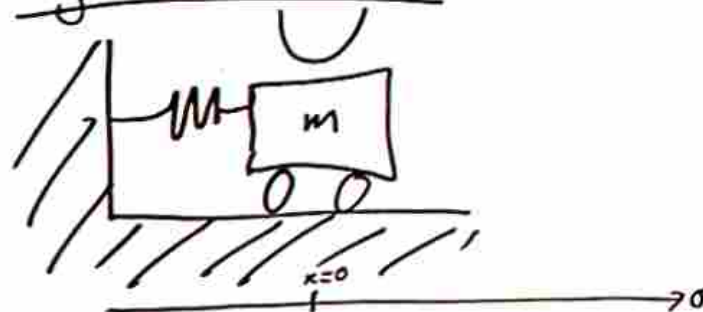


Introducción a la Mecánica Analítica

**Posgrado en ciencias matemáticas UNAM
IIMAS**

Renato Calleja, 13 de agosto de 2024

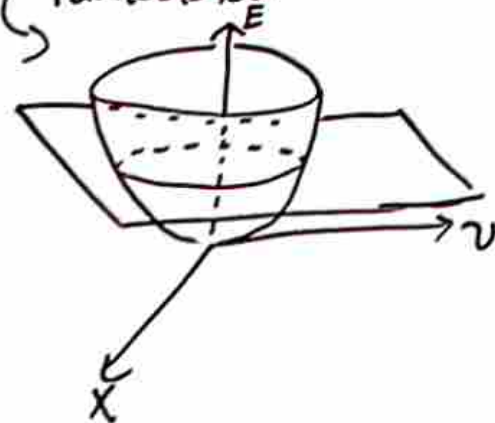
Ley de Hooke



$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + \frac{k}{2} x^2(t) = E = \left(\frac{k}{2} (c_1^2 + c_2^2) \right)$$

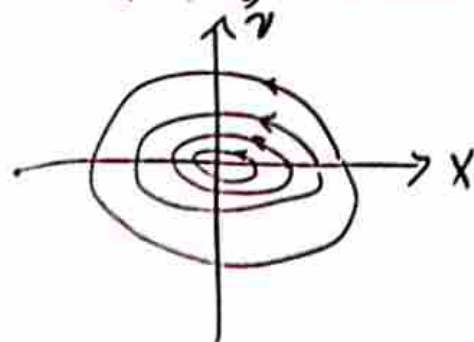
Paraboloide



$$E = \text{cte.}$$

↳ Energía del Oscilador armónico.

$\dot{x}(t) = v(t)$ velocidad



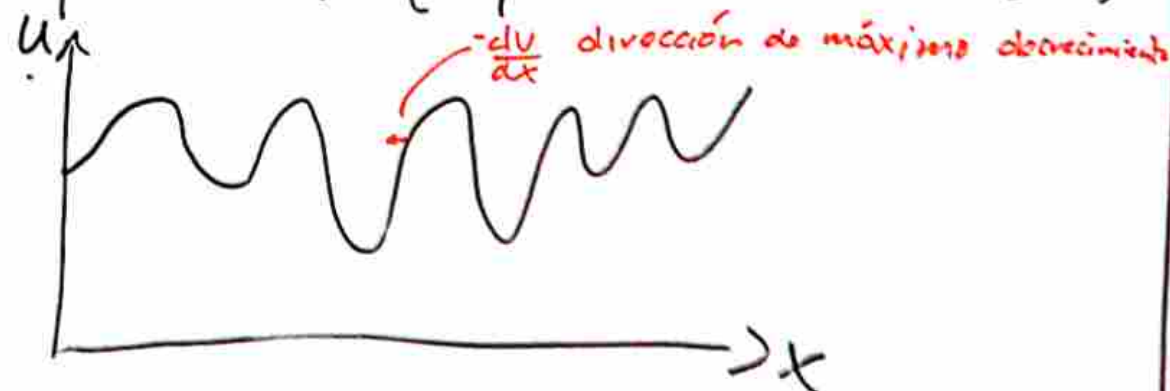
Sistemas conservativos

$$x \in \mathbb{R}$$

Un sistema conservativo es tal que

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{Teorema fund. del cálculo} \Rightarrow \exists U.$$

A la función $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la llamamos potencial. (Ej, $F(x) = -kx$, $U(x) = \frac{k}{2}x^2$)



Sistema conservativo

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

En una dimensión definimos la energía

$$E(t) = T(t) + U(t)$$

donde $T(t) = \frac{m}{2} v^2(t) = \frac{m}{2} (\dot{x}(t))^2$ (Energía cinética)

$U(t) = U(x(t))$ (Energía potencial)

Teorema Para un sistema conservativo, la energía se conserva.

