si $\sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i = 0$, $\frac{d}{dt}(m\dot{R}) = 0$, $m\dot{R} = \underline{\alpha}$, $R = \underline{\alpha} t + \underline{\beta}$,

Dem

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s} m_i \dot{\underline{r}}_i\right) = \sum_{i=1}^{s} m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\sum_{i=1}^{s} \nabla_{\underline{r}_i} \mathcal{U}(\underline{r})$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{s} F_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i \qquad \left(F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}\right)$$

$$= \sum_{i>j} \cancelto{0}{\left[F_i^{(j)} + F_j^{(i)}\right]} + \sum_{i=1}^{s} \tilde{F}_i$$ ~ fuerzas externas. //

→ El momento total se conserva, el baricentro se desplaza en línea recta.

Fuerzas centrales y leyes de conservación

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\nabla_{\underline{r}_i} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \text{ de fuerza central.}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \langle m_i \dot{\underline{r}}_i, \dot{\underline{r}}_i \rangle + \mathcal{U}(\underline{r})$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{s} P_i = \sum_{i=1}^{s} m_i \dot{\underline{r}}_i$$

Nota $$\frac{d\underline{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\sum_{i=1}^{s} \nabla_{\underline{r}_i} \mathcal{U}(\underline{r})$$

$$R = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{s} m_i \underline{r}_i$$

$$L = \sum_{i=1}^{s} m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i$$

Si no hay fuerzas externas,

E	se conserva	1
$\underline{P}$	se conserva	3
$\underline{L}$	se conserva.	3

Prop $$\frac{d}{dt} L = \sum_{i=1}^{s} \underline{r}_i \times \tilde{F}_i$$ (Si no hay fuerzas externas, el momento angular total se

Dem

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{i=1}^{s} \left[m_i \cancel{\dot{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{r}}_i}^{\,0} + m_i \underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \underline{r}_i \times \left[\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{s} F_i^{(j)} + \tilde{F}_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{s} \underline{r}_i \times F_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{s} \underline{r}_i \times \tilde{F}_i$$

$$\left[F_i^{(j)} = g_i^{(j)}(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|)(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \right]$$

$$= \sum_{i>j} \cancel{\left[g_i^{(j)}(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|)\, \underline{r}_i \times (\underbrace{\underline{r}_i - \underline{r}_j}_{-\underline{r}_i \times \underline{r}_j}) + g_j^{(i)}(|\underline{r}_j - \underline{r}_i|)\, \underline{r}_j \times (\underbrace{\underline{r}_j - \underline{r}_i}_{-\underline{r}_j \times \underline{r}_i}) \right]}^{\,0} + \sum_{i=1}^{s} \underline{r}_i \times \tilde{F}_i$$

(por antisimetría del prod. cruz. $(\underline{r}_i \times \underline{r}_j) = -(\underline{r}_j \times \underline{r}_i)$

//

Fuerzas centrales y leyes de conservación

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\nabla_{\underline{r}_i} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} \text{ de fuerza central.}$$

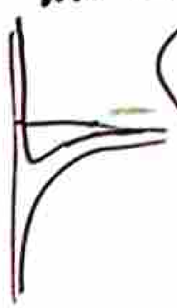
$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \langle m_i \dot{\underline{r}}_i, \dot{\underline{r}}_i \rangle + \mathcal{U}(\underline{r})$$

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^{s} P_i = \sum_{i=1}^{s} m_i \dot{\underline{r}}_i$$

Nota

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\sum_{i=1}^{s} \nabla_{\underline{r}_i} \mathcal{U}(\underline{r})$$

$$m\ddot{r} = -V'(r) + \frac{L^2}{r^3}$$



$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 +$$

Problema de 2 cuerpos

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = F_1, \quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = F_2$$

$$\frac{m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

$$m^* \ddot{\underline{r}} = F(|\underline{r}|)$$

Ejemplos de interacciones binarias

$$r = |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$

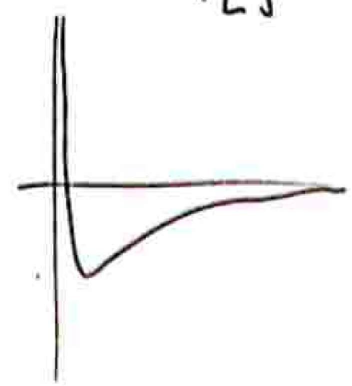
Fuerza gravitacional $\mathcal{U} = -\frac{1}{r}$

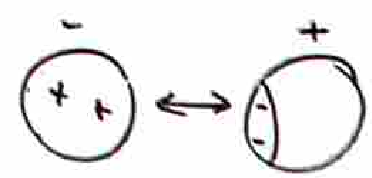
$$F = -\frac{d}{dr}\mathcal{U}(r) = -\frac{1}{r^2}$$

Modelo de fuerzas entre átomos ó moléculas.

