

Introducción a problemas con valores iniciales y de frontera para sistemas simétricos hiperbólicos

Ramón G. Plaza

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, APDO. POSTAL
20-126, C.P. 01000 CIUDAD DE MÉXICO (MEXICO)

E-mail address: `plaza@mym.iimas.unam.mx`

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35L50, 35L67

RESUMEN. En estas notes se presenta una visión panorámica, así como una interpretación general, de la teoría desarrollada por H. O. Kreiss, A. Majda y G. Métivier, entre otros, sobre la admisibilidad de condiciones de frontera para sistemas simétricos hiperbólicos en varias dimensiones espaciales. Se presta especial atención a las condiciones necesaria y suficiente, conocidas como la condición débil y uniforme de Kreiss-Lopatinski, respectivamente, para tener un problema bien planteado en L^2 .

Contenido

Prefacio	v
Notación	1
Lección 1. Problemas hiperbólicos en una dimensión espacial	3
1.1. Problemas hiperbólicos escalares	3
1.2. Sistemas en una dimensión	6
1.3. Panorámica del método de características	10
1.4. Resumen de la primera lección	16
Lección 2. Problemas mixtos en varias dimensiones espaciales	17
2.1. Hiperbolicidad, simetrizabilidad y variedad característica	17
2.2. Condiciones de frontera	19
2.3. Problemas bien planteados en varias dimensiones	25
2.4. Condiciones de frontera estrictamente disipativas	26
2.5. Resumen de la segunda lección	28
Lección 3. La condición débil de Kreiss-Lopatinski	29
3.1. El lema de Hersh	29
3.2. La condición débil de Kreiss-Lopatinski	31
3.3. Resumen de la tercera lección	37
Lección 4. La condición uniforme de Kreiss-Lopatinski	39
4.1. El simetrizador de Kreiss	39
4.2. Estimación en el espacio de frecuencias	41
4.3. Estimación básica de energía	43
4.4. Resumen de la cuarta lección	45
Apéndice A. Transformadas de Fourier y Laplace	47
A.1. La transformada de Fourier	47
A.2. La transformada de Laplace	48
A.3. Relación entre ambos conceptos: la transformada de Fourier-Laplace	51
Bibliografía	53

Prefacio

Este documento contiene las notas del mini-curso que impartí en la I Escuela de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Colima, México, del 26 al 30 de septiembre del 2016. El objetivo del curso fue presentar una visión panorámica, así como una interpretación general, de la teoría desarrollada por H. O. Kreiss, A. Majda y G. Métivier, entre otros, sobre la admisibilidad de condiciones de frontera para sistemas simétricos hiperbólicos en varias dimensiones espaciales.

Los sistemas simétricos hiperbólicos de primer orden con valores iniciales y de frontera aparecen en diversas aplicaciones, entre las que destacan las ecuaciones de la elastodinámica [32, 11], las ecuaciones de Einstein de la teoría de relatividad general [19], y la estabilidad multidimensional de ondas de choque [23, 24]. La teoría, desarrollada desde los años 70 (a partir del artículo fundamental de H. O. Kreiss [17]) hasta la fecha, es bastante complicada y su interpretación no es aparente. En este curso me enfocaré en examinar las condiciones necesaria y suficiente, establecidas por Kreiss, para tener un problema bien planteado en sentido L^2 . Por razones de tiempo y de simplicidad, dejaré a un lado la teoría general de existencia y unicidad, y me limitaré a estudiar un problema prototipo: el de un sistema simétrico hiperbólico con coeficientes constantes, definido en un semi-plano, con frontera no característica. Este problema es suficientemente complicado en sí mismo, y su estudio es fundamental para analizar la estabilidad multidimensional de ondas de choque planas (soluciones discontinuas de sistemas no lineales de ecuaciones), cuyo planteamiento se puede transformar en un problema con coeficientes constantes. Cabe señalar que las condiciones descubiertas por Kreiss son puramente algebraicas, y relacionan las propiedades de las soluciones al sistema de ecuaciones, con la estructura algebraica de la condición de frontera. Notablemente, el estudio de estas condiciones para diversos sistemas de origen físico es objeto de intensa investigación.

