Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 12 de marzo de 2025

Teorema (Darboux)

Sea Ω una 2-forma no degenerada en una variedad $\mathcal{M}$ 2n-dim. Entonces $d\Omega=0$ si y sólo si alrededor de cada punto $p\in\mathcal{M}$ $\exists$ un sistema de coordenadas simpléctico $(\mathcal{U},\varphi)$, $\varphi: (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\to p\in\mathcal{U}$ tales que

$$\varphi(0)=p \quad y \quad \varphi^*\Omega=\sum_{j=1}^{n} dy_j\wedge dx_j=\Omega_0$$

$\mathcal{N}$ n-dim , $T^*\mathcal{N}$ 2n-dim

$$\Theta=\sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \text{ - global}$$

$$d\Theta=\Omega_0$$

Variedad simpléctica.

Dem $\Omega_0=\sum_{j=1}^{n} dy_j\wedge dx_j$ $\quad d\Omega_0=0$ $\quad d\Omega_0=dd\left(\sum_{j=1}^{n} y_i dx_j\right)$

Localmente la vecindad $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}$ se ve como $\mathbb{R}^{2n}$ y asumimos que p es el origen.

Sea Ω la 2-forma con $\Omega_{p=0}=\Omega_0$.

Definimos

$$\Omega_t=\Omega_0+t(\Omega-\Omega_0), \quad t\in[0,1]$$

$t=0$ $\quad \Omega_0=\Omega_0$ $\quad$ exacta

$t=1$ $\quad \Omega_1=\Omega$ $\quad$ por hipótesis $d\Omega=0$

En un abierto suf pequeño (Poincaré-Cartan)

$$\Omega-\Omega_0=d\alpha, \text{ escogemos } \alpha(0)=0$$

Para cada $t\in[0,1]$ sea X^t el campo vectorial suave tal que $X^t(0)=0$ y

$$i_{X^t}\Omega_t=-\alpha \quad (-\alpha=\Omega_t(X^t,\cdot))$$

Si es necesario hacemos la bola más pequeña para que el flujo φ^t de X^t esté definido en $t\in[0,1]$.

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\Omega_t=\left(\frac{d}{dt}\varphi^t\right)^*\Omega_t+\varphi^{t*}\frac{d}{dt}\Omega_t$$

$$=(\varphi^t)^*(\mathcal{L}_{X^t}\Omega_t)+\varphi^{t*}(\Omega-\Omega_0)=(\varphi^t)^*(d i_{X^t}\Omega_t+i_{X^t}\overset{0}{d\Omega_t})$$

$$=(\varphi^t)^*(-d\alpha+\Omega-\Omega_0)=0.$$

$t=0$ $\quad (\varphi^0)^*\Omega_0=\Omega_0$

$t=1$ $\quad (\varphi^1)^*\Omega=\Omega_0$ //

Teorema (Darboux)

Sea Ω una 2-forma no degenerada en una variedad $\mathcal{M}$ 2n-dim. Entonces $d\Omega = 0$ si y sólo si alrededor de cada punto $p \in \mathcal{M}$ $\exists$ un sistema de coordenadas simpléctico $(\mathcal{U}, \Psi)$, $\varphi : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \to p \in \mathcal{U}$ tales que

$$\Psi(0) = p \quad y \quad \Psi^* \Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j = \Omega_0$$

Obs En geom. simplécticas el único invariante es la dimensión.

$\to$ En geometría riemannianas hay otros invariantes i.e. la curvatura.

Dem $\Omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j \qquad d\Omega_0 = 0 \quad d\Omega_0 = dd\left(\sum_{j=1}^{n} y_i dx_j\right)$

Localmente la vecindad $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ se ve como $\mathbb{R}^{2n}$ y asumimos que p es el origen.

Sea Ω la 2-forma con $\Omega_{p=0} = \Omega_0$.

Definimos

$$\Omega_t = \Omega_0 + t(\Omega - \Omega_0), \quad t \in [0,1]$$

$t=0 \quad \Omega_0 = \Omega_0$ exacta

$t=1 \quad \Omega_1 = \Omega$ por hipótesis $d\Omega = 0$

En un abierto suf pequeño (Poincaré-Cartan)

$\Omega - \Omega_0 = d\alpha$, escogemos $\alpha(0) = 0$

Para cada $t \in [0,1]$ sea X^t el campo vectorial suave tal que $X^t(0) = 0$ y

$$i_{X^t} \Omega_t = -\alpha \qquad (-\alpha = \Omega_t(X^t, \cdot))$$

Si es necesario hacemos la bola más pequeña para que el flujo φ^t de X^t esté definido en $t \in [0,1]$.