Dem $[m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}]$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} (\dot{x}(t))^2 + U(x(t)) \right] = m \dot{x}(t) \ddot{x}(t) + \frac{dU(x(t))}{dx} \cdot \dot{x}(t)$$

$$= \dot{x}(t) [m\ddot{x}(t) + F(x(t))] = 0. //$$

Sistemas conservativos en $\mathbb{R}^n$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad m\ddot{x} = F(x)$$

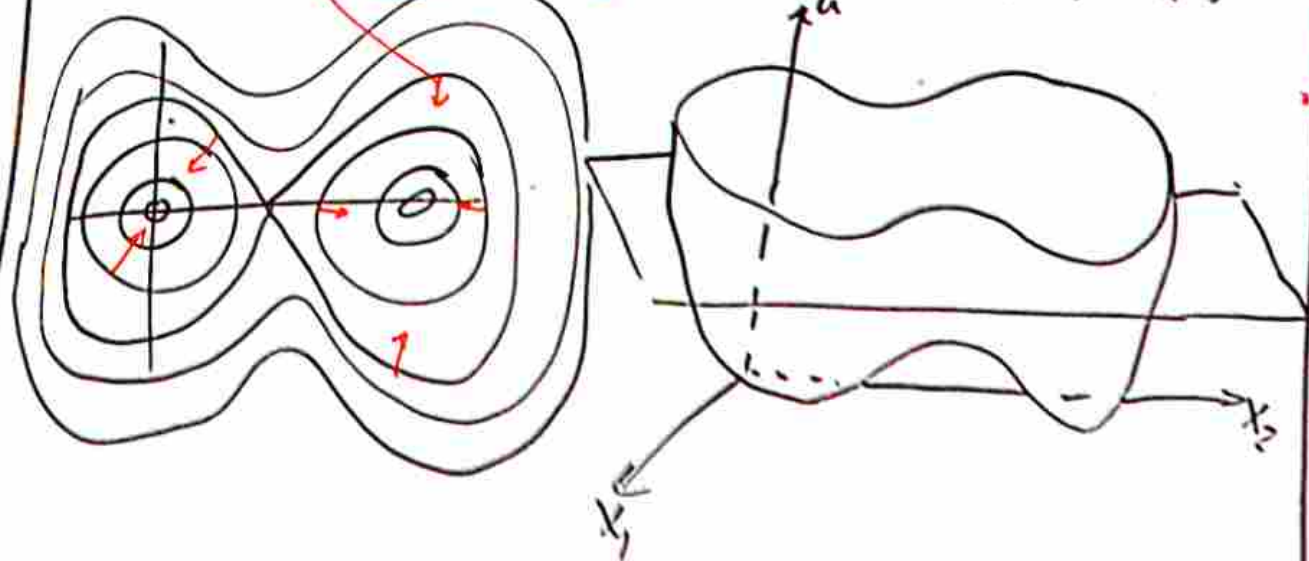
Un sistema conservativo en $\mathbb{R}^n$ es tal que (Potencial)

$$F(x) = -\nabla U(x), \quad U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\nabla U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

gradiente apunta en la dirección de máx. decrecimiento.

$$\nabla U(x) = (\partial_{x_1} U, \partial_{x_2} U, \dots, \partial_{x_n} U)$$



Sistema conservativo en $\mathbb{R}^n$

$$F(r) = -\nabla U(r), \quad U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} r_1 = (x_1, \dots, x_n) \\ r_2 = (y_1, \dots, y_n) \\ \langle r_1, r_2 \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \|r_1\| = \sqrt{\langle r_1, r_1 \rangle} \end{cases}$$

En n dimensiones definimos la energía

$$E(t) = T(t) + U(t),$$

donde $T(t) = \frac{m}{2} \|\dot{r}(t)\|^2 = \frac{m}{2} \langle \dot{r}(t), \dot{r}(t) \rangle$ (Energía cinética)

$$U(t) = U(r(t))$$
 (Energía potencial)

Teorema Para un sistema conservativo, la energía se conserva.

