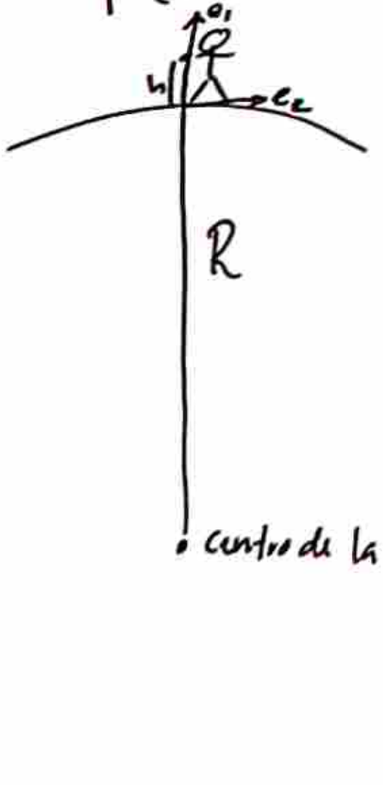
Introducción a la Mecánica Analítica

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS

Renato Calleja, 13 de agosto de 2024

Simplificación del potencial gravitacional

$$F(\underline{r}) = -G\,\frac{mM}{|\underline{r}|^2}\cdot\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$



$R = 6.371\times10^{6}\ m$

$M = 5.972\times10^{24}\ kg$

$G = 6.674\times10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

Partícula

$R+h \simeq R$, $h/R \ll 1$

$|\underline{r}| \simeq -R$, $\frac{1}{|\underline{r}|^2} \simeq \frac{1}{R^2}$

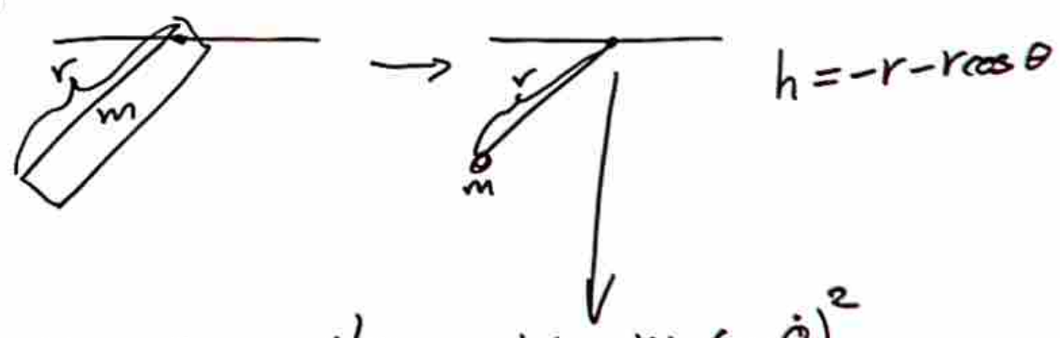
$\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = e_1$

