Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 11 de marzo de 2025

Estructuras simplécticas en variedades

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j \qquad \mathbb{R}^{2n}$$

$z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

Vamos a extender esta estructura a una variedad M^{2n}.

$p \in \mathbb{T}^2$

$T_p\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2$

$v_1 = v_{11}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + v_{12}\frac{\partial}{\partial\theta_2}$

$v_2 = v_{21}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + v_{22}\frac{\partial}{\partial\theta_2}$

$v_1, v_2 \in T_p\mathbb{T}^2$

$$\Omega_p \in Z^2(T_p\mathbb{T}^2)$$

$$\Omega_p(v_1,v_2) = d\theta_2\wedge d\theta_1(v_1,v_2) = d\theta_2(v_1)\cdot d\theta_1(v_2) - d\theta_2(v_2)\cdot d\theta_1(v_1) = v_{12}v_{21} - v_{22}v_{11}$$

Def

Una estr. simpléctica en M^{2n} es una 2-forma Ω en M que es,

(i) Ω es cerrada ($d\Omega = 0$)

(ii) Ω es no degenerada

($p \in M$ y $X \in T_pM$, $X \neq 0 \Rightarrow$ $\exists\, Y \in T_pM$ con $\Omega(X,Y) \neq 0$)

El par (M, Ω) se llama variedad simpléctica.

- Todo espacio tangente T_pM es un ~~e~~ espacio vectorial 2n-dimensional se vuelve un espacio simplectico con respecto una forma bilineal, antisimétrica y no-deg.

$[u,v] = \langle u, Jv\rangle$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ ($\tilde{\Omega}$ notación de repr. matr.)

repr. matricial $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$

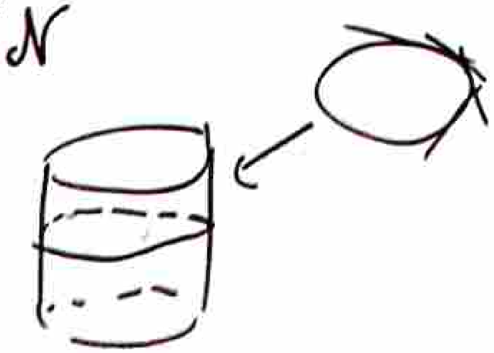
— Haz cotangente de una variedad

Sea $\mathcal{N}$ una variedad n dimensional
y $T_p\mathcal{N}$ esp. tang. sobre $p \in \mathcal{N}$.

Sea $T_p^*\mathcal{N}$ espacio dual a $T_p\mathcal{N}$
(espacio cotangente a $T_p\mathcal{N}$

La unión de espacios cotangentes se llama
haz cotangentes.
(bundle, fibrado)

$$T^*\mathcal{N} = \bigcup_{p \in \mathcal{N}} T_p^*\mathcal{N}$$



Esto $T^*\mathcal{N}$ es una variedad $\mathcal{M} = T^*\mathcal{N}$ de dim $2n$.

Un punto α en $\mathcal{M}$ es una forma lineal α_p
sobre $p \in \mathcal{N}$

$\alpha \in \mathcal{M}$, $\alpha = (p, \alpha_p)$ $(p \in \mathcal{N}, \alpha_p \in T_p^*\mathcal{N})$

Es una variedad diferenciable de dim $2n$.

Coordenadas locales

$x_1, \dots, x_n$ coords. locs. de $\mathcal{N}$

$\alpha_p \in T_p^*\mathcal{N}$ con coordenadas $y_1, \dots, y_n$

Podemos pensar que $T_p\mathcal{N} = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$

$T_p^*\mathcal{N} = \text{span}\{dx_1, \dots, dx_n\}$

– Haz cotangente de una variedad

Definimos una 1-forma $\Theta \in T_p^*\mathcal{N}$

$$\Theta = \sum_{j=1}^{n} y_j \, dx_j \quad \text{(tiene sentido local)}$$

Veamos que Θ tiene sentido global

Un punto en $T^*\mathcal{N}$ se representa por una 1-forma α_p evaluada en $p \in \mathcal{N}$.

