Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

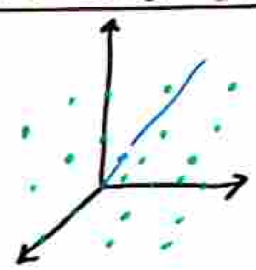
Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 16 de mayo de 2025

Numeros irracionales Diofánticos

$\omega \in \mathbb{R}^n$



$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ rac. indep

$\omega \cdot k = \sum_{j=1}^{n} k_j \omega_j \notin \mathbb{Z}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \cdot \omega$

Buscamos cotas superiores

$$[\mathrm{dist}\,(\omega \cdot k, \mathbb{N})]^{-1}$$

$k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $|k|_1 = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$

En 2 dim

$\omega = (\omega_1, \omega_2)$ $\quad k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \notin \mathbb{Z}$

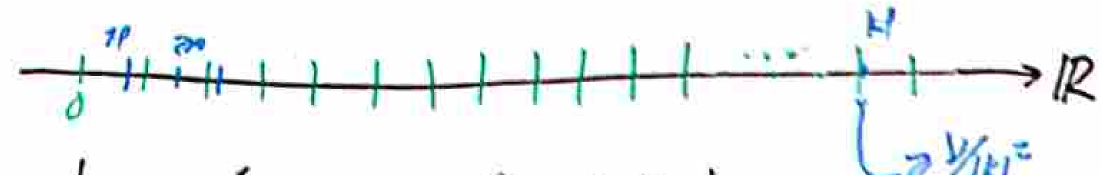
$\iff \omega_1/\omega_2 \neq l/m$ $\quad l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\rho = \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ irracional.

Siegel $\quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

$|\rho \cdot k - n| \geq \nu/|k|^{\tau}$, $\nu > 0$, $\tau \geq 1$

Decimos que ρ es un número diofántico.



Los números más difíciles de aprox tienen $\tau = 1$.

Numeros irracionales Diofánticos

Ejemplo

Veamos que $w = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es muy dificil de aproximar por racionales.

Observación de Liouville.

$$P(w) = w^2 - w - 1 = 0$$

En particular m/n no es raiz de P

$$P(m/n) \neq 0 \qquad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

pero $n^2 P(m/n) = m^2 - mn - n^2 \in \mathbb{Z}$

$$|n^2 P(m/n)| \geq 1 \Rightarrow |n^2 P(m/n) - n^2 P(w)| \geq 1$$

$$n^{-2} \leq |P(m/n) - P(w)| \leq \underbrace{|P'(\xi)|}_{\nu^{-1}} |m/n - w|$$

$$|w \cdot n - m| \geq \nu/n \longrightarrow w = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ es diofántico con } \tau = 1.$$

Resultado clásico de Liouville

Teorema

Sea $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $P(w) = 0$

P polinomio de grado l con coeficientes enteros

y tal que

$$P'(w) = 0, \ldots, P^{(j)}(w) = 0, P^{(j+1)}(w) \neq 0$$

Entonces tenemos que para alguna $C > 0$

$$|w - m/n| \geq C / n^{l/j+1}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Dem

Tarea: (Sug: seguir la dem de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) //

C. Roth

si w es irracional algebraico entonces,

$$|w - m/n| \geq C_\varepsilon \cdot n^{-2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Numeros irracionales Diofánticos

Def
Un número ω se llama Diofántico de tipo (ν, τ) para $\nu > 0$ y $\tau \geq 1$ si

$$|\omega - p/q| \geq \nu |q|^{-1-\tau} \quad (D)$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$. Notación $\omega \in D_{(\nu,\tau)}$

→ Un número que no es Diofántico se llama número de Liouville.

En dimensiones mayores hay 2 condiciones

$$|\omega \cdot k - l|^{-1} \leq C|k|^{\tau}, \quad \forall (k,l) \in (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \mathbb{Z})$$

$$|\omega \cdot k|^{-1} \leq C|k|^{\tau}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\omega = \frac{1}{\omega_n}(\omega_1, \dots, \omega_n) = (-\omega_1/\omega_n, \dots, -1)$$

Ejemplo (Constante de Liouville)

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = 0.1100010\dots010\dots010.$$

es irracional.

Es posible probar que

$$q_n = 10^{n!}, \quad P_n = q_n \sum_{j=1}^{n} 10^{-j!}$$

Son buenos aproximantes de α.

$$|\alpha - P_n/q_n| < 1/q_n^n$$

↳ α es fácil de aproximar.

