Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

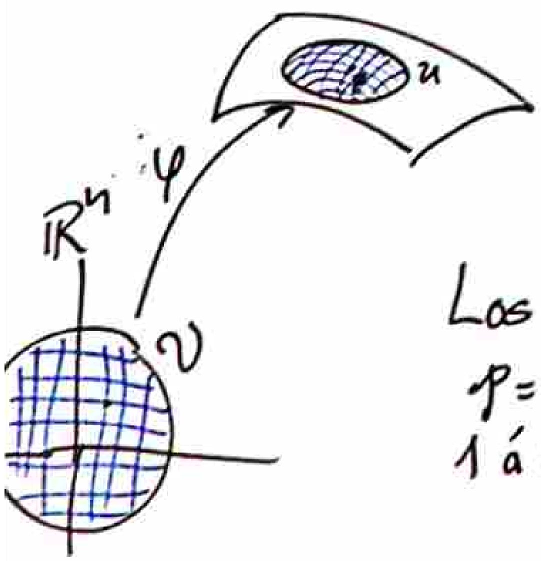
Renato Calleja, 12 de febrero de 2025

Variedad diferenciable

Una var. dif. es un espacio topológico de Hausdorff $\mathcal{M}$ (un par de puntos distinto tiene vecindades disjuntas)

se ve localmente como el espacio euclidiano.

→ Para cada punto $p \in \mathcal{M}$ hay una vecindad que se describe por coordenadas de $\mathbb{R}^n$.



Hay un homeomorfismo φ de un abierto $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathcal{U}$ en $\mathcal{M}$.

$$\varphi : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$$

Los puntos $p \in \mathcal{U}$ se escriben $p = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ y están en correspondencia 1 á 1 con $x = (x_1, \dots, x_n)$ en el abierto $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$

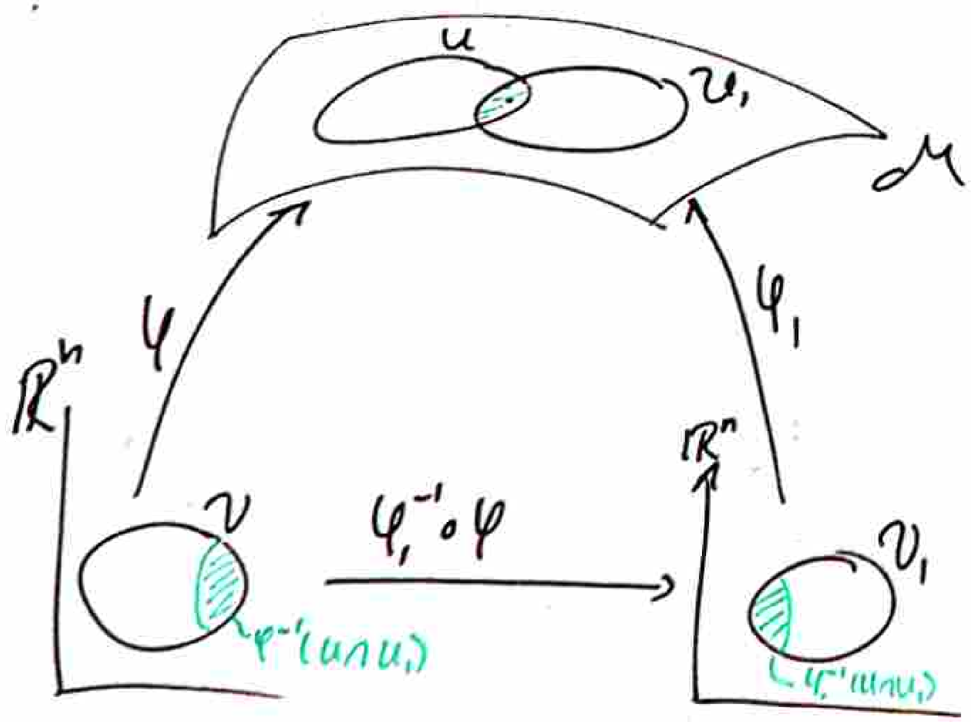
La pareja $(\varphi, \mathcal{U})$ se llama carta y los puntos $x \in \mathcal{V}$ son las coordenadas correspondientes

Tomamos una colección de cartas para cubrir la variedad.

Cuando las cartas se traslapan, necesitamos una ley de correspondencia

Si $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ es otra carta en el punto p tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_1 \neq \phi$ entonces requerimos.

Variedad diferenciable



$$\varphi_1^{-1}\circ\varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_1) \longrightarrow \varphi_1^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_1)$$

... requrimos que $\varphi_1^{-1}\circ\varphi$ sea un difeomorfismo.

En otras palabras el mapeo

$$y = \mathcal{U}(x) = \varphi_1^{-1}\circ\varphi(x), \quad x \in \varphi^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}_1)$$

que es 1 á 1 entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ es diferenciable con inversa diferenciable.