La literatura sobre el tema consiste, sobre todo, en artículos de investigación (algunos de ellos muy técnicos). Destacan, sin embargo, tres referencias: el artículo revisionista de Higdon [14], el capítulo 14 del libro (general) de D. Serre [32], y el texto relativamente reciente de S. Benzoni-Gavage y D. Serre [3]. Este último contiene prácticamente todo lo que se conoce sobre el tema, aunque es muy especializado. Espero que tanto el curso impartido como el presente documento, sirvan de motivación para que los estudiantes

asistentes al primero y los potenciales lectores del segundo, se introduzcan en este vigoroso campo de estudio en análisis aplicado.

Agradezco a Salvador Pérez-Esteva por la gentil invitación para impartir el curso. Asimismo, agradezco a Magali Folch y a Ricardo Sáenz por la magnífica organización y su amable hospitalidad, que hicieron de la escuela un éxito, y de mi estancia en la Universidad de Colima una agradable experiencia.

Ramón G. Plaza
Ciudad de México
Octubre 2016.

Notación

Lista de acrónimos, símbolos y notación utilizados en el texto:

A^\top	Transpuesta de la matriz (o vector) A
A^*	Conjugada transpuesta de la matriz (o vector) A
$\det A$	Determinante de la matriz A
$\ker A$	Núcleo de la matriz (u operador) A
$\mathcal{R}(A)$	Rango de la matriz (u operador) A
$B_r(x)$	Bola de radio $r > 0$ y centro en x
\mathbb{C}	Campo de números complejos
$C^k(X; Y)$	Espacio de funciones k -diferenciables en el espacio de Banach X que toma valores en el espacio de Banach Y
$C_0^k(X; Y)$	Espacio de funciones k -diferenciables con soporte compacto en X
c.d.s.	Acrónimo de “casi donde sea”
L^p	Espacio de funciones Lebesgue medibles tales que $\int f ^p dx < +\infty$, $1 \leq p < \infty$
\mathbb{N}	Conjunto de números naturales
$\overline{\Omega}$	Cerradura del conjunto Ω
$\partial\Omega$	Frontera del conjunto Ω
\emptyset	Conjunto vacío
\mathbb{R}	Conjunto de números reales
\mathbb{R}^d	Espacio euclideo de dimensión $d \geq 1$
$u_{x_i}, \partial_{x_i} u$	Derivada parcial $\partial u / \partial x_i$
$\partial_{x_i}^k u$	Derivada parcial de orden $k \geq 0$ con respecto a la variable x_i : $\partial^k u / \partial x_i^k$
$W^{m,p}, H^s$	Espacios de Sobolev
\mathbb{Z}	Campo de números enteros

LECCIÓN 1

Problemas hiperbólicos en una dimensión espacial

En esta primera lección vamos a introducir el concepto de hiperbolicidad, por un lado, y el de problema mixto, por el otro, cuando la dimensión espacial es igual a $d = 1$. Prestaremos especial atención a determinar qué tipo de condiciones de frontera son admisibles para tener un problema bien planteado, que en este caso significa que no tengamos un problema ni sobreni sub-determinado. Este tipo de sistemas hiperbólicos en una dimensión aparecen de manera natural en mecánica de fluidos y en fenómenos de transporte, entre otros.

1.1. Problemas hiperbólicos escalares

Pensemos en la ecuación diferencial parcial más simple posible. Ésta es,

$$u_t + au_x = 0, \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es la variable espacial, $t > 0$ denota el tiempo, $u = u(x, t)$ es una cantidad escalar, y $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, es constante.

Esta ecuación, a pesar de su sencillez, tiene nombre: se conoce como la *ecuación de transporte* (en su versión más simple: ecuación escalar, en una dimensión espacial, con velocidad constante). El problema de Cauchy asociado a (1.1) consiste en resolver (1.1) sujeta a una condición inicial de la forma

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.2)$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida.

OBSERVACIÓN 1.1. Se puede utilizar la ecuación (1.1) para modelar la concentración (por unidad de longitud) de una sustancia química, en la posición $x \in \mathbb{R}$ a tiempo $t > 0$, que se vierte sobre un dominio unidimensional, por ejemplo, un río que fluye con velocidad constante a . Si la sustancia no se difunde, entonces ésta se transporta con velocidad $a \in \mathbb{R}$. La condición inicial representa la distribución inicial de la sustancia a lo largo del río.