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^* \Omega_t = \left(\frac{d}{dt}\varphi^t\right)^* \Omega_t + \varphi^{t*} \frac{d}{dt}\Omega_t$$

$$= (\varphi^t)^* (\mathcal{L}_{X^t} \Omega_t) + \varphi^{t*}(\Omega - \Omega_0) = (\varphi^t)^*(d i_{X^t} \Omega_t + i_{X^t} d\Omega_t)$$

$$= (\varphi^t)^* (-d\alpha + \Omega - \Omega_0) = 0.$$

$t=0 \quad (\varphi^0)^* \Omega_0 = \Omega_0$

$t=1 \quad (\varphi^1)^* \Omega = \Omega_0$ //

Mapeos simplécticos

Un mapeo diferenciable $f: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ con $(\mathcal{M}_1,\Omega_1)$ y $(\mathcal{M}_2,\Omega_2)$ variedades simplécticas, se llama simpléctico (ó canónico) si el pull-back por f mapea Ω_2 en Ω_1

$$f^*\Omega_2 = \Omega_1$$

En cordenadas. $X,Y \in T_p\mathcal{M}_1$

$$\Omega_2(df(X), df(Y)) = \Omega_1(X,Y)$$

$$df_p: T_p\mathcal{M}_1 \longrightarrow T_p\mathcal{M}_2$$

Como Ω_1 es no-degenerada, entonces el mapeo df es injectivo en cada punto $\dim\mathcal{M}_2 \geq \dim\mathcal{M}_1$ y el mapeo canónico es una inmersión.

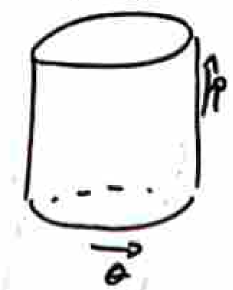
Si $\dim\mathcal{M}_1 = \dim\mathcal{M}_2$ entonces f es un difeo local.

Si f es un difeomorfismo simpléctico se le llama simplectomorfismo.

En el caso cuando f mapea la variedad en sí misma $(\mathcal{M},\Omega) \circlearrowleft f$

$$f^*\Omega = \Omega$$

Por ejemplo el mapeo estándar en $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$



$$\Omega_0 = dP\wedge d\theta$$

$$f\begin{pmatrix}P\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P+\operatorname{sen}(\theta) \\ \theta+P+\operatorname{sen}(\theta)\end{pmatrix}$$

Mapeos simplécticos

Otro ejemplo

$\mathcal{N}$ n-dim

$\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ difeomorfismo

↳ se puede extender a un difeomorfismo simpléctico $f : T^*\mathcal{N} \to T^*\mathcal{N}$

$T^*\mathcal{N}$ haz cotangente (2n-dim) $p \in \mathcal{N}$

$\alpha \in T^*\mathcal{N}$, $\alpha = (p, \alpha_p)$ $\alpha_p \in T_p^*\mathcal{N}$

$$f(\alpha) = (\varphi(p), (d\varphi^{-1})^* \alpha_{\varphi(p)})$$

$$d\varphi : T_p\mathcal{N} \to T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$$

$$d\varphi^{-1} : T_{\varphi(p)}\mathcal{N} \to T_p\mathcal{N}$$

$$(d\varphi^{-1})^* : T^*_{\varphi(p)}\mathcal{N} \to T^*_p\mathcal{N}$$

Este mapeo lleva fibras en fibras y también $f^*\theta = \theta$ $d\theta = \Omega$

$\Rightarrow f^*\Omega = \Omega$.

También se puede probar que todo difeomorfismo de $T^*\mathcal{N}$ que deja la 1-forma θ invariante, se puede escribir

$$f(\alpha) = (\varphi(p), (d\varphi^{-1})^* \alpha_{\varphi(p)})$$

para algún difeomorfismo de $\mathcal{N}$.

Mapeos simplécticos

Otro ejemplo

$\mathcal{N}$ n-dim

$\varphi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ difeomorfismo

↳ se puede extender a un difeomorfismo simpléctico $f : T^*\mathcal{N} \longrightarrow T^*\mathcal{N}$

$T^*\mathcal{N}$ haz cotangente (2n-dim) $p \in \mathcal{N}$

$\alpha \in T^*\mathcal{N}$, $\alpha = (p, \alpha_p)$ $\alpha_p \in T^*_p\mathcal{N}$

$$f(\alpha) = (\varphi(p), (d\varphi^{-1})^* \alpha_{\varphi(p)})$$

$$d\varphi : T_p\mathcal{N} \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{N}$$

$$d\varphi^{-1} : T_{\varphi(p)}\mathcal{N} \longrightarrow T_p\mathcal{N}$$

$$(d\varphi^{-1})^* : T^*_{\varphi(p)}\mathcal{N} \longrightarrow T^*_p\mathcal{N}$$

Este mapeo lleva fibras en fibras $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} p \mapsto \varphi(p) \\ T^*_p\mathcal{N} \end{matrix}$

y también $f^*\theta = \theta$ $d\theta = \Omega$

$\Rightarrow f^*\Omega = \Omega$.

También se puede probar que todo difeomorfismo de $T^*\mathcal{N}$ que deja la 1-forma θ invariante, se puede escribir $f(\alpha) = (\varphi(p), (d\varphi^{-1})^* \alpha_{\varphi(p)})$ para algún difeomorfismo de $\mathcal{N}$.