Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

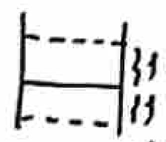
Posgrado en ciencias matemáticas UNAM IIMAS

Renato Calleja, 20 de mayo de 2025

Persistencia de toros invariantes para mapeos simplécticos por el método de la parametrización.

R. de la Llave, À. Jorba, J. Villanueva, A. González, "KAM theory without action-angle variables" 2005.

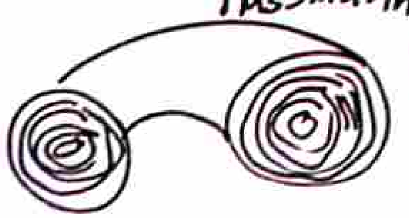
Clase pasada $\eta \in \mathcal{A}_\rho$



$$\varphi(\theta)-\varphi(\theta+\omega)=\eta(\theta), \quad \int_0^1 \eta(\theta)\,d\theta=0$$

$\exists \varphi \in \mathcal{A}_{\rho-\delta}$

Rüssmann $\|\varphi\|_{\rho-\delta} \le C\nu^{-1}\delta^{-\tau}\|\eta\|_\rho$



Hay un conjunto de Cantor en el espacio de frecuencias ω ($\omega\in\mathcal{D}^n_{\nu,\tau}$) donde los toros persisten $\varepsilon \ll 1$

La idea es buscar la parametrización de un toro invariante con frecuencia $\omega \in \mathcal{D}_{\nu,\tau}$

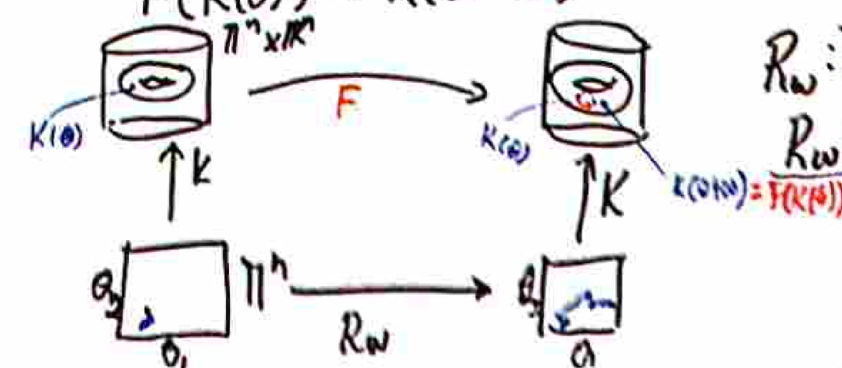
$$K:\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n$$

Además K satisface una ecuación de invarianza con respecto a $F:\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n$

$$F(K(\theta)) = K(\theta+\omega) \qquad \text{(Inv)}$$

$R_\omega:\mathbb{T}^n\to\mathbb{T}^n$

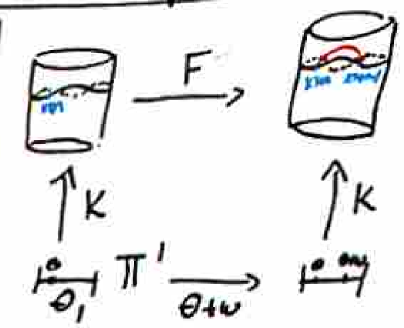
$R_\omega(\theta)=\theta+\omega$



Persistencia de toros invariantes para mapeos simplécticos por el método de la parametrización.

Ejemplo $F: \mathbb{T}\times\mathbb{R} \circlearrowleft$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+\varepsilon V'(x) \\ y+\varepsilon V'(x)\end{pmatrix}$$



$K:\mathbb{T}\to\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ $\quad K(\theta)=\begin{pmatrix} K^x(\theta) \\ K^y(\theta)\end{pmatrix}$

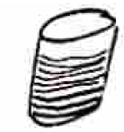
$$F\begin{pmatrix} K^x(\theta) \\ K^y(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^x(\theta+\omega) \\ K^y(\theta+\omega)\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$K^x(\theta)+K^y(\theta)+\varepsilon V'(K^x(\theta)) = K^x(\theta+\omega)$$
$$K^y(\theta)+\varepsilon V'(K^x(\theta)) = K^y(\theta+\omega)$$