Reconocemos que el lado derecho de la ecuación (1.1) es la derivada direccional de u en dirección de $(a, 1)^\top$ en el plano (x, t) :

$$u_t + au_x = \nabla_{(x,t)} u \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

El vector $(a, 1)^\top \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ en el espacio-tiempo determina una dirección preferencial, denominada *característica*, que está determinada por la misma ecuación. Esto motiva la siguiente

DEFINICIÓN 1.2. Las curvas de la forma

$$x(t) = at + y_0,$$

para $t > 0$ y $y_0 \in \mathbb{R}$ fijo, se denominan *curvas características* asociadas a la ecuación (1.1).

Las curvas características están dotadas de una propiedad importante: la “información” se propaga sobre ellas. Esto significa, con precisión, lo siguiente:

PROPOSICIÓN 1.3. Si $u = u(x, t)$ es una solución diferenciable de la ecuación (1.1) entonces u es constante sobre todas las curvas características.

DEMOSTRACIÓN. Evaluamos la solución sobre una curva característica, $U(t) := u(at + y_0, t)$. De este modo,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}u(at + y_0, t) = (au_x + u_t)(at + y_0, t) = 0.$$

□

En vista de esta observación, resolver el problema de Cauchy (1.1), (1.2) es muy sencillo. Para cada $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, fijo, existe una única curva característica

$$\{(x + a(s - t), s) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) : s \geq 0\},$$

que intersecta al eje $s = 0$ en el punto $y_0 = x - at$. Como u es constante sobre la curva característica, entonces la solución es simplemente

$$u(x, t) = u(x - at, 0) = u_0(x - at).$$

En efecto, si u_0 tiene derivadas continuas con respecto a su argumento entonces

$$u_t + au_x = -au'_0(x - at) + au'_0(x - at) = 0.$$

Las siguientes observaciones son triviales en este contexto, pero son importantes:

- La solución tiene forma de *onda viajera*: $u(x, t) = u_0(x - at)$. Es decir, es una función que no cambia de forma y que depende únicamente de la variable de translación, $x - at$. La onda viaja con velocidad $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- Si u_0 es de clase $C^m(\mathbb{R})$ entonces, claramente, u es de clase $C^m(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$. Es decir la regularidad se preserva.
- Dado que $a \neq 0$, la curva de datos iniciales $\{t = 0\}$ *no* es una curva característica.

Ahora nos planteamos la posibilidad de imponer condiciones de frontera. Pensando en el ejemplo del químico que se transporta por el flujo de un río, supongamos que en un punto del río, $x = 0$, se vierte el químico a una razón conocida. En este caso, conocemos la concentración u en el punto $x = 0$ para todo tiempo $t > 0$. La condición de frontera tiene la forma genérica

$$bu(0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (1.3)$$

donde $b \neq 0$ es una constante, y $g = g(t)$ es una función conocida de $t > 0$.

El resultado es un problema con valores iniciales y de frontera: resolver (1.1), sujeta a la condición inicial (1.2) y a la condición de frontera (1.3), es decir,

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x > 0, \\ bu(0, t) &= g(t), & t > 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Supongamos, por el momento, que $a > 0$. Sea $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Entonces tenemos dos casos:

- (a) $x > at$
- (b) $0 < x < at$

En el caso (a), la curva característica que pasa por (x, t) intersecta al eje $\{t = 0\}$ en el punto $x - at > 0$, y la solución está determinada por la condición inicial. En el caso (b), $x - at < 0$, y la curva característica que pasa por (x, t) intersecta primero al eje $\{x = 0\}$ en el punto $(0, t - x/a)$ (es decir, a tiempo $t - x/a > 0$). En este caso la solución está determinada por la condición de frontera.

La solución al problema (1.4) es, por lo tanto,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at), & 0 < at < x, \\ g(t - x/a)/b, & 0 < x < at. \end{cases} \quad (1.5)$$

Notamos que es menester requerir la siguiente condición de compatibilidad entre los datos iniciales y de frontera,

$$u_0(0) = g(0)/b.$$

Notamos que si se cumple esta condición entonces la solución (1.5) es continua sobre la recta $x = at$.

EJERCICIO 1.4. Encontrar las condiciones sobre u_0 y g para que la solución (1.5) sea de clase $C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$.

