Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 18 de marzo de 2025

Simplectomorfismos

Si $(\mathcal{M}, \Omega)$, $\Omega = d\alpha$

(si $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$, $\alpha = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j$)

$f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, simpléctico si $f^*\Omega = \Omega$

y f es exacto simpléctico si

$f^*\alpha - \alpha$ es exacto

es decir $f^*\alpha - \alpha = dF$ donde F es función de $\mathcal{M}$.

$$0 = d^2F = df^*\alpha - d\alpha = f^*d\alpha - d\alpha = f^*\Omega - \Omega$$

$$\Rightarrow f^*\Omega = \Omega$$

Campos vectoriales Hamiltonianos en variedades simplécti

Sea $(\mathcal{M}, \Omega)$ una variedad simpléctica, la estructura simpléctica Ω es no degenerada, entonces genera un isomorfismo

$\alpha \longrightarrow X_\alpha$ entre las 1-formas y los campos vectoriales.

$$\alpha = i_{X_\alpha}\Omega = \Omega(X_\alpha, \cdot)$$

Podemos distinguir 2 subespacios en el espacio de campos vectoriales por el hecho de que las 1-formas son cerradas y exactas.

Def

Un campo vectorial se llama Hamiltoniano si la forma

$$\alpha = \Omega(X, \cdot) = i_X \Omega$$

es cerrada, es decir que $d\alpha = 0$.

Como $d\Omega = 0$, entonces por la fórmula de Cartan

$$\mathcal{L}_X \Omega = d(i_X \Omega) + i_X \cancel{d\Omega}^{\,0}$$
$$= d\alpha = 0$$

es equivalente a

$$\mathcal{L}_X \Omega = 0$$

Campos vectoriales Hamiltonianos en variedades simplécti

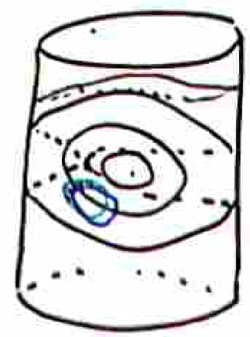
El campo vectorial se llama Hamiltoniano exact si la 1-forma no sólo es cerrada sino también exacta.

$$\alpha = dH \quad (\text{ó } \alpha = -dH), \ H \text{ función de } \mathcal{M}$$

y se llama función Hamiltoniana.

Ejemplo (Péndulo) $\mathcal{M} = \mathbb{T} \times \mathbb{R} \quad z = (q, p) \in \mathcal{M}$

$$\Omega = dp \wedge dq, \quad d\Omega = 0$$



$$\dot{q} = p \qquad X = p\frac{\partial}{\partial q} - \operatorname{sen}(q)\frac{\partial}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\operatorname{sen}(q).$$

$$\mathcal{L}_X \Omega = d(i_X \Omega) = d\left(dp(X)dq - dq(X)dp\right)$$
$$= d(-\operatorname{sen}(q)dq - p\,dp)$$
$$= -\cos(q)\cancel{dq \wedge dq}^{\,0} - \cancel{dp \wedge dp}^{\,0} = 0$$

$$\alpha = -\operatorname{sen}(q)dq - p\,dp \quad \boxed{H = \frac{1}{2}p^2 + \cos(q)} \Rightarrow dH = -\alpha$$

Def

Un campo vectorial se llama Hamiltoniano si la forma

$$\alpha = \Omega(X, \cdot) = i_X \Omega$$

es cerrada, es decir que $d\alpha = 0$.

Como $d\Omega = 0$, entonces por la fórmula de Cartan

$$\mathcal{L}_X \Omega = d(i_X \Omega) + \cancel{i_X d\Omega}^{\,0}$$
$$= d\alpha = 0$$

es equivalente a

$$\mathcal{L}_X \Omega = 0$$

Por el lema de Poincaré-Cartan, todo campo Hamiltoniano es localmente Hamiltoniano exacto.

Campos vectoriales Hamiltonianos en variedades simplécti

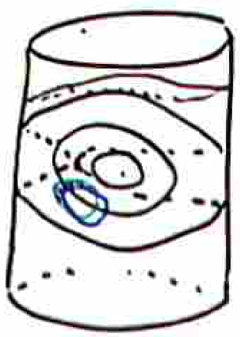
El campo vectorial se llama Hamiltoniano exact si la 1-forma no sólo es cerrada sino también exacta.

$$\alpha = dH \quad (\text{ó } \alpha = -dH), \ H \text{ función de } \mathcal{M}$$

y se llama función Hamiltoniana.

Ejemplo (Péndulo) $\mathcal{M} = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ $z = (q, p) \in \mathcal{M}$

$\Omega = dp \wedge dq$, $d\Omega = 0$



$$\dot{q} = p \qquad X = p\frac{\partial}{\partial q} - \operatorname{sen}(q)\frac{\partial}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\operatorname{sen}(q)$$

$$\mathcal{L}_X \Omega = d(i_X \Omega) = d\left(dp(X)dq - dq(X)dp\right)$$
$$= d(-\operatorname{sen}(q)dq - p\,dp)$$
$$= -\cos(q)\,\cancel{dq \wedge dq}^{\,0} - \cancel{dp \wedge dp}^{\,0} = 0$$

$\alpha = -\operatorname{sen}(q)dq - p\,dp$ $\boxed{H = \frac{1}{2}p^2 + \cos(q)}$ $\Rightarrow dH = -\alpha$

Denotamos un campo Hamiltoniano exacto X por

$$\Omega(X,\cdot) = -dH \quad y \quad X = X_H$$

y notamos que H está determinado módulo una constante siempre que la variedad sea conexa.

La función H es un primera integral de movimiento.

$$\frac{d}{dt} H(\varphi_t(x)) = dH(X_H)\circ\varphi_t$$
$$= -\Omega(X_H, X_H)\circ\varphi_t \overset{\text{por antisimetría}}{=} 0$$

<u>Propiedad del pull-back</u>

Sea $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ clase C^∞, $\Omega \in \Omega^k(\mathcal{N})$

$$f^*(i_X \Omega) = i_{f^*X} f^*\Omega$$

<u>Campos vectoriales Hamiltonianos en variedades simplécti</u>

<u>Teo</u> Sea $(\mathcal{M}_1, \Omega_1)$ y $(\mathcal{M}_2, \Omega_2)$ dos vars. simplécti y $\psi: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ difeomorfismo. Entonces ψ es simpléctico si y sólo si $\psi^* X_H = X_K$ donde $K = H\circ\psi$ para H en $\mathcal{M}_2$.

<u>Dem</u> ψ simpléctica. $\psi^*\Omega_2 = \Omega_1$ y $X = X_H$

Entonces

$$d(H\circ\psi) = \psi^* d\overset{-\Omega_2(X_H,\cdot)}{H} = -\psi^*(i_{X_H}\Omega_2) = -i_{\psi^* X_H}\psi^*\Omega_2 = -i_{\psi^* X_H}\Omega_1$$
$$= -\Omega_1(\psi^* X_H, \cdot)$$

Este Hamiltoniano es exacto en $(\mathcal{M}_1, \Omega_1)$

$$\Omega_1(X_H, \cdot) = -dk \implies \psi^* X_H = X_K = X_{H\circ\psi}$$

El converso es análogo //

Observamos que si $(\mathcal{M}, \Omega)$ es simpléctica exacta, $\Omega = d\alpha$, entonces el flujo φ_t de un campo Hamiltoniano exacto $X = X_H$ son mapeos exactos simplécticos

$$(\varphi_t)^* \alpha - \alpha = d(f_t)$$ con f_t función para cada t