Def (Variedad diferenciable)

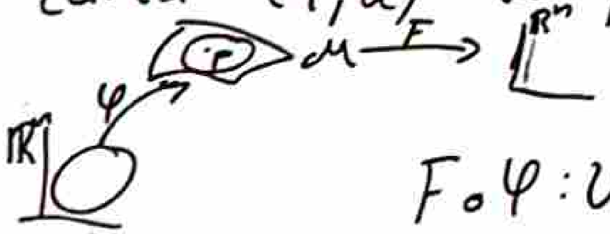
El espacio de Hausdorff $\mathcal{M}$ junto con la colección de cartas cubrientes de $\mathcal{M}$ y la condición de compatibilidad se llama <u>variedad diferenciable de dimensión n</u>.

$\mathcal{M}^n$

Variedad diferenciable

Funciones diferenciables

La función $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable si para todo punto $p \in \mathcal{M}$ existe una carta $(\varphi, \mathcal{U})$ tal que la representación local,



$$F \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow F \circ \varphi(\mathcal{U})$$
$$x \longmapsto F \circ \varphi(x)$$

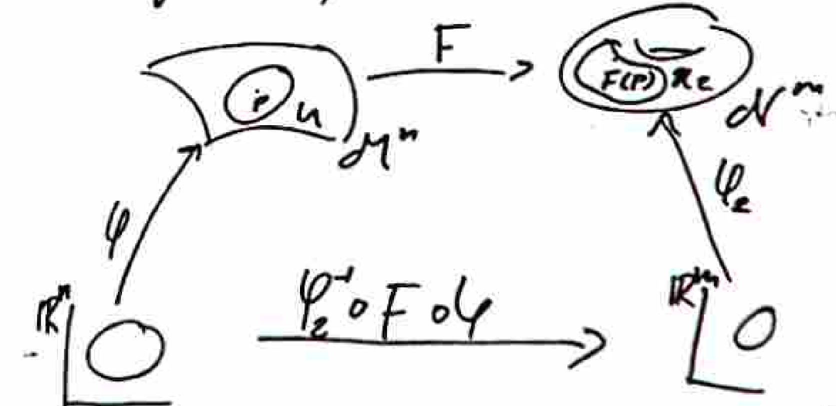
es una función de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ es diferenciable.

Gracias a la cond. de compatibilidad esto es válido para $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ con p en la intersección.

→ La regla de la cadena

$$F \circ \varphi_1 = (F \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi)$$

Más general, $F : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^m$



$F : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^m$ es diferenciable si $\exists$ una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta de p y $(\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ carta de $F(p)$ con $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_2$ tal que la representación

$$\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_2^{-1}(\mathcal{U}_2) \subset \mathbb{R}^m$$

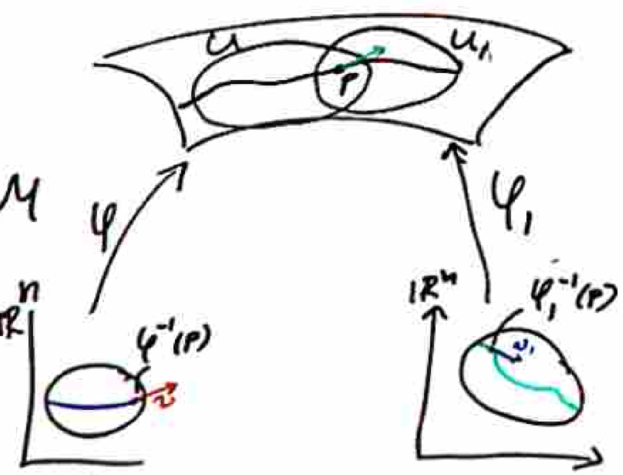
es un mapeo diferenciable.

Variedad diferenciable

Espacio tangente

Sea $P \in \mathcal{M}^n$.

Consideremos $C : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ que pasa por P cuando $C(0) = P$.



(U, φ) es una carta sobre P,

la curva representada por $\varphi^{-1} \circ C : \mathbb{R} \to \varphi^{-1} \circ C(0 \in \mathbb{R})$ (curva en $\mathbb{R}^n$)

$t \longmapsto \varphi^{-1} \circ C(t) = x(t)$

tiene un vector tangente en $x(0) = \varphi^{-1}(P)$ dado por

$$\frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\varphi^{-1} \circ C)(0) = v \in \mathbb{R}^n$$

En otras coordenadas (U_1, φ_1) $\quad \varphi_1^{-1} \circ C(t) = y(t)$

$$\frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\varphi_1^{-1} \circ C)(0) = v_1 \in \mathbb{R}^n$$

Como $\varphi_1^{-1} \circ C = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ C)$

los dos vectores $v, v_1 \in \mathbb{R}^n$ están relacionados por un isomorfismo lineal

(ISO) $\quad v_1 = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi)_x (x)\, v \quad , \quad x = x(0) = \varphi^{-1}(P)$

↳ derivada en $\mathbb{R}^n$

Entonces todos estos vectores son representaciones del vector tangente en P.

Definimos el vector tangente en $P \in \mathcal{M}$ por la clase de equivalencia de todas las representaciones.

Def (Espacio tangente)

La colección de todos los vectores tangentes se denota $T_P \mathcal{M}$ (espacio tangente a $\mathcal{M}$ sobre el punto P).