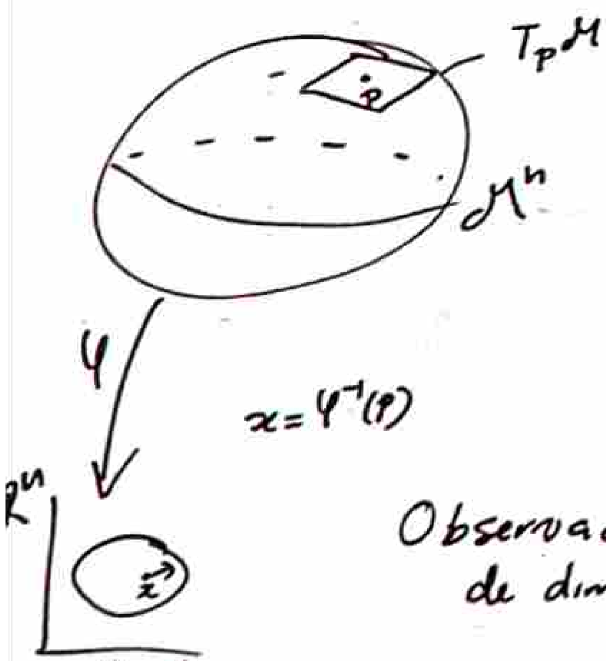
Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 19 de febrero de 2025

Espacio tangente



$T_p\mathcal{M}$ espacio tangente a la variedad sobre el punto $p \in \mathcal{M}$ (es isomorfo a $\mathbb{R}^n$)

$T\mathcal{M}$ espacio tangente a la variedad $\mathcal{M}$.

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$$

Observación $T\mathcal{M}$ es una variedad de dimensión $2n$.

Ejemplo

$\mathcal{M} = S^2$

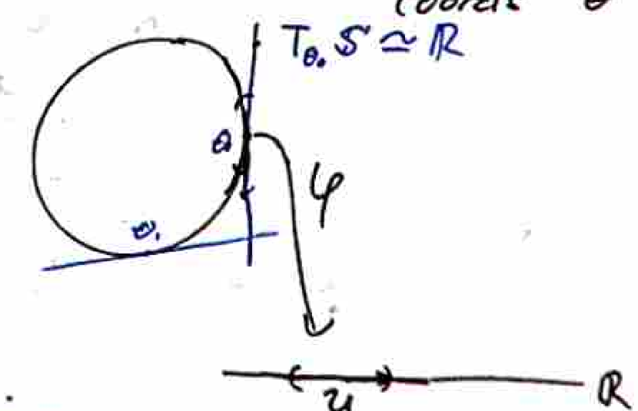
$TS^2 \simeq S^2 \times \mathbb{R}^2 \to$ dim 4

Ejemplo

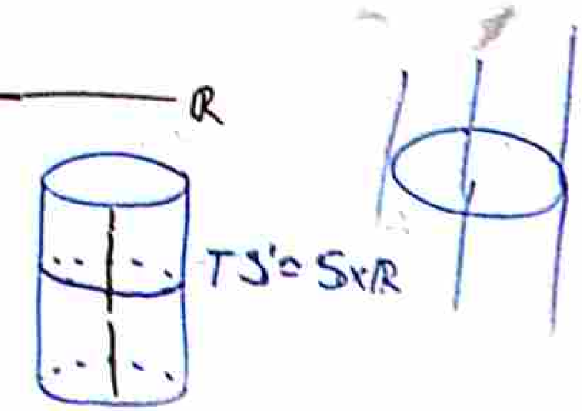
$\mathcal{M} = S^1$

$[0,1]$ con extremos identificados

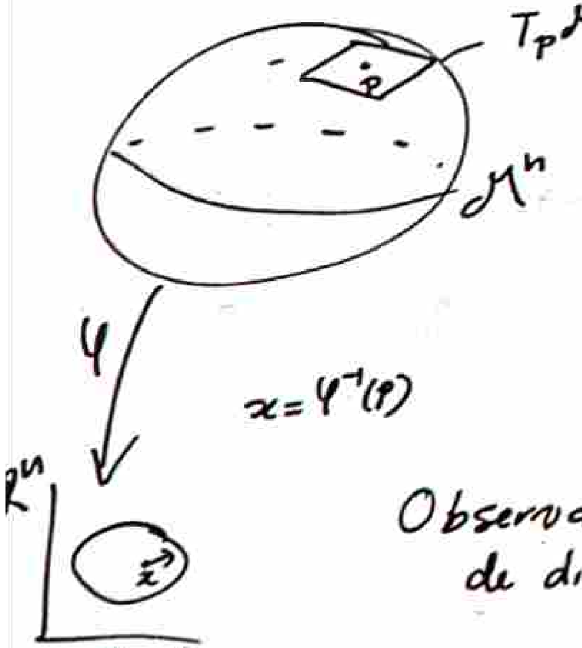
coords θ



$$TS^1 = \bigcup_{\theta \in S} T_\theta S$$



Espacio tangente



$T_p\mathcal{M}$ espacio tangente a la variedad sobre el punto $p \in \mathcal{M}$ (es isomorfo a $\mathbb{R}^n$)

$T\mathcal{M}$ espacio tangente a la variedad $\mathcal{M}$.

