Sistemas Dinámicos Hamiltonianos

Posgrado en ciencias matemáticas UNAM

IIMAS

Renato Calleja, 11 de febrero de 2025

Formas diferenciales

$B: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineal

$\alpha, \beta \in E^*$, $v, w \in E$

$\alpha \otimes \beta : E \times E \to \mathbb{R}$
$(v, w) \longmapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)$ es bilineal.

Denotamos por $E^* \otimes E^*$ el espacio de todas las transformaciones bilineales $E \times E \to \mathbb{R}$

Las transformaciones bilineales están unicamente determinadas por $B(e^i, e^j) = \lambda_{ij}$

$E^* = \text{span}\{e^1, \dots, e^n\}$ $\quad (e^i(e_j) = \delta_{ij})$

La dim $E^* \otimes E^* = n^2$

Una base de $E^* \otimes E^*$ es $\{e^i \otimes e^j\}$

$e^i \otimes e^j : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(v, w) \longmapsto e^i(v) \cdot e^j(w) = v_i \cdot w_j$

Todas las transformaciones bilineales se escriben $B = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}\, e^i \otimes e^j$

De manera similar

$$\mathcal{Z}^k(E) = \underbrace{E^* \otimes E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{k\text{-veces.}}$$

El espacio de todas las transformaciones multilineales de $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un espacio vectorial de dimensión n^k y $\{e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \mid 1 \le i_1, i_2, \dots, i_k \le n\}$ es una base.

Formas diferenciales

Si $T \in \mathcal{Z}^k(E)$ y $S \in \mathcal{Z}^s(E)$ entonces su producto tensorial $T \otimes S \in \mathcal{Z}^{k+s}(E)$

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+s}) = T(v_1, \dots, v_k) \cdot S(v_{k+1}, \dots, v_{k+s})$$

Decimos que $T \in \mathcal{Z}^k(E)$ es antisimétrica ó alternada si,

$$T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = sig(\sigma)\, T(v_1, \dots, v_k)$$

$\sigma \in \Sigma_k$ grupo de las permutaciones de k elementos.

Denotamos por $\Lambda^k(E)$ el espacio de las transformaciones k-multilineales y alternadas.

Si $T \in \mathcal{Z}^k(E)$ entonces $A(T)$ definido por

$$A(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} sig(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

es antisimétrico y si $T \in \Lambda^k(E)$, $A(T) = T$

$$A(T)(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) = sig(\sigma')\, A(T)(v_1, \dots, v_k)$$

$$sig(\sigma \circ \sigma') = sig(\sigma)\, sig(\sigma')$$

Def (Producto exterior)

Dados $T \in \Lambda^k(E)$ y $S \in \Lambda^l(E)$, su producto exterior (producto cuña), $T \wedge S \in \Lambda^{k+l}(E)$ se define como

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} A(T \otimes S)$$

Formas diferenciales

Propiedades

a) Es bilineal

b) $T \wedge S = (-1)^{k \cdot l} S \wedge T$

c) $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$

d) Si $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in E^*$ entonces

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^m (v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in \Sigma_m} sig(\sigma)\, \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdot \alpha^2(v_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \alpha^m(v_{\sigma(m)})$$

Ejemplo $\alpha, \beta \in E^*$, $v, w \in E$

$$\alpha \wedge \beta (v, w) = \alpha(v) \cdot \beta(w) - \alpha(w) \cdot \beta(v)$$

Sea $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$e^1, e^2 \in E^*$

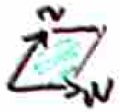
$$e^1 \wedge e^2 (v, w) = e^1(v) e^2(w) - e^1(w) \cdot e^2(v) = v_1 w_2 - w_1 v_2$$

$$[v, w] = v^T J w = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - w_1 v_2$$

Además

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = v_1 w_2 - w_1 v_2$$

$$(v,0) \times (w,0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix}$$



Area entre v y w

$\det(v, w) = (v,0) \times (w,0)$

Hacia variedades simplécticas

- Vamos a definir variedades diferenciales
- Vamos a definir el espacio tangente

espacio vectorial T_pM

M^n

- El espacio tangente T_pM tiene un dual T_p^*M

  $e_1, \dots, e_n$ $\qquad$ $e^1, \dots, e^n$

- Al espacio dual T_p^*M lo vamos a dotar de una forma bilineal y antisimétrica.
- Esto nos va a dar una variedad simpléctica.