Si la ecuación es no homogénea, $u_t + au_x = f$, donde $f = f(x, t)$ es una función conocida, el método de solución es exactamente el mismo: integración sobre curvas características. En este caso la función u no es constante sobre ellas, pero la ecuación diferencial parcial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria no homogénea que se resuelve por integración directa.

El problema no homogéneo es

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= f(x, t), & x > 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x > 0, & \\ bu(0, t) &= g(t), & t > 0. & \end{aligned} \quad (1.6)$$

EJERCICIO 1.5. Verificar, mediante el método de integración sobre curvas características, que la solución al problema (1.6) es

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) + \int_{t-x/a}^t f(a(s-t) + x, s) ds, & 0 < at < x, \\ g(t - x/a)/b + \int_0^t f(a(s-t) + x, s) ds, & 0 < x < at. \end{cases} \quad (1.7)$$

Hallar las condiciones de compatibilidad sobre f, g y u_0 para que la solución sea de clase $u \in C^1((0, +\infty) \times (0, +\infty)) \cap C([0, +\infty) \times [0, +\infty))$

OBSERVACIÓN 1.6. Notamos que el dominio espacial es $x > 0$. Por lo tanto, si $a > 0$ entonces requerimos *una* condición de frontera en $x = 0$. Si, por el contrario, $a < 0$ entonces el problema no requiere condiciones de frontera: la solución sobre el eje $\{x = 0\}$ está completamente determinada por la condición inicial.

EJERCICIO 1.7. Aplica el método de características para resolver el problema

$$\begin{aligned} u_t + au_x + cu &= f(x, t), & x > 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x > 0, & \\ bu(0, t) &= g(t), & t > 0, & \end{aligned}$$

donde $a, c \neq 0$ son constantes, y f, g, u_0 funciones conocidas.

1.2. Sistemas en una dimensión

Ahora vamos a extrapolar estas ideas al caso de sistemas. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_t + Au_x + Cu &= f, & x > 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x > 0, & \\ Bu(0, t) &= g(t), & t > 0, & \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, y $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices constantes. La matriz constante $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ determina las p condiciones de frontera en $\{x = 0\}$ y, suponemos, tiene rango igual a $p \in \mathbb{N}$ (no hay condiciones redundantes ni contradictorias). Las funciones $f : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$ y $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, son conocidas.

Entonces nos planteamos, de manera natural, las siguientes preguntas: ¿Cuándo tiene el sistema soluciones de tipo onda viajera? ¿Cuántas condiciones de frontera debemos imponer?

Para responder a la primera pregunta, analicemos el caso $C = 0$, $f = 0$. El sistema de ecuaciones tiene la forma

$$Lu := u_t + Au_x = 0.$$

Si proponemos una solución de este sistema en forma de onda viajera, es decir,

$$u(x, t) = \varphi(x - at),$$

donde $a \in \mathbb{R}$, y la función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable (conocida como el perfil de la onda), entonces tras sustituir obtenemos un problema espectral:

$$u_t + Au_x = -a\varphi'(x - at) + A\varphi'(x - at) = (A - aI)\varphi'(x - at) = 0.$$

Reconocemos que $a \in \mathbb{R}$ debe ser un valor propio de A , y φ' el vector propio asociado.

DEFINICIÓN 1.8. Se dice que el operador $L = \partial_t + A\partial_x$ es *hiperbólico* si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable sobre \mathbb{R} , es decir, si todos los valores propios de A son reales, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, y semi-simples (las multiplicidades geométrica y algebraica coinciden). A los valores propios se les denomina *velocidades características*. El sistema de ecuaciones

$$\tilde{L}u = u_t + Au_x + Cu = f,$$

es hiperbólico, si la parte principal del operador, $L = \partial_t + A\partial_x$, es hiperbólico.

Algunas observaciones son necesarias en este punto.

OBSERVACIÓN 1.9.

- (a) Notamos que el sistema en (1.8) es hiperbólico sólo si la parte principal del operador, es decir, la que involucra a las derivadas de orden más alto, es hiperbólico, independientemente de C .
- (b) La condición de semi-simplicidad para las velocidades características es importante, ya que implica que la matriz A tiene una base completa de vectores propios en \mathbb{R}^n . Claramente, el sistema es hiperbólico si y sólo si A tiene valores propios reales y exactamente n vectores propios linealmente independientes. Nótese que un valor propio a_j puede tener multiplicidad $m > 1$, pero siempre tiene m vectores propios asociados (A no tiene bloques de Jordan no triviales).