$g = G\,\frac{M}{R^2} \simeq 9.8\ m/s^2$

$\underline{F \simeq -mge_1}$

$g = 9.7827\ m/s^2$

Péndulo matemático



Energía cinética $K = \frac{m}{2}(r\dot{\theta})^2$

Energía potencial $U(h) = -mgr(1+\cos\theta)$

Energía total $E = K + U$

$$E = \frac{m}{2}(r\dot{\theta})^2 - mgr(1+\cos\theta)$$

$\dot{\theta} = v$

$\dot{v} = g\sin\theta$

$F(h) = -\nabla U(h) = (0, -mgr\sin\theta)$

Ec. de Newton

$mr\ddot{\theta} = +mgr\sin\theta \rightarrow \ddot{\theta} = +g\sin\theta$

La energía del péndulo se conserva

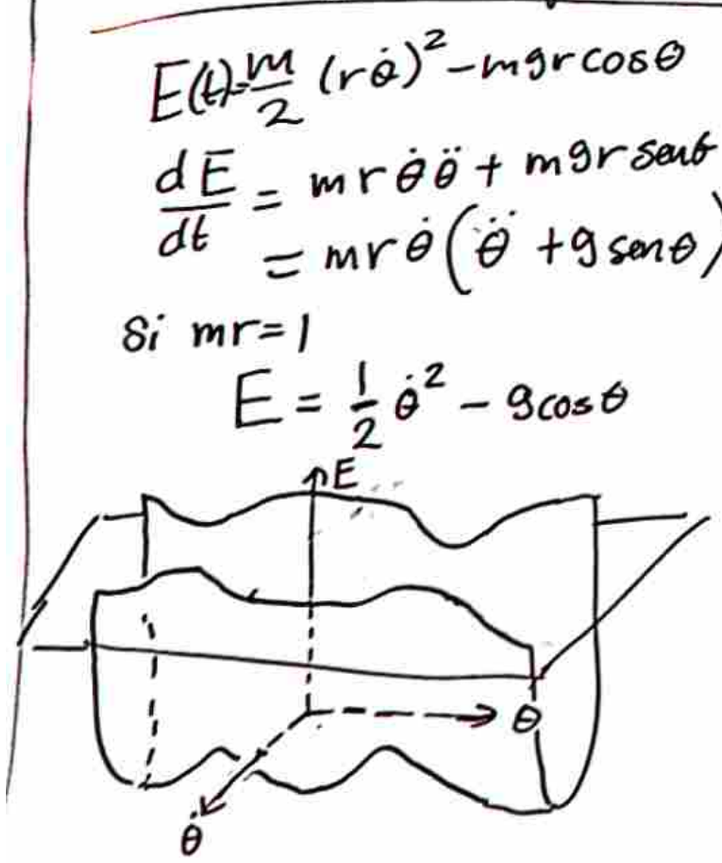
$$E(t) = \frac{m}{2}(r\dot{\theta})^2 - mgr\cos\theta$$

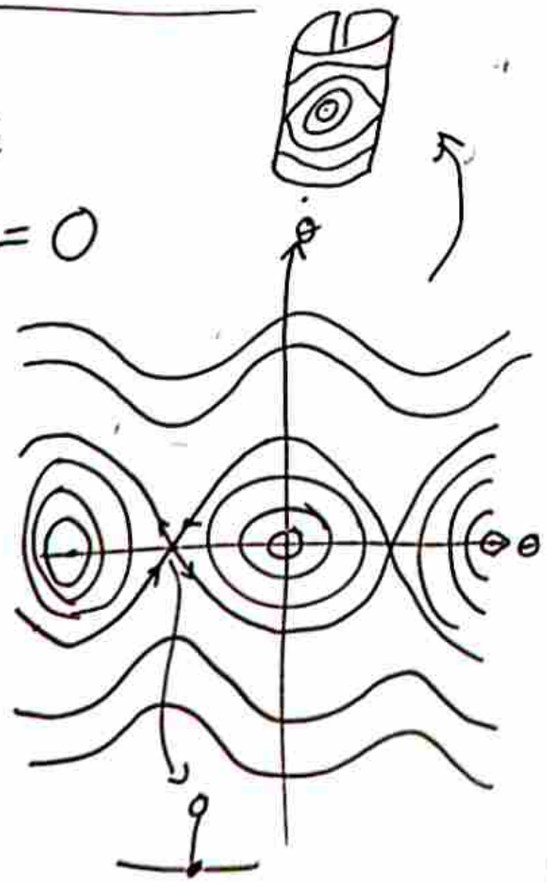
$$\frac{dE}{dt} = mr\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}$$

$$= mr\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + g\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = 0$$

