

Introducción a la Mecánica Analítica

**Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS**

Renato Calleja, 19 de noviembre de 2024

Los flujos de sistemas Hamiltonianos
son simplectomorfismos.

$$H: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H \in C^2$$

$$\dot{z} = J \nabla H(z, t)$$

$$\text{con flujo } \phi_{t, t_0}: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$D_z \rightarrow \frac{d}{dt} \phi_{t, t_0}(z) = J \nabla H(\phi_t(z), t)$$

$$\phi_{t, t_0}(z) = z$$

$$D_z \frac{d}{dt} \phi_t(z) = \frac{d}{dt} D_z \phi_t(z) = J \nabla_z^2 H(\phi_t(z), t) D_z \phi_t(z)$$

Teo Sea $\phi_{t, t_0}: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ el flujo de
 $\dot{z} = J \nabla H(z, t)$, ($H \in C^2$ en $\mathbb{R}^{2n}$) entonces
 ϕ_{t, t_0} es simplectico. Nota: $D_z \phi_{t_0}^T J D_z \phi_{t_0} = J$

Dem
 $D_z \phi_{t_0, t_0}(z) = I_{2n}$ para t_0 ✓ $I_{2n}^T J I_{2n} = J$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [D_z \phi^T J D_z \phi] &= \left[\frac{d}{dt} D_z \phi \right]^T J D_z \phi + D_z \phi^T J \left[\frac{d}{dt} D_z \phi \right] \\ &= [J \nabla_z^2 H(\phi_t, t) D_z \phi]^T J D_z \phi + D_z \phi^T \underbrace{J J}_{-I_{2n}} \nabla_z^2 H(\phi_t, t) D_z \phi(z) \\ &= D_z \phi^T \nabla_z^2 H(\phi_t, t)^T \underbrace{J J}_{-I_{2n}} D_z \phi - D_z \phi^T \nabla_z^2 H(\phi_t, t) D_z \phi(z) \\ &= D_z \phi^T [\nabla_z^2 H(\phi_t, t)^T - \nabla_z^2 H(\phi_t, t)] D_z \phi(z) = 0_{2n} \\ D_z \phi^T J D_z \phi &= J \quad \phi \text{ es simplectico } // \\ &\quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Los flujos de sistemas Hamiltonianos
son simplectomorfismos.

Ejemplo 1
Sistemas Hamiltonianos en $\mathbb{R}^{2n}$

$$H(z) = \frac{1}{2} z^T B z, \quad B \text{ matriz de } 2n \times 2n$$

$$\dot{z} = J \nabla H(z),$$

$$\nabla H(z) = \frac{1}{2} (B^T + B) z$$

$$\dot{z} = \frac{1}{2} J (B^T + B) z, \quad \text{sea } A = \frac{1}{2} (B^T + B)$$

A. matriz simétrica

$$\phi_t(z) = e^{tJA} z \quad \phi \text{ es un simplectomorfismo } \forall t$$

$$D\phi_t^T J D\phi_t = e^{tAJ^T} J e^{tJA} = e^{-tAJ} J e^{tJA} = J$$

Ejemplo 2 (Mapeo estándar)

$$f: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

$$(q, p) \mapsto (q + p + \varepsilon \sin q \pmod{2\pi}, p + \varepsilon \sin(q))$$

(Chirikov, Taylor)

Tokamak



150 millones de grados.

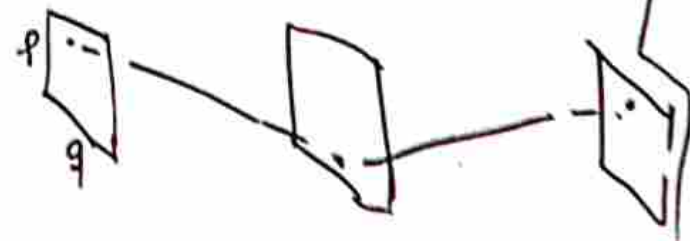
$$\dot{z} = J \nabla_z H(z, \varphi)$$

I) $H: \frac{p^2}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} V(q) \delta_{\varphi=k}$

En coords polares

II) $H(p, q, t) = \frac{p^2}{2} + \cos(q) + \varepsilon \sin(\omega t)$

Método de Euler Simpléctico



f simplectomorfismo (preserva la estructura simpléctica)

f simpléctica $f \circ f$, $f \circ f \circ f \dots \circ f$.

g simpléctica $f \circ g$

Teo
(i) Si A es matriz simpléctica, A^{-1} también

(ii) Si A y B matrices simpléticas, $A \cdot B$ también.