Es importante que el lector no tenga la idea equivocada que esta definición es particular de sistemas con coeficientes constantes. Incluso para sistemas cuasi-lineales con coeficientes variables tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.10 (hiperbolicidad, caso no lineal). El sistema de ecuaciones

$$u_t + A(x, t, u)u_x + C(x, t, u)u = f(x, t),$$

es hiperbólico en un punto $(x_0, t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \Omega$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si la matriz $A(x_0, t_0, u_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Se dice que

el sistema es hiperbólico si es hiperbólico en (x, t, u) para todo $(x, t, u) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \Omega$.

OBSERVACIÓN 1.11. Usualmente requerimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto de *variables de estado*, sea conexo. El estudio de sistemas hiperbólicos en regiones disconexas en las variables de estado tiene diversas aplicaciones en la teoría de *transiciones de fase* (véanse [9, 10, 22]).

Es claro que si la matriz A es simétrica entonces es diagonalizable sobre \mathbb{R} y tenemos un sistema hiperbólico. Tenemos pues, la siguiente

DEFINICIÓN 1.12. El sistema de ecuaciones

$$Lu = u_t + Au_x + Cu = f,$$

es llamado *simétrico* si la matriz A es simétrica. El sistema se denomina *simetrizable* si existe una matriz $S_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica, definida positiva, tal que S_0A es simétrica.

Los conceptos de simetrizabilidad e hiperbolicidad están relacionados. La demostración del siguiente resultado se deja al lector como ejercicio.

LEMA 1.13. *En el caso de una dimensión espacial, $d = 1$, un sistema es hiperbólico si y sólo si es simetrizable.*

EJERCICIO 1.14. Demostrar el lema 1.13. (Ver el lema 2.4 más adelante.)

OBSERVACIÓN 1.15. En varias dimensiones espaciales, $d \geq 2$, la implicación inversa no es cierta: es posible construir sistemas hiperbólicos no simetrizables. El ejemplo clásico se debe a Lax [21].

Volviendo a nuestro problema en una dimensión, (1.8), nos interesa determinar cuantas condiciones de frontera necesitamos. Esto es, debemos determinar p . Nuevamente, analicemos el caso $f = 0$, $C = 0$. Veremos que, en el caso de una dimensión espacial, es fácil encontrar las dimensiones de la matriz B basándonos en el cálculo de las ondas incidentes y reflejadas en la frontera. Suponiendo que el sistema es hiperbólico diagonalizamos A :

$$QAQ^{-1} = \Lambda = \text{diag}(a_j)_{j=1}^n,$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante e invertible, y $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ son los valores propios de A . Como en el caso escalar, vamos a denominar características a las siguientes curvas en el espacio-tiempo:

$$x(t) = a_j t + y, \quad j = 1, \dots, n.$$

Vamos a suponer, adicionalmente, que la frontera $\{x = 0\}$ no es una curva característica, es decir, $\det A \neq 0$. En este caso podemos agrupar los valores propios en (estrictamente) negativos y positivos:

$$a_1 \leq \dots \leq a_l < 0 < a_{l+1} \leq \dots \leq a_n,$$

es decir, A tiene l valores propios negativos y $n - l$ positivos. Entonces definimos el cambio de variables,

$$v = Qu,$$

de manera que el sistema de ecuaciones se desacopla:

$$v_t + QAQ^{-1}v_x = 0,$$

esto es, tenemos n ecuaciones escalares independientes

$$\partial_t v_j + a_j \partial_x v_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Notamos que para $1 \leq j \leq l$, se tiene que $a_j < 0$ y, por ende, $x > 0 > a_j t \geq \dots \geq a_1 t$ para todo punto fijo del espacio tiempo $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Por lo tanto, para estas coordenadas, la solución está determinada por la condición inicial,

$$v_j(x, t) = v_j(x - a_j t, 0), \quad j = 1, \dots, l,$$

donde $v(x, 0) = Qu_0(x)$.

En contraste, consideremos $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ tal que $0 < x < a_{l+1}t$. En este caso las características con pendiente positiva intersectan al eje $\{x = 0\}$ y es necesario prescribir $n - l$ condiciones de frontera para determinar los valores de $v_j(0, t - x/a_j)$, $j = l + 1, \dots, n$. Ver figura 1.1.