Esta es una ecuación funcional en $K(\theta)=\begin{pmatrix} K^x(\theta) \\ K^y(\theta)\end{pmatrix}$

Caso $\varepsilon=0$



$$K^x(\theta)+K^y(\theta)=K^x(\theta+\omega)$$
$$K^y(\theta)=K^y(\theta+\omega)$$
$$K^x(\theta)=\theta, \quad K^y(\theta)=\omega$$

$K(\theta)=\begin{pmatrix} \theta \\ \omega\end{pmatrix}$ $\qquad \theta+\omega=\theta+\omega$ ✓ $\quad \omega=\omega$ ✓

Observación .) $K_{\theta_0}(\theta)=\begin{pmatrix} \theta+\theta_0 \\ \omega\end{pmatrix}$ es solución para $\theta_0\in\mathbb{T}$

..) Las K_{θ_0} son analíticas. $\mathcal{A}_\rho$

...) Para ε pequeña podríamos hacer series de Lindstedt, empezando por la solución para $\varepsilon=0$ $\quad K_{\varepsilon=0}(\theta)=\begin{pmatrix} \theta \\ \omega\end{pmatrix}$

Persistencia de toros invariantes para mapeos simplécticos por el método de la parametrización.

Resulta que los toros $\mathcal{K} = K(\mathbb{T}^n)$ son subvariedades Lagrangianas de $(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n, \Omega)$

var. simpléctica.

Para ser var. Lagr, tenía que 1) ser de dim n ✓

2) Ser isotropico (La restricción de la forma a $\mathcal{K}$ debe ser cero). $i : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ restricción entonces $i^* \Omega = 0$

En nuestro caso tenemos que demostrar que $K^* \Omega = 0$.

Notar que si $n=1$, todas las curvas son subvariedades isotrópicas de una variedad 2-dim.

Para demostrarlo en general, escribimos la forma Ω en coordenadas del cilindro $z \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

$z = (x, y)$

Escribimos la repr. matricial de las formas α_z y Ω_z ($d\alpha = \Omega$, la forma es exacta)

α) $a(z) = (a_1(z), \dots, a_{2n}(z))^T$

Ω) $J(z) = Da(z)^T - Da(z)$

↳ La representación matricial de Ω que satisface,

$$\Omega_z(u,v) = \langle u, J(z) v \rangle$$

La no-degeneración de la forma es equivalente a que $\det(J(z)) \neq 0$

Darboux

$$\Omega_0 = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j \quad y \quad \alpha_0 = \sum_{j=1}^n y_j \, dx_j$$

$$J(z) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad a_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z$$

Persistencia de toros invariantes para mapeos simplécticos por el método de la parametrización.

Def Un simplectomorfismo $F : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

$F^*\Omega = \Omega$ es exacto si existe una función $S : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ llamada primitiva de F tal que

$$F^*\alpha - \alpha = dS$$

En coords.

$$F^*\Omega = \Omega$$

$$DF(z)^T J(F(z)) DF(z) = J(z)$$

y

$$DS(z) = a(F(z))^T DF(z) - a(z)^T$$

$$K^*\Omega(u,v) = \langle DK(\theta)u, J(K(\theta)) DK(\theta)v \rangle$$

$$\iff DK(\theta)^T J(K(\theta)) DK(\theta) = 0 \text{ si es isotrópica.}$$

Para $n=1$

$$DK(\theta)^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} DK(\theta) = 0$$

Para n general,

$$F^*\Omega = \Omega, \quad F \circ K = K \circ R_\omega$$

$$(F \circ K)^*\Omega = K^* F^* \Omega = K^*\Omega$$

$$(F \circ K)^*\Omega = (K \circ R_\omega)^*\Omega$$

Para $l \in \mathbb{Z}$

$$F^l \circ K = K \circ R_{l\omega}$$

$$K^*\Omega = (K \circ R_{l\omega})^*\Omega, \quad \forall l \in \mathbb{Z}$$

Pero ω es racionalmente independiente $\Rightarrow$ $R_{l\omega}$ es un conjunto denso sobre el toro.

$\Rightarrow$ La forma $K^*\Omega$ = constante.

Además $K^*\Omega = \int_X K^*\Omega = \int_X K^* d\alpha = \int_X dK^*\alpha \overset{\text{teorema de Stokes}}{=} \int_{\partial X} K^*\alpha = 0$

La variedad es lagrangiana. !!