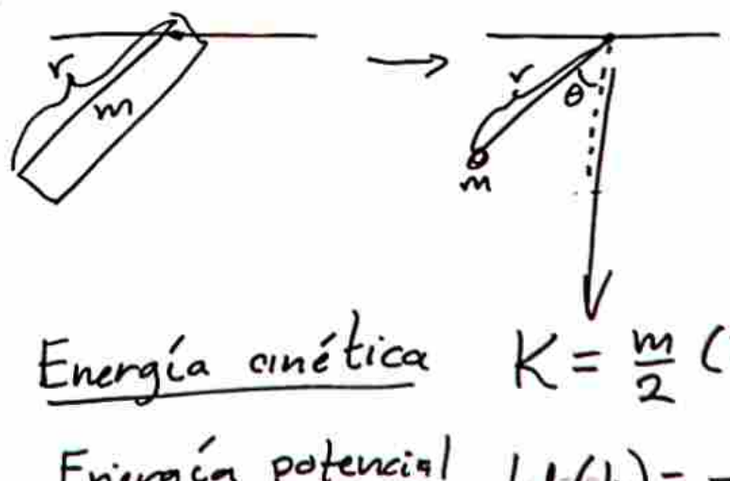
si $mr = 1$

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - g\cos\theta$$





Péndulo matemático



$h = -r\cos\theta$

$\theta \approx 0$

$\ddot{\theta} = -g\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\quad \ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\theta$

Energía cinética $K = \frac{m}{2}(r\dot{\theta})^2$

Energía potencial $U(h) = -mgr(\cos\theta)$

Energía total $E = K + U$

$$E = \frac{m}{2}(r\dot{\theta})^2 - mgr(\cos\theta)$$

$\dot{\theta} = v$

$\dot{v} = -g\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$F(h) = -\nabla U(h) = (0, -mgr\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Ecs. de Newton

$$mr\ddot{\theta} = -mgr\,\mathrm{sen}\,\theta \rightarrow \ddot{\theta} = -g\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Sistemas disipativos

Sea $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$

$$m\ddot{\underline{r}} = -\nabla U(\underline{r}) - \alpha \dot{\underline{r}}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^+, \ \alpha > 0$$

¿Qué sucedo con la energía?

$$E = \frac{m}{2} \langle \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{r}} \rangle + U(\underline{r})$$

$$\frac{d}{dt} E = \langle m\ddot{\underline{r}}, \dot{\underline{r}} \rangle + \langle \nabla_{\underline{r}} U(\underline{r}), \dot{\underline{r}} \rangle$$

$$= \langle m\ddot{\underline{r}} + \nabla_{\underline{r}} U(\underline{r}), \dot{\underline{r}} \rangle$$

$$= \langle -\alpha \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{r}} \rangle = -\alpha \|\dot{\underline{r}}\|^2$$

La energía siempre disminuye a menos de que la partícula esté en reposo.

Nota: El término disipativo podría ser de la forma $-\alpha\, h(|\dot{\underline{r}}|)\cdot \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}$, h función positiva.

Ejemplo 1 (Ecuación del paracaidas)

e_1, e_2

$$m\ddot{x}_1 = -mg + \alpha \dot{x}_1^2 \frac{\dot{x}_1}{|\dot{x}_1|}$$

$$U(x) = mg x_1$$

$$-\nabla U(x) = -mg \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

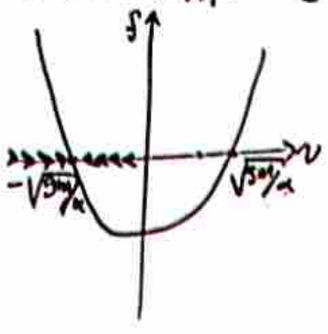
$$x_1 = q$$

$$\dot{x}_1 = v$$

$$\dot{q} = v$$

$$\dot{v} = -g + \alpha/m\, v^2$$

$$f(v) = \alpha/m\, v^2 - g$$

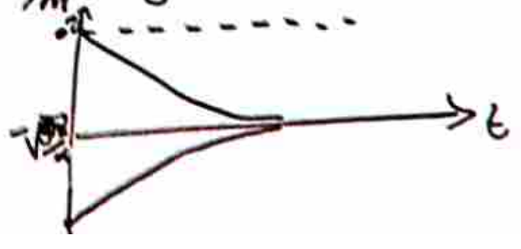


Veamos que el sistema tiene un atractor.