Visto de otra manera, por cada punto sobre la frontera, se intersectan exactamente l curvas características con pendiente $a_j < 0$ que transportan la información de la condición inicial (ondas incidentes), con $n - l$ curvas características con pendiente positiva, $a_j > 0$, que no han sido especificadas (ondas reflejadas).

De hecho, definiendo $v^I(x, t) = (v_1, \dots, v_l)^\top$ (ondas incidentes) y $v^{II}(x, t) = (v_{l+1}, \dots, v_n)^\top$ (ondas reflejadas), las condiciones de frontera en $x = 0$ deben tener la forma general

$$v^{II}(0, t) = \tilde{B}v^I(0, t) + g(t),$$

con $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(n-l) \times l}$, constante. Condiciones adicionales de compatibilidad entre g y u_0 debe ser impuestas también. Las condiciones de frontera se pueden escribir de la forma

$$Bu(0, t) := (-\tilde{B} \quad I)Qv(0, t) = g(t),$$

donde $B \in \mathbb{R}^{(n-l) \times l}$ es una matriz de rango $n - l$. Es decir, $p = n - l$, el número de valores propios positivos de A .

Si $C \neq 0$ y $f \neq 0$, la condición de frontera debe satisfacer el mismo criterio. La identificación de las ondas que “entran” ($a_j < 0$) y las ondas que “salen” es independiente de C y f .

PROPOSICIÓN 1.16. *Una condición necesaria para que el problema (1.8) esté “bien planteado” es que $\text{rango}(B) = p$, el número de valores propios positivos de A .*

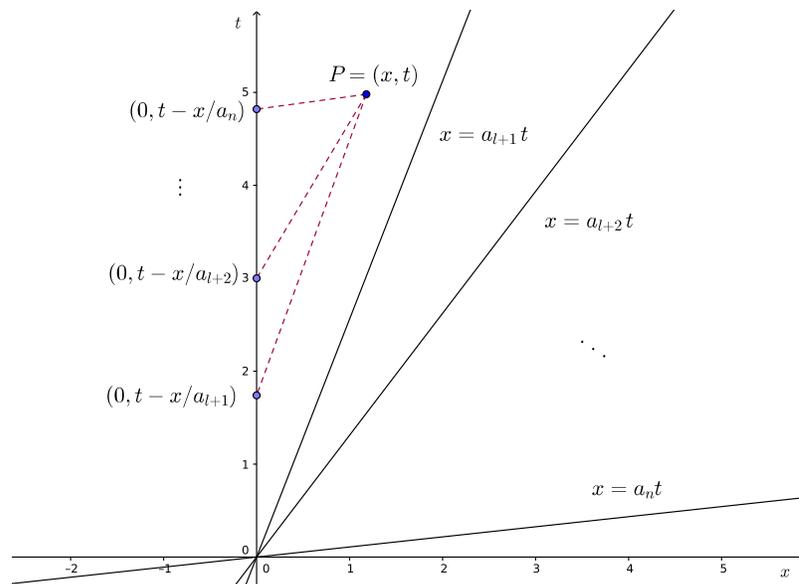


FIGURA 1.1. Las características que pasan por $P = (x, t)$, $0 < x < a_{l+1}t$, con pendientes positivas $0 < a_j$, intersectan al eje $\{x = 0\}$ en $n - l$ puntos.

1.3. Panorámica del método de características

En esta sección vamos a presentar una guía del método de características que se emplea para demostrar la existencia de soluciones a un sistema hiperbólico en una dimensión espacial con coeficientes variables. La idea general que queremos comunicar es que, en una dimensión espacial, resulta relativamente sencillo (e intuitivo) interpretar el operador como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre las curvas características. Los detalles de esta construcción se pueden consultar en los textos clásicos de Courant y Hilbert [6], y John [15].

Comencemos analizando el problema de Cauchy. Posteriormente indicaremos las modificaciones pertinentes para establecer la existencia de la solución al problema con valores en la frontera. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} u_t + A(x, t)u_x + C(x, t)u &= f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $A, C : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. u_0 y f son funciones conocidas. Nótese que estamos considerando un sistema con coeficientes variables. Vamos a hacer las siguientes hipótesis:

HIPÓTESIS 1.17 (regularidad). $u_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, $A, C \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, $f \in C(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$. Mas aún, supondremos que $\partial_t A$, $\partial_{x_j} A$ son Lipschitz continuas.

