Introducción a la Mecánica Analítica

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 20 de noviembre de 2024

Sistemas Hamiltonianos integrables

$H \in C^2(D)$, D un dominio de $\mathbb{R}^{2n}$

(J. Moser, E. Zehnder, "Notes on Dynamical Systems," Courant).

Una función $F \in C^1(D)$ es una integral del campo $X_H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j}$

si $X_H F = \{H, F\} = 0$

pero $dF \neq 0$ en D.

Así F es constante a lo largo de X_H.

Def (1)

Un campo Hamiltoniano X_H es integrable en D si posee n integrales $F_j \in C^2(D)$ tales que,

(i) $dF_1, dF_2, \ldots, dF_n$ son l.i. en D.

(ii) $\{H, F_j\} = 0$ en D

(iii) $\{F_j, F_k\} = 0$ en D.

Sistemas Hamiltonianos integrables

$H \in C^2(D)$, D un dominio de $\mathbb{R}^{2n}$

(J. Moser, E. Zehnder, "Notes on Dynamical Systems," Courant).

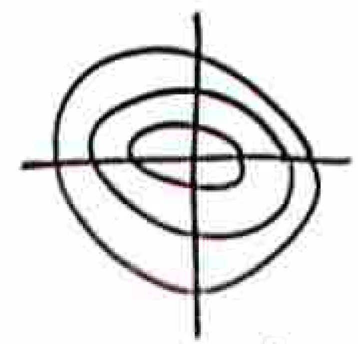
Ejemplo

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(p_j^2 + w_j^2 q_j^2\right), \quad w_j > 0, \ (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$F_j(q,p) = p_j^2 + w_j^2 q_j^2, \quad dF_j \text{ son l.i.}$$

$$D = \{(q,p) : F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n \neq 0\}$$

La transformación



$$q_j = \sqrt{\frac{2y_j}{w_j}} \cos x_j$$

$$p_j = -\sqrt{2 w_j y_j} \operatorname{sen} x_j$$

lleva el Hamiltoniano a $H(y) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j$

$$\dot{x}_j = w_j$$
$$\dot{y}_j = 0$$

Sistemas Hamiltonianos integrables

$H \in C^2(D)$, D un dominio de $\mathbb{R}^{2n}$

(J. Moser, E. Zehnder, "Notes on Dynamical Systems," Courant)

$N_C = \{ m \in \mathcal{M} : F_j(m) = c_j, \; j = 1, .., n \}$

Ej $\bigcirc \times \bigcirc \times \ldots \times \bigcirc \simeq \mathbb{T}^n$

→ Subvar de dim n en $\mathcal{M}$.

Por (i) y (iii), $X_{F_1}, X_{F_2}, \ldots, X_{F_n}$ expanden el espacio tangente de N_c. Son l.i.

y $X_{F_j} F_k = \{F_j, F_k\} = 0$.

También por (ii) $X_H F_j = \{H, F_j\} = 0$

con lo cual X_H es tangente a N_c.

Pensamos en $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $N_c = F^{-1}(c)$

y podría ser que $\mu_k(F)$, $k = 1, .., n$, $\{\mu_k(F), \mu_l(F)\} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial(\mu_k, \mu_l)}{\partial(F_i, F_j)} \{F_i, F_j\}$

Si el Jacobiano de μ no se anula $d\mu_k(F)$ son l.i.

y las μ_k están en involución

Teo (Arnold y Jost)

Sea $F = (F_1, .., F_n)$ un campo C^2 en la variedad simpléctica $(\mathcal{M}, \omega)$ donde $\mathcal{M}$ tiene dim $2n$, y donde F satisface (i) y (iii) de la Def (1).

Si además la variedad n-dim $N_0 := F^{-1}(0) \subset \mathcal{M}$ es compacta y conexa. Entonces

(i) $N_0 := F^{-1}(0)$ es un toro encajado de dimensión n ($\mathbb{T}^n$ ...