Potencial de Lennard-Jones

$$V_{LJ}(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$





Teorema (Lema de Poincaré)

Ω region p-conexa si $\omega \in \Omega^p$
1- conexa

tal que $d(\omega) = 0^{(p+1)}$.

Entonces $\exists\, \mathcal{J} \in \Omega^{p-1}$ tal que $d\mathcal{J} = \omega$.

Sea $\omega \in \Omega^1$ en un dominio simplemente conexo

$$\omega(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x)) \quad \forall x \in \Omega.$$

$\exists\, \mathcal{J} \in \Omega^0$ tal que $d\mathcal{J} = \omega$

$\mathcal{J} := f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d\mathcal{J}(x) = \nabla F(x)$$

$$d\omega = \sum_{i>j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}}$$

Sistemas conservativos de un grado de libertad.

$$m\ddot{q} = F(q) \quad , \quad F(q) = -\frac{d}{dq}U(q)$$

$q \in \mathbb{R}$

$m\ddot{x} = f(t)$

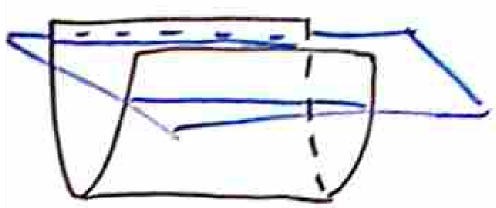
Ejemplo 0

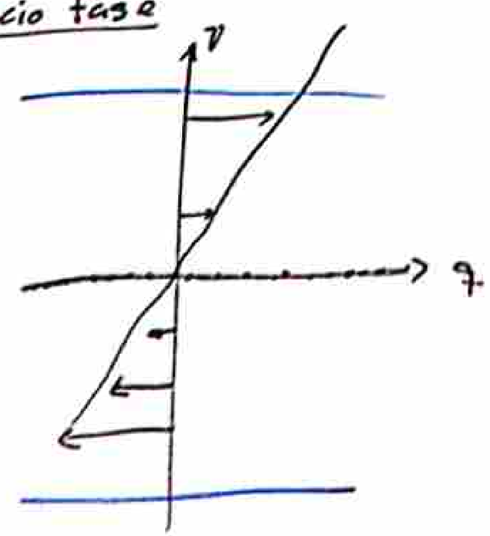
$m\ddot{q} = 0 \quad \in \mathbb{R}$

$\dot{q} = v$ $\qquad \ddot{q} = 0, \quad \dot{q} = v_0, \quad q(t) = v_0 t + q_0$

$m\dot{v} = 0$ $\qquad$ Espacio fase

$$E = \frac{m}{2}v^2 + E_0$$





Def (Punto fijo)

$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$

$x(0) = x_0$

$x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo si $f(x^*) = 0$

$x(t) = x^*$ solución constante

En el ejemplo 0.

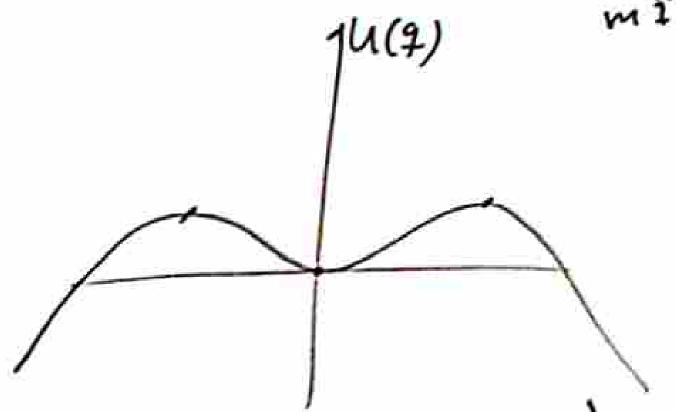
$v = 0$ y $0 = 0$. $\to$ Obs en mec Newtoniana un punto fijo siempre corresponde a $v = 0$.