HIPÓTESIS 1.18 (hiperbolicidad). El sistema es simétrico hiperbólico, es decir, $A(x, t) = A(x, t)^\top$, para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Por lo tanto, por hipótesis, para cada $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ existe una base completa de vectores propios

$$r_j(x, t) \in \mathbb{R}^n, \quad r_j \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty)),$$

asociados a valores propios

$$a_j(x, t) \in \mathbb{R}, \quad a_j \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty)),$$

tales que

$$A(x, t)r_j(x, t) = a_j(x, t)r_j(x, t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Si definimos $G(x, t, u) := f - Cu$ entonces el sistema se lee

$$u_t + A(x, t)u = G(x, t, u).$$

Las soluciones de

$$\frac{d\hat{x}_j}{dt} = a_j(\hat{x}_j, t), \quad j = 1, \dots, n,$$

definen curvas características, que denotamos \mathcal{C}_j , en el espacio-tiempo. Para cada punto $P = (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, las curvas características que lo contienen se pueden representar por funciones de la forma

$$x = \bar{x}_j(t; \xi, \tau), \quad \mathcal{C}_j = \{(\bar{x}_j, t) : t > 0\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Por las hipótesis y el teorema de Picard¹, cada función \bar{x}_j es de clase C^1 con respecto a (t, ξ, τ) . Definimos el siguiente operador diferencial a lo largo de cada dirección característica

$$D_j := \partial_t + a_j \partial_x, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dado que A es simétrica, tenemos que $r_j^\top A = a_j r_j^\top$ para cada j . Multiplicando el sistema por r_j^\top por la izquierda obtenemos

$$r_j^\top (u_t + a_j u_x) = r_j^\top G, \quad j = 1, \dots, n,$$

sistema que, escrito en forma vectorial, se expresa como

$$LDu = LG,$$

donde

$$D := \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_n \end{pmatrix}, \quad L(x, t) = \begin{pmatrix} r_1^\top \\ \vdots \\ r_n^\top \end{pmatrix}.$$

¹véase cualquier libro básico de ecuaciones diferenciales ordinarias [4, 5].

Definimos ahora las variables características:

$$w_j := r_j^\top u, \quad W := (w_1, \dots, w_n)^\top = Lu.$$

Como los vectores r_j son una base completa, L es invertible. Así, el sistema se transforma en

$$DW = LG + (DL)L^{-1}W =: \tilde{F}(x, t, W).$$

Obtenemos, de este modo, el sistema

$$\begin{aligned} DW &= \tilde{F}(x, t, W), \\ W(x, 0) &= W_0(x), \end{aligned} \tag{1.10}$$

con $W_0(x) := L(x, 0)u_0(x)$.

Sea $P = (\xi, \tau)$ un punto del espacio-tiempo. Las curvas características que pasan por P intersectan el eje $\{t = 0\}$ en puntos que denotaremos como $\hat{P}_j = (\hat{x}_j, 0)$, con $\hat{x}_j = \bar{x}_j(0; \xi, \tau)$. Sea $\mathcal{G} \subset \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, una región cerrada y acotada del espacio-tiempo. Para cada $P = (\xi, \tau) \in \mathcal{G}$ las curvas características intersectan el eje $\{t = 0\}$ en una sección \mathcal{S} , cerrada y acotada, del eje x . Para cada $h > 0$, vamos a denotar como \mathcal{G}_h a la banda

$$\mathcal{G}_h := \{(x, t) \in \mathcal{G}, 0 < t < h\}.$$

Ver figura 1.2.

Para demostrar la existencia de la solución se procede siguiendo los siguientes pasos:

- El problema de Cauchy con valores iniciales $\psi = \psi(x)$, $x \in \mathcal{S}$ tiene una solución única con derivadas continuas en \mathcal{G}_h si h es suficientemente pequeño.
- La solución se puede extender a todo \mathcal{G} siempre y cuando los coeficientes continúen siendo Lipschitz continuos.