Dem $[m\ddot{r} = F(r) = -\nabla U(r)]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= m \sum_{k=1}^n \ddot{x}_k \dot{x}_k + (\partial_{x_1} U(r) \dot{x}_1 + \dots + \partial_{x_n} U(r) \dot{x}_n) \\ &= m \langle \ddot{r}, \dot{r} \rangle + \langle \nabla U(r), \dot{r} \rangle \\ &= \langle m\ddot{r} + \nabla U(r), \dot{r} \rangle = 0 \quad // \end{aligned}$$

Sistemas conservativos en $\mathbb{R}^n$

$$r \in \mathbb{R}^n, \quad r = (x_1, \dots, x_n)$$

Un sistema conservativo en $\mathbb{R}^n$ es tal que (Potencial)

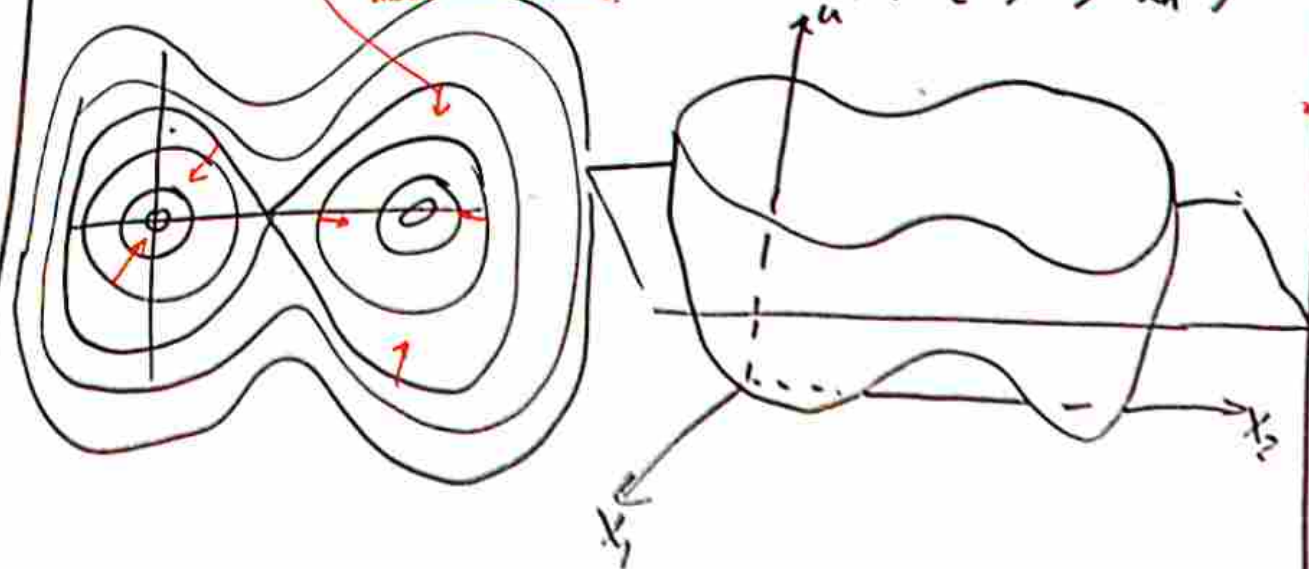
Voluntario:

Enunciar el teo que garantiza la existencia de U .

$$F(r) = -\nabla U(r), \quad U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

gradiente apunta en la dirección de máx. decrecimiento.

$$\nabla U(r) = (\partial_{x_1} U, \partial_{x_2} U, \dots, \partial_{x_n} U)$$



Sistema conservativo en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 1
 $\underline{r} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{r} = (x_1, x_2)$

Ley de Hooke

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

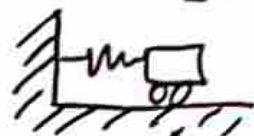
$$\dot{x}_1 = v_1$$

$$\dot{x}_2 = v_2$$

$$\frac{m}{2} v_1^2 + \frac{k}{2} x_1^2$$

$$E(t) = \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2) + \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{m}{2} v_1^2 + \frac{k}{2} x_1^2$$

$E: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ¿Conjuntos de nivel?



Lissajous?