Para cualquier vector $v \in T_p\mathcal{N}$, $\alpha_p(v)$

Definimos una 1-forma en $T^*\mathcal{N}$, llamada β, dando $\beta(X)$ para cualquier vector tangente X de $T^*\mathcal{N}$

X vector tangente en un punto $\alpha \in T^*\mathcal{N}$

Esto $T^*\mathcal{N}$ es una variedad $\mathcal{M} = T^*\mathcal{N}$ de dim $2n$.

Un punto α en $\mathcal{M}$ es una forma lineal α_p sobre $p \in \mathcal{N}$

$\alpha \in \mathcal{M}$, $\alpha = (p, \alpha_p)$ $(p \in \mathcal{N}, \alpha_p \in T_p^*\mathcal{N})$

Es una variedad diferenciable de dim $2n$.

Coordenadas locales

$x_1, \dots, x_n$ coords. locs. de $\mathcal{N}$

$\alpha_p \in T_p^*\mathcal{N}$ con coordenadas $y_1, \dots, y_n$

Podemos pensar que $T_p\mathcal{N} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$

$T_p^*\mathcal{N} = \text{span}\{dx_1, \dots, dx_n\}$

— Haz cotangente de una variedad

Definimos una 1-forma $\Theta \in T_p^*\mathcal{N}$

$$\Theta = \sum_{j=1}^{n} y_j\, dx_j \quad \text{(tiene sentido local)}$$

Veamos que Θ tiene sentido global

Un punto en $T^*\mathcal{N}$ se representa por una 1-forma α_p evaluada en $p \in \mathcal{N}$.

Para cualquier vector $v \in T_p\mathcal{N}$, $\alpha_p(v)$

Definimos una 1-forma en $T^*\mathcal{N}$, llamada β, dando $\beta(X)$ para cualquier vector tangente X de $T^*\mathcal{N}$

X vector tangente en un punto $\alpha \in T^*\mathcal{N}$

$\alpha_p(d\pi X)$ un funcional lineal

Mapeo proyección

$$\pi : T^*\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$$
$$\alpha = (p, \alpha_p) \longmapsto p$$

$d\pi$ mapea el espacio tangente $T_\alpha(T^*\mathcal{N})$ sobre α al espacio tangente $T_p\mathcal{N}$.

A esta forma $\alpha_p(d\pi X)$ se le llama forma tautológica. (Está definida en términos de sí mismo).

Definimos la 1-forma Θ en $T^*\mathcal{N}$ por

$$\Theta_\alpha(X) = \alpha_p(d\pi X), \quad X \in T_\alpha(T^*\mathcal{N})$$

<u>Tarea</u> Verificar que por construcción esta forma coincide con $\Theta = \sum_{j=1}^{n} y_j\, dx_j$ en coords locales.

Sea $X=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j}+b_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$, $d\pi X=\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j}$

Ahora $\alpha_p=\sum_{j=1}^{n} y_j\, dx_j$

$$\alpha_p(d\pi X)=\alpha_p\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{j=1}^{n} y_j a_j$$

$$\theta_\alpha(X)=\sum_{j=1}^{n} y_j a_j$$

Además notamos que si

$$\theta=\sum_{j=1}^{n} y_j\, dx_j \Rightarrow d\theta=\sum_{j=1}^{n} dy_j\wedge dx_j$$

Esto es la forma simpléctica estándar.

Entonces podemos concluir que $\Omega=d\theta$

→ es una forma exacta, cerrada y no-degenerada.

→ Es una 2-forma simpléctica de $T^*\mathcal{N}$.

En cuanto al haz tangente, $T\mathcal{N}$ también tiene una estructura simpléctica

- El haz tangente se puede mapear difeomorficamente al haz cotangente. (la forma simpléctica Ω se puede mapear por el pullback a una forma simpléctica del haz tangente)
- Usando la métrica de $\mathcal{N}$ (siempre existe).
  La métrica se define por el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ en $T_p\mathcal{N}$
  y esta induce un isomorfismo
  $X\rightarrow\langle X,\cdot\rangle_p$ del espacio tangente al espacio cotangente.