Dem
 A simpléctica $A^T J A = J$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$$\Rightarrow (i) A^T J = J A^{-1} =$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T A^T J = (A^{-1})^T J A^{-1} = J$$

$$(ii) B^T J B = J$$

$$(AB)^T J AB = B^T A^T J A B = B^T J B = J$$

Cor Sea $Sp(n) = \{ \text{matrices simpléticas de } 2n \times 2n \}$
tiene estructura de grupo.

Dem $Id_{2n} \in Sp(n)$ y el teorema //

Teoremas

(i) Sea $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ simpléctomorfismo,
entonces f^{-1} también lo es.

(ii) $f, g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ simpléctomorfismos, entonces
 $f \circ g$ también lo es.

Dem
(ii) $Df^T J Df = J$, $Dg^T J Dg = J$
y las inversas

$$Df \circ g(z) = Df(g(z)) Dg(z)$$

$$A = Df(g(z)), B = Dg(z)$$

$$Dg^{-1} \circ f^{-1}(z) = Dg^{-1}(f^{-1}(z)) Df^{-1}(z) //$$

Invarianza de las ecuaciones de Hamilton bajo transformaciones simplécticas

$\dot{z} = J \nabla_z H(z, t)$ (1) sist Hamiltoniano en $\mathbb{R}^{2n}$

cambio de coordenadas simpléctico

$z \mapsto y(z)$ simpléctico $D_z y(z)$ matriz simpléctica.
 $y \mapsto z(y)$ $D_y z(y)$ matr. simpl.

$$\tilde{H}(y, t) = H(z(y), t)$$

Entonces $\dot{y} = J \nabla_y \tilde{H}(y, t)$ (2)
 tiene trayectorias que se transforman a las trayectorias de (1) y viceversa.

Prop

Sea $\dot{z} = J \nabla_z H(z, t)$ en $\mathbb{R}^{2n}$, $z = y(z)$

con $y: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ difeomorfismo simpléctico

Entonces $\dot{y} = J \nabla_y \tilde{H}(y, t)$, con $\tilde{H}(y, t) = H(z(y), t)$

Dem

$$\nabla_z H(z, t) : \frac{\partial H}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial y_j}{\partial z_i} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_j}$$

$$H(z, t) = \tilde{H}(y(z), t)$$

$$z = z(y) \cdot \nabla_z H(z, t) = [D_z y(z)]^T \nabla_y \tilde{H}(y, t)$$

$$\dot{z} = [D_y z(y)] \dot{y}$$

$$\dot{z} = [D_y z(y)] \dot{y} = J [D_z y(z)]^T \nabla_y \tilde{H}(y, t)$$

$$z(y(z)) = z \Rightarrow [D_y z(y)] [D_z y(z)]^T = \text{Id}$$

$$\dot{y} = [D_z y(z)] J [D_y z(y)]^T \nabla_y \tilde{H}(y, t) = J \nabla_y \tilde{H}(y, t)$$

Corchete de Poisson

Prop

Sea T un simplectomorfismo en $\mathbb{R}^{2n}$, $z = T(y)$
($T \in C^\infty$), entonces $\{f, g\}(z) = \{f \circ T, g \circ T\}(y)$
($f, g \in C^\infty$).

Dem

Notación. $z = z(y)$, $f \circ T = \tilde{f}$, $g \circ T = \tilde{g}$

$$\{f, g\} = [D_z f]^T J [D_z g]$$

$$D f \circ T(z) = [DT(z)]^T D f(T(z))$$

$$\{f \circ T, g \circ T\} = [D_z f \circ T]^T J [D_z g \circ T]$$

$$= [DT(z)^T D f(T(z))]^T J [DT(z)^T D g(T(z))]$$

$$= D f(T(z))^T DT(z) J DT(z)^T D g(T(z))$$

$$= D f(y)^T J D g(y) = \{f, g\}(y) //$$