En mec. Newt. decimos que un punto fijo es un equilibrio.

Sistemas conservativos de un grado de libertad.

$m\ddot{q} = F(q)$, $F(q) = -\frac{d}{dq}U(q)$

$q \in \mathbb{R}$

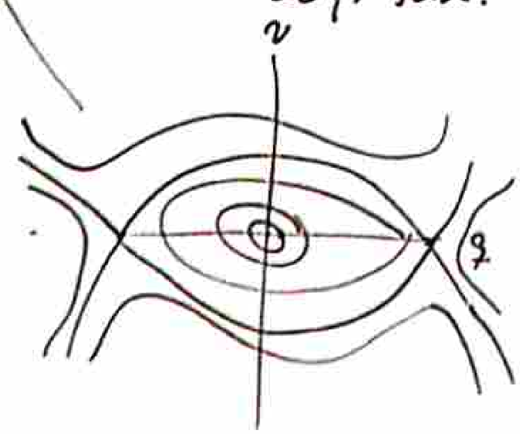


$m\ddot{x} = f(x)$

$\dot{q} = v$

$\dot{v} = -\frac{1}{m}U'(q)$

Esp. fase.



equilibrios

$v=0,\ U'(q^*)=0$

$E = \frac{m}{2}v^2 + U(q)$

Def (Punto fijo)

$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$

$x(0) = x_0$

$x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo si $f(x^*) = 0$

$x(t) = x^*$ solución constante

En el ejemplo 0.

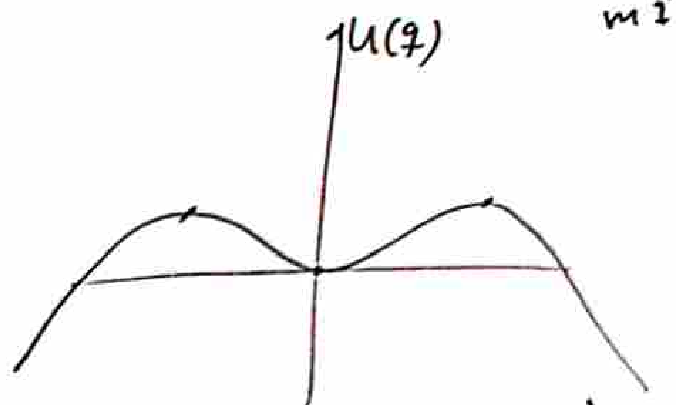
$v=0$ y $0=0$. → Obs en mec Newtoniana un punto fijo siempre corresponde a $v=0$.

En mec. Newt. decimos que un punto fijo es un equilibrio.

Sistemas conservativos de un grado de libertad.

$$m\ddot{q} = F(q) \quad , \quad F(q) = -\frac{d}{dq}U(q)$$

$q \in \mathbb{R}$



$m\ddot{x} = f(t)$

$\dot{q} = v$

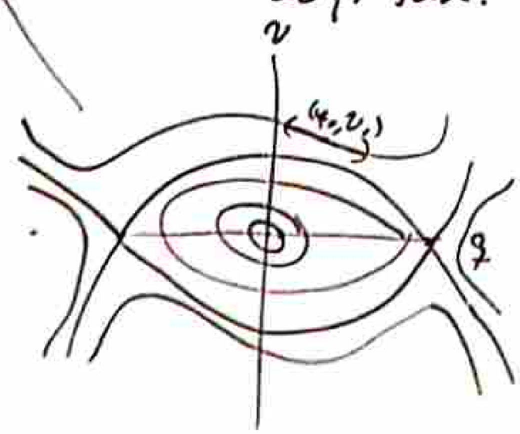
$\dot{v} = -\frac{1}{m}U'(q)$

equilibrios

$v^* = 0, \; U'(q^*) = 0$

$$\boxed{E = \frac{m}{2}v^2 + U(q)}$$

Esp. fase.



La conservación de la energía es "toda" la historia en estos sistemas.

→ Las trayectorias se mueven sobre las superficies de nivel de la energía.