Sistemas conservativos en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 2

$\underline{r} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{r} = (x_1, \dots, x_n)$

$$M \ddot{\underline{r}} = -K \underline{r}, \text{ donde } M = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix}$$

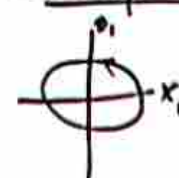
$$\dot{\underline{r}} = (v_1, \dots, v_n)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}$$

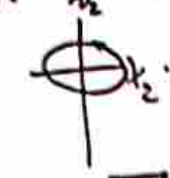
$$F(\underline{r}) = -\nabla U(\underline{r}) = -\nabla \left(\frac{k_1}{2} x_1^2 + \dots + \frac{k_n}{2} x_n^2 \right)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle M \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{r}} \rangle + U(\underline{r})$$

Lissajous



$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$$



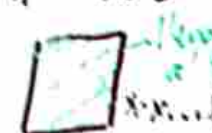
$$\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$$



$$\omega_{n-1}, \omega_n$$



$$\omega_1/\omega_2 = \sqrt{2}$$



$$\omega_1/\omega_2 = \sqrt{2}$$

Sistema conservativo en $\mathbb{R}^3$

Partícula en un potencial gravitacional

$$\underline{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$$

Ecs. de Newton

$$m \ddot{\underline{r}}(t) = -\nabla U(\underline{r}) = -G \frac{mM}{|\underline{r}|^3} \cdot \underline{r}$$

Veamos que $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$U(\underline{r}) = G \frac{mM}{|\underline{r}|} = G \frac{mM}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}$$

$$\partial_{r_i} U(\underline{r}) = GmM \frac{-\frac{1}{2}}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{3/2}} 2r_i$$

El sistema es conservativo.

$$E = \frac{m}{2} \langle \dot{\underline{r}}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle + G \frac{mM}{|\underline{r}|}$$

Sistemas conservativos en $\mathbb{R}^n$

Partícula en un potencial eléctrico

$$\underline{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3, \quad q, Q \text{ cargas (pueden ser positivas o negativas)}$$

Ecs de Newton

$$m \ddot{\underline{r}}(t) = -\nabla V_e(\underline{r}) \cdot \begin{cases} qQ > 0 \text{ fuerza de atracción} \\ qQ < 0 \text{ fuerza de repulsión} \end{cases}$$
$$= -C \frac{qQ}{|\underline{r}|^3} \cdot \underline{r}$$

$$V_e(\underline{r}) = C \frac{qQ}{|\underline{r}|} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

El sistema es conservativo

$$E = \frac{m}{2} \langle \dot{\underline{r}}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle + C \frac{qQ}{|\underline{r}|}$$

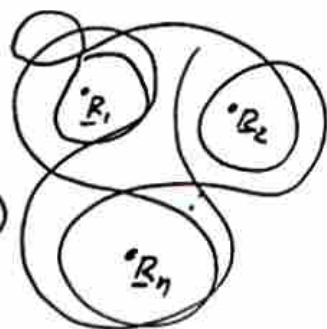
Sistema conservativo en $\mathbb{R}^3$

Partícula en un campo electrostático

$\underline{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ q, n partículas cargadas Q_i

Ecs. de Newton

$$m \ddot{\underline{r}}(t) = -\nabla V_{es}(\underline{r})$$
$$= -C q \sum_{i=1}^n \frac{Q_i (\underline{r} - \underline{R}_i)}{|\underline{r} - \underline{R}_i|^3}$$



$$V_{es}(\underline{r}) = C q \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\sqrt{(r_1 - R_{i1})^2 + (r_2 - R_{i2})^2 + (r_3 - R_{i3})^2}}$$

$$E = \frac{m}{2} \langle \dot{\underline{r}}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle + V_{es}(\underline{r})$$

Sistemas conservativos en $\mathbb{R}^n$

Partícula en un potencial eléctrico

$\underline{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$, q, Q cargas (pueden ser positivas o negativas)

Ecs de Newton

$$m \ddot{\underline{r}}(t) = -\nabla V_e(\underline{r})$$
$$= -C \frac{qQ}{|\underline{r}|^3} \cdot \underline{r}$$

• $qQ > 0$ fuerza de atracción
• $qQ < 0$ fuerza de repulsión

$$V_e(\underline{r}) = C \frac{qQ}{|\underline{r}|} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

El sistema es conservativo

$$E = \frac{m}{2} \langle \dot{\underline{r}}(t), \dot{\underline{r}}(t) \rangle + C \frac{qQ}{|\underline{r}|}$$