$x = \varphi^{-1}(p)$

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$$

Observación $T\mathcal{M}$ es una variedad de dimensión $2n$.

Ejemplo

$\mathcal{M} = S^2$

$TS^2 \simeq S^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \dim 4$

Sabemos que $\mathcal{M}$ es variedad.

$(\mathcal{U}, \varphi)$ es una carta

$\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$

$d\varphi$ es mapeo tangente

$d\varphi(p) : T_p\mathcal{M} \to T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$

$\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ abierto

$\mathcal{U} \times V \subset T\mathcal{M}$ abierto

$p \in \mathcal{U}, v \in V$

$(\varphi(p), d\varphi(p)v)$

La carta de $T\mathcal{M}$ es

$(\mathcal{U} \times V, (\varphi(\cdot), d\varphi(\cdot)))$

$T\mathcal{M} \xrightarrow{(\varphi, d\varphi)} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$

$\dim T\mathcal{M} = 2n$

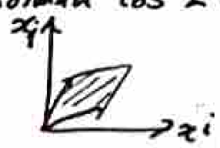
De Moser

Una 2-forma en $\mathbb{R}^m$ se puede escribir,

$$\alpha(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j$$

Recordar que $dx^i \wedge dx^j (v, w) = v_i w_j - v_j w_i$ $\to$ area de el paralelogramo que forman los 2 vectores

$v, w \in \mathbb{R}^m$



$v = (v_i),\ w = (w_j) \in \mathbb{R}^m$

Para estudiar las 2-formas, Moser & Zehnder usan la sig. notación

$$\alpha(x) = \langle dx, A(x)(\wedge dx) \rangle$$

$$A = (a_{ij}), \quad dx = (dx_i)$$

Obs $dx^i \wedge dx^i = 0$

$u : y \mapsto x = u(y)$ de $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^m$ tenemos que

$$u^* \alpha(y) = \langle u_y\, dy, A \circ u(y)\, (\wedge u_y dy) \rangle$$

$$= \langle u_y\, dy, A \circ u(y)\, u_y (\wedge dy) \rangle$$

$$= \langle dy, \underbrace{u_y^T A \circ u(y) u_y} (\wedge dy) \rangle$$

$$= \langle dy, B(y) (\wedge dy) \rangle$$

Esta nueva forma $u^* \alpha$ representada por

$$B(y) = u_y^T A \circ u(y) u_y$$

En particular, si u es un cambio de coordenadas de $\mathbb{R}^m$ con u_y no-singular, y recordando la ley de transformación de campos vectoriales $f(x), g(x)$ en $\mathbb{R}^n$

$$u^* \alpha(y) (u^* f(y), u^* g(y)) = \alpha(x) (f(x), g(x))$$

$x = u(y)$ es la dependencia de coordenadas.

De Moser

Sea la 2-forma en $\mathbb{R}^{2n}$

$$\omega = \frac{1}{2}\langle J\,dx, (\wedge dx)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(dp_j\wedge dq_j - dq_j\wedge dp_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} dp_j\wedge dq_j$$

si $x_j = q_j$, $x_{j+n} = p_j$, $j=1,\dots,n$

$$\omega(v,w) = \langle Jv, w\rangle$$

Es la forma bilineal de geo. simpléctica.

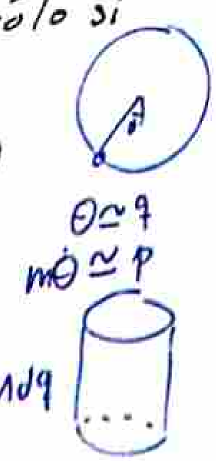
Def

Un mapeo $x = \mathcal{U}(y)$ es canónico si y sólo si

$$\mathcal{U}^*\omega = \omega \qquad \text{donde } \omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j\wedge dq_j$$

(Los mapeos canónicos dejan ω invariante.)

$$(\mathcal{U}_y^T J\, \mathcal{U}_y = J)$$



Corchetes de Poisson

Sean F, G dos funciones suaves de $\mathbb{R}^{2n}$, definimos la función

$$\{F,G\} = \langle F_p, G_q\rangle - \langle F_q, G_p\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j}$$

$x_j = q_j$, $x_{j+n} = p_j$, $j=1,\dots,n$

$$\{F,G\} = \langle J\nabla F, \nabla G\rangle$$

Lema

Un mapeo es canónico si y sólo si el corchete de Poisson se transforma,

$$\{F,G\}\circ\mathcal{U} = \{F\circ\mathcal{U}, G\circ\mathcal{U}\}$$

Dem

$$\{F\circ\mathcal{U}, G\circ\mathcal{U}\} = \langle J\nabla(F\circ\mathcal{U}), \nabla(G\circ\mathcal{U})\rangle = \langle J\,\mathcal{U}_y^T\nabla F\circ\mathcal{U}, \mathcal{U}_y^T\nabla G\circ\mathcal{U}\rangle$$

$$= \langle \mathcal{U}_y J\, \mathcal{U}_y^T \nabla F\circ\mathcal{U}, \nabla G\circ\mathcal{U}\rangle = \langle J\nabla F\circ\mathcal{U}, \nabla G\circ\mathcal{U}\rangle = \{F,G\}\circ\mathcal{U} \quad //$$