Ecuaciones cohomológicas de coeficientes constantes

$$\varphi(\theta)-\varphi(\theta+\omega)=\eta(\theta) \quad \dots (Coh)$$

donde $\eta : \mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $\int_0^1 \eta(\theta)\,d\theta=0$

función periódica, con promedio cero.

Solución formal en espacio de Fourier

$$\eta(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k\cdot\theta}, \quad \eta_0=0$$

$$\varphi(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\cdot\theta}$$

incognitas.

En Fourier

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\cdot\theta}-\hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\cdot\theta} e^{2\pi i k\cdot\omega}\right]=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_k e^{2\pi i k\cdot\theta}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}_k(1-e^{2\pi i k\cdot\omega})e^{2\pi i k\theta}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_k e^{2\pi i k\cdot\theta}$$

A orden k

$$\hat{\varphi}_k(1-e^{2\pi i k\cdot\omega})=\hat{\eta}_k$$

?

Si $k\neq 0$, $\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ entonces formalmente

$$\hat{\varphi}_k=\frac{\hat{\eta}_k}{(1-e^{2\pi i k\cdot\omega})}$$

Si $k=0$

$\hat{\varphi}_0(1-1)=0 \Rightarrow$ puedo escoger la $\hat{\varphi}_0$ que yo quiera. $\hat{\varphi}_0=C$.

La solución formal es

$$\varphi(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\hat{\eta}_k}{1-e^{2\pi i k\omega}}e^{2\pi i k\theta}$$

Ecuaciones cohomológicas de coeficientes constantes

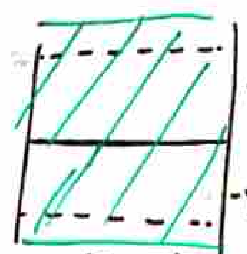
$$\varphi(\theta)-\varphi(\theta+\omega)=\eta(\theta) \quad \ldots (Coh)$$

donde $\eta:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $\int_0^1 \eta(\theta)\,d\theta=0$

$$\varphi(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{\eta}_k}{1-e^{2\pi i k\omega}}\, e^{2\pi i k\theta}, \quad \eta\in \mathcal{A}_\rho$$

1) Principio del maximo

$$\| e^{2\pi i k\theta}\|_{\rho-\delta} \le e^{2\pi(\rho-\delta)|k|}$$



para cualquier $n\in\mathbb{N}$

2) $$\|\varphi\|_{\rho-\delta} \le C\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|\hat{\eta}_k|}{|2\pi i(k\omega-n)|}\, e^{2\pi(\rho-\delta)|k|}$$

si $\omega\in\mathcal{D}(\nu,\tau)$

$$\le \frac{C}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \nu^{-1} e^{-2\pi|k|\rho}\, |k|^{\tau}\, \|\eta\|_\rho\, e^{2\pi(\rho-\delta)|k|}$$

$$\le \frac{C\nu^{-1}\|\eta\|_\rho}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k|^{\tau} e^{-2\pi\delta|k|}$$

$\varphi_{n+1}-2\varphi_n+\varphi_{n-1} = \ldots \in V'(\theta_n)$

$\ell(\theta+\omega)-2\ell(\theta)+\ell(\theta-\omega)$

Podemos comparar la serie con la integral

$$\int_0^\infty x^{\tau} e^{-2\pi\delta x}\,dx = \frac{1}{(2\pi\delta)^{\tau+1}}\,\tau!$$

En $\mathbb{R}$

$$\|\varphi\|_{\rho-\delta} \le C\,\nu^{-1}\,\delta^{-\tau-1}\,\|\eta\|_\rho$$

Si $\eta\in\mathcal{A}_\rho$ analítica con ancho de banda ρ

$\varphi\in\mathcal{A}_{\rho-\delta}$ analítica con ancho de banda $\rho-\delta$

Hay una pérdida de analiticidad

$\rho \longrightarrow \rho-\delta$

Tarea: En $\mathbb{R}^n$

$$\|\varphi\|_{\rho-\delta} \le C\,\nu^{-1}\,\delta^{-(\tau+n)}\,\|\eta\|_\rho$$

La proxima clase veremos el resultado de Rüssmann.

$$\|\varphi\|_{\rho-\delta} \le C(\tau)\,\nu^{-1}\,\delta^{-\tau}\,\|\eta\|_\rho$$