(ii) Hay una vecindad abierta $\mathcal{U}(N_0) \subset \mathcal{M}$ que se puede describir por coordenadas x_i, y_i de la siguiente manera:

$x = (x_1, .., x_n)$ son vars. en el toro de dim n, $\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{R}^n / 2\pi$

y $y = (y_1, .., y_n) \in D_1$, donde D_1, D_2 son dominios de $\mathbb{R}^n$ que contienen al $y = 0$, entonces existen difeomorfismos $\psi : \mathbb{T}^n \times D_1 \to \mathcal{U}(N_0)$, $\mu : D_2 \to D_1$, $\mu(0) = 0$

tales que $\mu \circ F \circ \psi = y$ (3) y $\psi^* \omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$

En particular, ψ mapea el toro $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ en $N_0 \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0)$ y el toro $\mathbb{T}^n \times \{y\}$ en $N_c \cap \mathcal{U}$ con $y = \mu(c)$.

Sistemas Hamiltonianos integrables

$H \in C^2(D)$, D un dominio de $\mathbb{R}^{2n}$

(J. Moser, E. Zehnder, "Notes on Dynamical Systems," Courant)

$N_c = \{ m \in \mathcal{M} : F_j(m) = c_j,\ j = 1, \dots, n \}$

Ej. $\bigcirc \times \bigcirc \simeq \mathbb{T}^2$:

$$D = \{ F_1 \cdot F_2 \neq 0 \} = \{ (p_1^2 + \omega_1 q_1^2)(p_2^2 + \omega_2 q_2^2) \neq 0 \}$$

$\cdot \times \cdot = \{0\}$

$\cdot \times \bigcirc = \mathbb{T}^1$

$(p_1, q_1) = (0,0)$

$$F_1 = p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2$$
$$F_2 = p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2$$

$X_{F_1} F_2 = \{F_1, F_2\}$

dF_1, dF_2 no son l.i.

$F = (F_1, F_2)$

$$\psi \begin{cases} q_j = \sqrt{\dfrac{2y_j}{\omega_j}} \cos x_j \\ p_j = -\sqrt{2\omega_j y_j} \sin x_j \end{cases}$$

$F \circ \psi = (\omega_1 y_1, \omega_2 y_2)$

$H \circ \psi = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2$, $H \circ \psi = h(y)$

Sistemas Hamiltonianos cercanos a integrables

$H(q,p)$ + F (n-integrales) $\longrightarrow$ $h(y)$

Poincaré PR3C de Euler $H(q,p)=\frac{\|P\|^2}{2}+p_1q_2-q_1p_2-\frac{1-\mu}{r_1}-\frac{\mu}{r_2}$

Sistema en $\mathbb{R}^4$ y se conserva H. $\longrightarrow \mathbb{R}^3$

Superficie de dim 2 : Σ

$f: \Sigma \to \Sigma$ es simpléctico

$f(p)=p$ $\quad Df(p)$ hiperbólica.

$\longrightarrow$ No puede haber otra integral.

1894

Sistema cercanos a integrable.

$$\dot y = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\dot x = -\frac{\partial h}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$H = h(y) + \varepsilon f(x,y)$$

ε es pequeña.

Idea Tomar H hacer una transf. simpléctica para llevar H a $\tilde h(y)$ en una vecindad.

Series de Lie

Consideramos χ función generatriz

$$\mathcal{L}_\chi(H)=\{\chi,H\}$$

$$K=e^{\varepsilon\mathcal{L}_\chi}H = H\circ T$$

$$K(\phi,J,\varepsilon)=h(J)+\varepsilon f(\phi,J)+\varepsilon\{\overset{?}{\chi},h\}+O(\varepsilon^2)$$

$\{\chi,h\}=\frac{\partial\chi}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial h}{\partial J}$ $\quad\chi$ aparece de manera lineal

A orden ε tenemos $\frac{\partial \chi}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial h}{\partial J} = -f(\phi,J)$

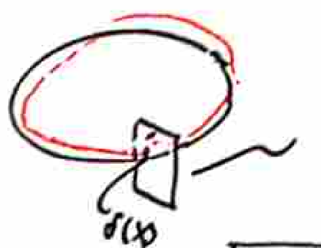
$$\frac{\partial h(J)}{\partial J}=\omega(J)$$

