Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

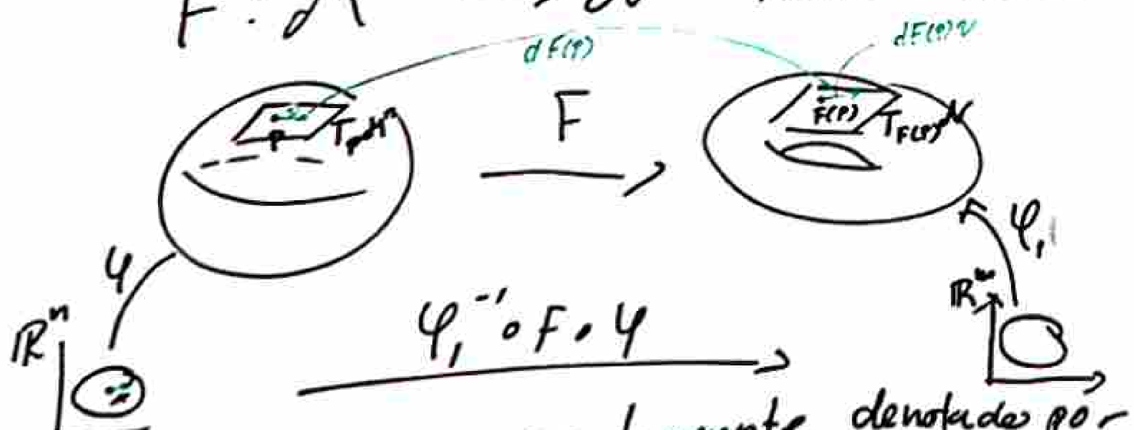
Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 18 de febrero de 2025

La derivada de una función entre variedades

$F : \mathcal{M}^n \longrightarrow \mathcal{N}^m$ función diferenciable



La derivada es un mapeo tangente denotado por

$$dF(p) : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$$

como el mapeo lineal que en coordenadas $(\mathcal{U}, \varphi)$ de p y $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ del punto $F(p) \in \mathcal{N}$ se representa por el mapeo lineal,

$$v \longmapsto (\varphi_1^{-1} \circ F \circ \varphi)_x (x) v \ , \quad x = \varphi^{-1}(p)$$

Campos vectoriales en variedades

Un campo vectorial X en una variedad asocia a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un vector tangente $X(p) \in T_p\mathcal{M}$.

Tenemos la condición de isomorfismo

$$\boxed{v_1 = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi)_x (x) v \ , \quad x = x(0) = \varphi^{-1}(p) \ \text{(ISO)}}$$

En coordenadas locales $(\mathcal{U}, \varphi)$ sobre p se representa el campo vect. como una función vectorial

$$f(x) \in \mathbb{R}^n, \quad x = \varphi^{-1}(p)$$

$$f : \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Si $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ son otras coordenadas de p, el vector $X(p)$ se representa por $g(y) \in \mathbb{R}^n$, $y = \varphi_1^{-1}(p)$ y por (ISO)

$$g(y) = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi)_x (x) f(x) \qquad y = \varphi_1^{-1} \circ \varphi(x)$$

Esta es la ley de transformación de campos vectoriales

$$y = U(x) = \varphi_1^{-1} \circ \varphi(x), \quad g(y) = U_x \cdot f \circ U^{-1}(y), \quad f(x) = (U_x)^{-1} \cdot g \circ U(x)$$

(Comp)

Si tenemos campos vectoriales escritos en coordenadas locales de $\mathcal{M}$, estos definen campos vectoriales sobre la variedad si se satisfacen las condiciones de compatibilidad (Comp) para los mapeos de transición.

También podemos definir los campos por operadores diferenciales

$$X = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{donde } f = (f_1, \dots, f_n)$$

es la función vectorial de antes.

Consideramos una curva $t \longmapsto \varphi^{-1} \circ c(t) = x(t)$, tiene el vector tangente

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1} \circ c)(0) = f(x) \in \mathbb{R}^n$$

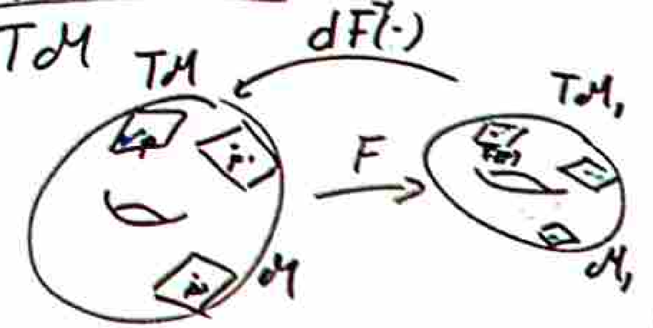
Si G es una función de $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt} G(\varphi^{-1} \circ c(t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial G}{\partial x_j} = XG$$

Es decir, XG coincide con la derivada direccional de G en la dirección del campo f

Si tenemos $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$ difeomorfismo entre 2 variedades de la misma dimensión, esto da lugar a una transformación de campos vectoriales que va hacia atrás de $T\mathcal{M}_1$ hacia $T\mathcal{M}$

$$\left(T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}\right)$$



y se llama "pull back"

Esto mapea un campo vectorial Y en $\mathcal{M}_1$ en un campo vectorial $X = F^*(Y)$ en $\mathcal{M}$ definido por

$$F^*(Y)(p) = d(F^{-1})\, Y \circ F(p) \qquad (PB)$$

"X es el pull-back de Y vía F"

Formas diferenciales en variedades

Una k-forma α asocia a todo punto $p \in M$ una forma k-multilineal α_p antisimétrica sobre el espacio tangente T_pM

T_p^*M

$$\alpha_p(X_1, \dots, X_k), \quad X_j \in T_pM$$

En coordenadas locales, $x = (x_1, \dots, x_n)$ de M

$$\alpha_x = \sum a^{i_1, \dots, i_k} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} f_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

En esta base de $\mathbb{R}^n$ $e_1, \dots, e_n$ ó $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$,

la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ $e^1, \dots, e^n$ ó $(dx_1, \dots, dx_n)$

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} \quad \text{ó} \quad dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

Recordemos que

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(v_1) & \dots & dx_{i_k}(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_{i_1}(v_k) & \dots & dx_{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$$

$dx_{i_i}(v_j)$ es la i-ésima forma evaluada en el j-ésimo vector.

