Elipsoide de inercia

Def

El elipsoide de inercia del cuerpo con O es,

$$\mathcal{E} = \{ U : \langle AU, U \rangle = 1 \}.$$

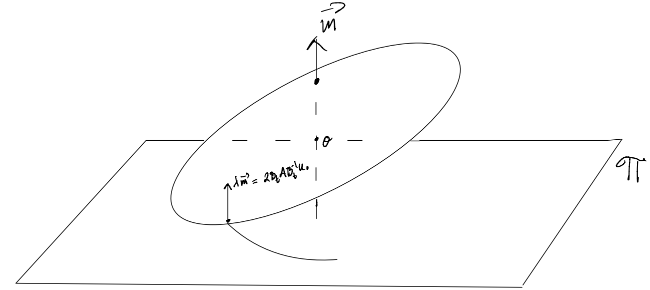
En términos de los ejes principales de inercia $\vec{E}_i$, la ecuación es

$$I_1 U_1^2 + I_2 U_2^2 + I_3 U_3^2 = 1$$

La longitud de los ejes principales del el elipsoide son $\sqrt{I_i}$

Teorema de Poinsot

El elipsoide de inercia rueda sin resbalar sobre un plano estacionario perpendicular al momento angular $\vec{m}$.



Dem

$$B_t(\mathcal{E}) = \{ u : \langle AB_t^{-1}u, B_t^{-1}u \rangle = 1 \}$$

$$= \{ u : \langle B_tAB_t^{-1}u, u \rangle = 1 \}$$

Tomamos Π el plano ortogonal a $\vec{m}$.

Tomamos un punto $u_0 \in B_t(\mathcal{E})$ y buscamos un vector normal que pasa por u_0 de la siguiente forma,

$$2B_tAB_t^{-1}u_0 = \lambda\vec{m}$$

Podemos tomar $u_0 = \frac{w(t)}{\sqrt{2K}}$.

$$K = \frac{1}{2}\vec{M}\cdot\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{m}\cdot\vec{w} = \frac{1}{2}\langle A\vec{\Omega}, \vec{\Omega} \rangle = \frac{1}{2}\langle AB_t^{-1}w, B_t^{-1}w \rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle B_tAB_t^{-1}w, w \rangle \Rightarrow \langle B_tAB_t^{-1}\frac{w}{\sqrt{2K}}, \frac{w}{\sqrt{2K}} \rangle = 1$$

//

Ejercicio 6

Comentarios

- $SO(3)$ variedad 3 dim compacta
- $TSO(3)$ var 6 dim

$(m_1, m_2, m_3) = (c_1, c_2, c_3)$

$E = c_4 > 0 \leftarrow$ no tiene puntos fijos.

- Var 2 dim (Compacta?)

Sistemas Hamiltonianos

Ecuaciones de Hamilton en $\mathbb{R}^n$

$q \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\quad z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(q, p, t) \longmapsto H(q, p, t)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \text{ sistema de } 2n \text{-ecuaciones de primer orden.}$$

H - Hamiltoniano del sistema.

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ - Sist Hamilt autónomo.

$\neq 0$ no-autónomo.

Ej 1

$m\ddot{x} = -\nabla U(x, t)$, $\quad x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 - U(x, t)$$

Sea $q = x$ $\quad (m v_i = p_i)$

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m} p_i \qquad\qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$\Longleftrightarrow \qquad i = 1, \dots, n$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} U(q, t) \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$H(q, p, t) = \frac{|p|^2}{2m} + U(q, t)$$

Ejemplo 1.1

Las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q} = \nabla_p H$$

$$\dot{p} = -\nabla_q H$$

$$\dot{z} = \boxed{}\, \nabla_z H$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{pmatrix}$$

$$z = (q, p)$$

$$\nabla_z H$$

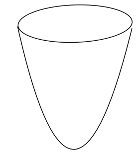
$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n \times n}$$

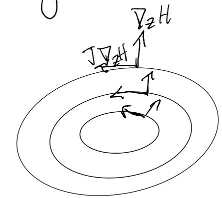
$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$$

J es una matriz simpléctica
(parece la raiz de -1)

$$\dot{z} = J \nabla_z H(z, t)$$

Sistema de 1 grado de libertad.





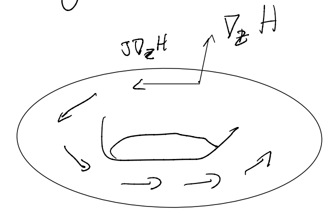
$$\dot{q} = \partial_p H$$

$$\dot{p} = -\partial_q H$$

$$J \nabla_z H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_z H$$

sistema de n grados de libertad

$$H = C$$



$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$2n$ dimensional

$\dot{z} = J \nabla_z H$ está ligado a un principio geométrico.

Modelación Lagrangiana vs Modelación Hamiltoniana

1. $\mathcal{M}$ espacio de configuraciones	1. Espacio fase (variedad simpléctica)
2. $\mathcal{L}$, Lagrangiano ($T\mathcal{M}$)	2. H, Hamiltoniano ($T^*\mathcal{M}$)
3. Evolución E-$\mathcal{L}$ (Principio varicional de acción estacionaria)	3. Ecs. de Hamilton (posiciones y momentos) coordenadas canónicas.

Ejemplo

Sistema de vórtices puntuales en $\mathbb{R}^2$

Aproximación a un fluido en $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u = -\frac{1}{\rho_0}\nabla P$$

$\boxed{\nabla\cdot u = 0}$ - fluido es incompresible

$u(x,t): \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

La solución de la ecuación de Euler se puede aproximar por

$z_1,\dots,z_s$: posiciones de s-vortices puntuales

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{s} k_i\left[-\frac{(y-y_i)}{|z-z_i|^2}, \frac{x-x_i}{|z-z_i|^2}\right]$$

La evolución del sistema de s-vórtices está dada por

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$z_i=(x_i,y_i)$ es la posición del i-ésimo vórtice.

$$H = \sum_{\lambda,\mu=1}^{s} k_\lambda k_\mu \log\left(\sqrt{(x_\lambda-x_\mu)^2+(y_\lambda-y_\mu)^2}\right).$$