Sistemas Hamiltonianos cercanos a integrables

$H(q,p) + \underset{n\text{-integrales}}{F} \longrightarrow h(y)$

Poincaré PR3C de Euler $H(q,p)=\frac{\|p\|^2}{2} + p_1 q_2 - q_1 p_2 - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$

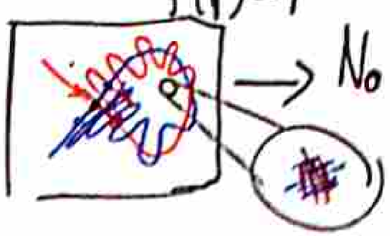
Sistema en $\mathbb{R}^4$ y se conserva $H. \to \mathbb{R}^3$



Superficie de dim 2 : Σ

$f: \Sigma \to \Sigma$ es simpléctico

$f(p)=p$ $\quad Df(p)$ hiperbólica.



$\longrightarrow$ No puede haber otra integral.

1894

Sistema cercanos a integrable.

$\dot{y} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}$

$\dot{x} = -\frac{\partial h}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y}$

$H = h(y) + \varepsilon f(x,y)$

$\frac{\partial \chi}{\partial \phi} \cdot \omega(J) = -f(\phi, J)$

$f(\phi,J) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_k(J) e^{2\pi i k\cdot\phi}, \quad \chi(\phi,J) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{\chi}_k(J) e^{2\pi i k\cdot}$

$\omega(J) = \frac{\partial h}{\partial J}$

Los coefs de Fourier satisfacen

$(2\pi i k\cdot\omega(J))\hat{\chi}_k(J) = -\hat{f}_k(J), \quad k \in \mathbb{Z}^n$

Idealmente $\hat{\chi}_k(J) = \frac{-\hat{f}_k(J)}{2\pi i k\cdot\omega(J)}$

No existe abierto tal que $2\pi i k\cdot\omega(J) \neq 0$

Problema de pequeños divisores

Sistemas Hamiltonianos cercanos a integrables

$$H(q,p) + \underset{n\text{-integrales}}{F} \longrightarrow h(y)$$

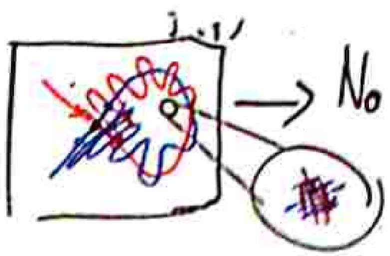
Poincaré PR3C de Euler. $H(q,p)=\frac{\|p\|^2}{2}+p_1q_2-q_1p_2-\frac{1-\mu}{r_1}-\frac{\mu}{r_2}$

En 1954, Kolmogorov en ICM de Vienna

el pdpd se puede resolver en conjuntos de Cantor de las acciones (Siguiendo trabajo de C. Siegel)

$\omega(J_0)$ Vector de rotación de un toro T^n

$\omega(J_0)$ son vectores irracionales que son difíciles de aproximar por vectores racionales.



→ No puede haber otra integral. 1894

Sistema cercanos a integrable.

$$\dot y = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \dot x = -\frac{\partial h}{\partial y} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$H = h(y)+\varepsilon f(x,y)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial\phi}\cdot\omega(J) = -f(\phi,J)$$

$$f(\phi,J)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat f_k(J)e^{2\pi i k\cdot\phi}, \quad \chi(\phi,J)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat\chi_k(J)e^{2\pi i k\cdot\phi}$$

$$\omega(J)=\frac{\partial h}{\partial J}$$

Los coefs de Fourier satisfacen

$$(2\pi i k\cdot\omega(J))\hat\chi_k(J) = -\hat f_k(J), \quad k\in\mathbb{Z}^n$$

Idealmente $\hat\chi_k(J) = \frac{-\hat f_k(J)}{2\pi i k\cdot\omega(J)}$ C. Siegel el cociente se va a cero exp c.r.a k.

No existe abierto tal que $2\pi i k\cdot\omega(J)\neq 0$

K54, A61, M62

Problema de pequeños divisores.

$$H = h(J)+O(\varepsilon^2)$$
$$= h(\tilde J)+O(\varepsilon^4)$$
$$= h(\tilde J)+O(\varepsilon^{2^n})$$

Un proceso iterativo que converge en espacios de funciones analíticas.