Formas diferenciales en variedades

Una k-forma α asocia a todo punto $p \in M$ una forma k-multilineal α_p antisimétrica sobre el espacio tangente T_pM

$\alpha_p(X_1, \dots, X_k)$, $X_j \in T_pM$

En coordenadas locales, $x = (x_1, \dots, x_n)$ de M

$$\alpha_x = \sum a^{i_1, \dots, i_k} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

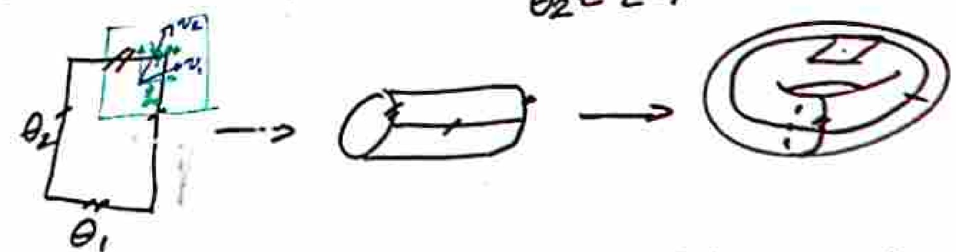
$$X_j = \sum_{k=1}^{n} f_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

En esta base de $\mathbb{R}^n$ $e_1, \dots, e_n$ ó $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ $e^1, \dots, e^n$ ó $(dx_1, \dots, dx_n)$

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} \quad \text{ó} \quad dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

Ejemplo

Consideremos el toro con coordenadas locales θ_1, θ_2. $\theta_1 \in [0,1]$ con extremos identificados, $\theta_2 \in [0,1]$ " "



$d\theta_1, d\theta_2$ son coordenadas del espacio cotangente

$\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}$ son coords del espacio tangente

$v_1, v_2 \in \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}\right\}$

$$d\theta_1 \wedge d\theta_2 (v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} d\theta_1(v_1) & d\theta_2(v_1) \\ d\theta_1(v_2) & d\theta_2(v_2) \end{pmatrix}$$

$$= d\theta_1(v_1)\, d\theta_2(v_2) - d\theta_1(v_2)\, d\theta_2(v_1) = \text{área del paralelogramo entre } v_1 \text{ y } v_2.$$

Formas diferenciales en variedades

Una k-forma α asocia a todo punto $p \in M$ una forma k-multilineal α_p antisimétrica sobre el espacio tangente T_pM

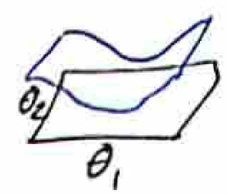
T_p^*M

$\alpha_p(X_1, \dots, X_k)$, $X_1 \in T_pM$

En coordenadas locales, $x = (x_1, \dots, x_n)$ de M

$$\alpha_x = \sum a^{i_1, \dots, i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} f_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

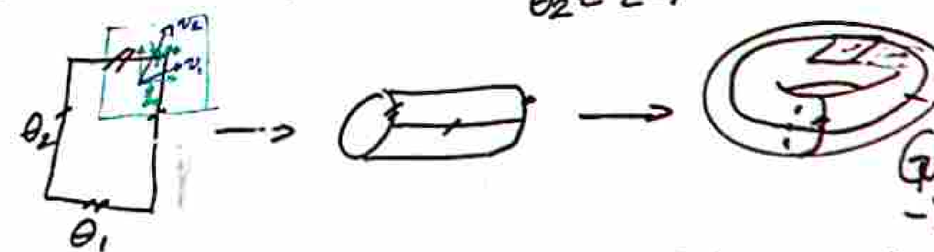


En esta base de $\mathbb{R}^n$ $e_1, \dots, e_n$ ó $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$,
la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ $e^1, \dots, e^n$ ó $(dx_1, \dots, dx_n)$

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} \quad \text{ó} \quad dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

Ejemplo

Consideremos el toro con coordenadas locales θ_1, θ_2. $\theta_1 \in [0,1]$, $\theta_2 \in [0,1]$ con extremos identificados



Lee
Guillemin-Pollock

$d\theta_1, d\theta_2$ son coordenadas del espacio cotangente

$\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}$ son coords del espacio tangente

$v_1, v_2 \in \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}\right\}$

$$a(\theta_1,\theta_2)\, d\theta_1 \wedge d\theta_2 (v_1, v_2) = a(\theta)\det\begin{pmatrix} d\theta_1(v_1) & d\theta_2(v_1) \\ d\theta_1(v_2) & d\theta_2(v_2) \end{pmatrix}$$

$$a(\theta)\left[d\theta_1(v_1)\,d\theta_2(v_2) - d\theta_1(v_2)\,d\theta_2(v_1)\right]$$ = área del paralelogramo entre v_1 y v_2.