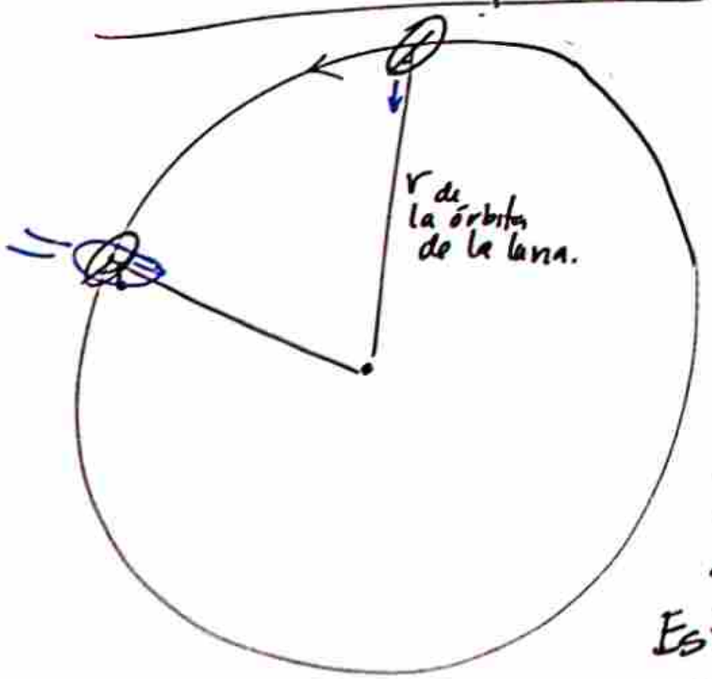
$$v^* = \pm\sqrt{3mg/\alpha}$$

$$\frac{\dot{v}}{\alpha/m\, v^2 - 3} = 1$$

¿EDO?

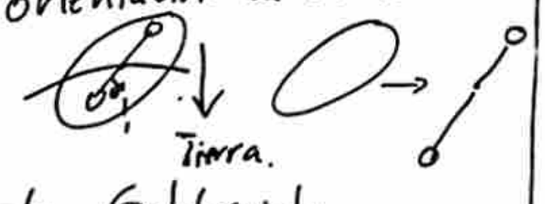


Sistemas disipativos



Tierra en el centro de la órbita circular de la luna.

Queremos modelar la orientación de la luna.



Peale, Goldreich

α tiene que ser MUY pequeña

Esta fuerza actúa por miles de millones de años.

θ - ángulo de la orientación de la luna.

t - tiempo.

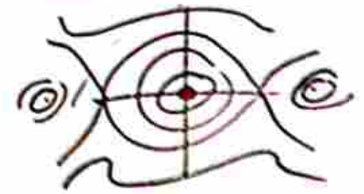
Ecs de Newton

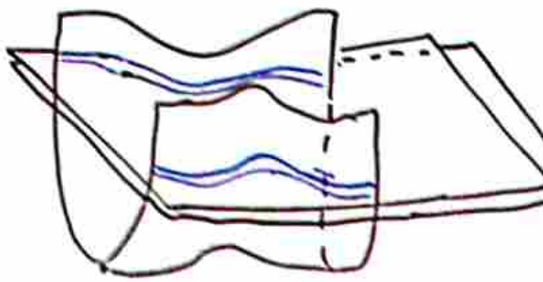
$$\ddot{\theta} = -\varepsilon \operatorname{sen}(2(\theta - t))$$

$\gamma(t) = \theta(t) - t$ trasladar el ángulo tomando en cuenta el desplazamiento de la Luna.

Conservativo

$$\ddot{\gamma} = -\varepsilon \operatorname{sen}(2\gamma)$$



Con disipación

$$\ddot{\gamma} = -\varepsilon \operatorname{sen}(2\gamma) - \alpha \dot{\gamma}$$