Prop Sea $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y $(q_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ es tal que $(\nabla E)(q_0, v_0) \neq (0,0)$ entonces $E(q,v) = E(q_0, v_0)$ es una curva de clase C^1 alrededor de (q_0, v_0)

(TFI)

Sistemas conservativos de un grado de libertad.

$$E(q,v) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k q^2$$

Oscilador armónico

$$\dot{q} = v$$
$$\dot{v} = -\frac{k}{m} q$$

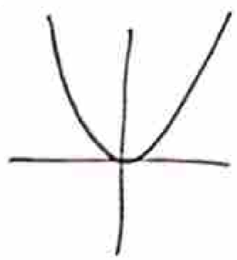
$$E(q_0, v_0) = E_0$$

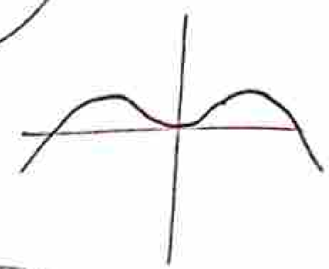
$$E_0 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} q^2$$

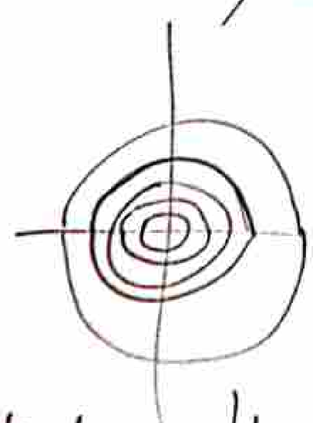
$$q^2 = 2E_0 - m v^2$$

$$q(v) = \sqrt{\frac{2E_0 - m v^2}{k}}$$

$$v(q) = \sqrt{\frac{2E_0 - k q^2}{m}}$$







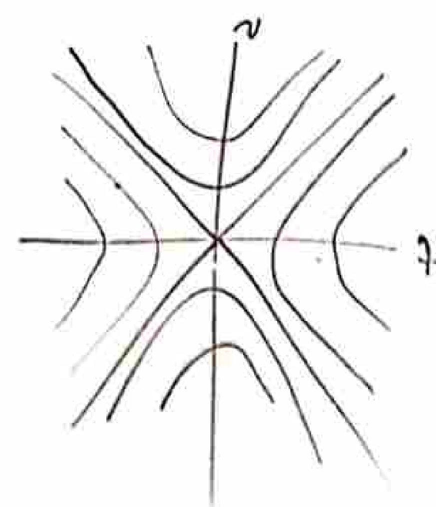
Punto de equilibrio elíptico

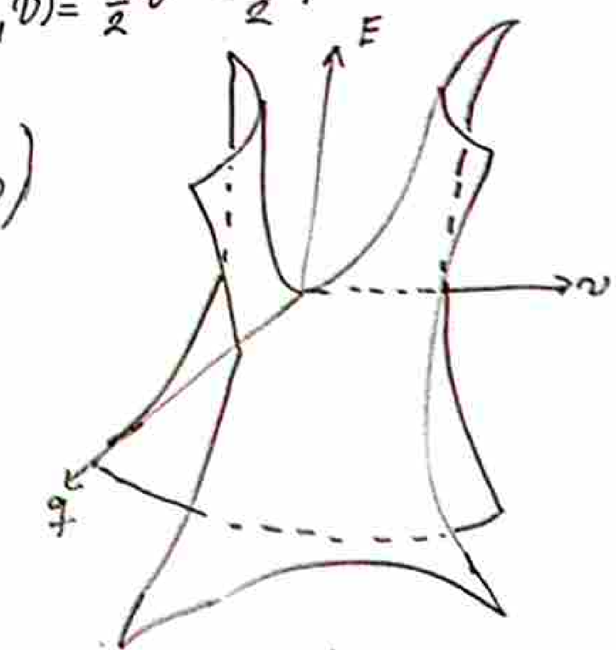
Oscilador antiarmónico

$$\dot{q} = v$$
$$\dot{v} = \frac{k}{m} q$$

$$E(q,v) = \frac{m}{2} v^2 - \frac{k}{2} q^2$$

$$\left(\nabla E(q_0, v_0)\right) = \left(-k q,\ m v\right)$$





Punto fijo hiperbólico