Sea X el conjunto de funciones de clase C^1 en \mathcal{G} con valores iniciales $W_0(x)$, esto es,

$$X = \{W \in C^1(\mathcal{G}; \mathbb{R}^n) : W(x, 0) = W_0(x)\}.$$

Notando que la componente $1 \leq j \leq n$ de la ecuación para W es

$$D_j w_j = (\partial_t + a_j \partial_x) w_j = \tilde{F}_j(x, t, W),$$

podemos integrar a lo largo de la característica, desde el punto inicial $(\hat{x}_j, 0) = (\bar{x}_j(0; \xi, \tau), 0)$, hasta el punto final, $(\xi, \tau) = (\bar{x}_j(\tau; \xi, \tau), \tau)$. El resultado es,

$$w_j(\xi, \tau) = w_j(\hat{x}_j, 0) + \int_0^\tau \tilde{F}_j(\bar{x}_j(t; \xi, \tau), t, W) dt.$$

De esta manera definimos el mapeo $\mathcal{T} : X \rightarrow X$, mediante,

$$W = \mathcal{T}V, \quad \mathcal{T}V := W_0(\hat{x}_j) + \int_0^\tau \tilde{F}(\bar{x}, t, V),$$

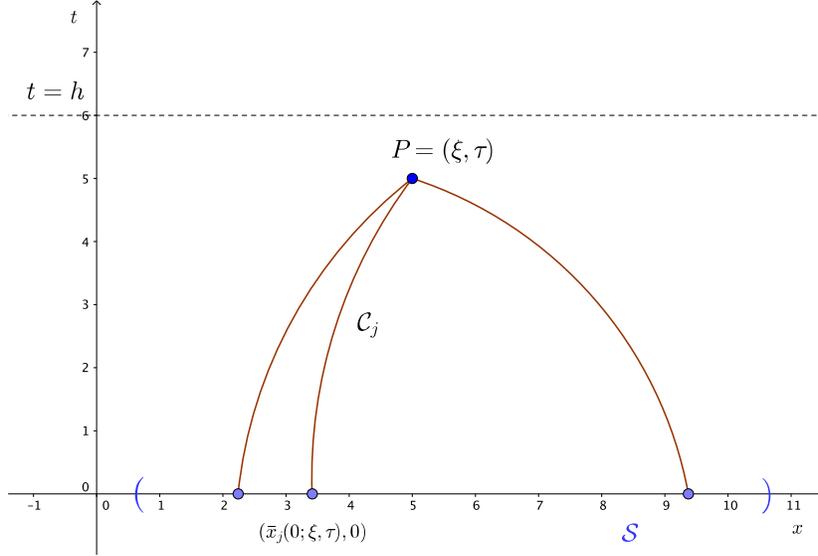


FIGURA 1.2. Las características que pasan por $P = (\xi, \tau) \in \mathcal{G}_h$ intersectan el eje $t = 0$ en puntos de la forma $(\bar{x}_j(0; \xi, \tau), 0)$. La construcción de la solución se realiza mediante integración directa sobre las características.

donde \bar{x} indica que se está efectuando la integración a lo largo de las n curvas características. Al igual que en el problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias, definimos las iteraciones de Picard:

$$U_{k+1} := \mathcal{T}U_k, \quad k \geq 0, \quad U_0 := \Psi(x, t) \in X,$$

donde

$$\Psi(x, t) := L(x, t)u_0(x) \in X,$$

en virtud de que L y u_0 son de clase C^1 , y $\Psi(x, 0) = L(x, 0)u_0(x) = W_0(x)$. Como es natural, definimos la norma del máximo:

$$\|f\|_0 := \max_{\substack{(x,t) \in \mathcal{G} \\ i=1, \dots, n}} |f_i(x, t)|.$$

Sea $M := \|\Psi\|_0 > 0$. Definimos el conjunto de funciones admisibles como

$$\mathcal{A} = \{V \in X : \|V\|_0 < 2M\}.$$

Como \mathcal{G} es cerrado y acotado, para \tilde{F} de clase C^1 existe $\mu > 0$ tal que $\|\tilde{F}\|_0, \|\tilde{F}_u\|_0, \|\tilde{F}_{x_j}\|_0, \|\tilde{F}_t\|_0 < \mu$.

LEMA 1.19. Para $h > 0$ suficientemente pequeño tenemos que $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Para $(\xi, \tau) \in \mathcal{G}_h$ se tiene que

$$\|W\|_0 = \|\mathcal{TV}\|_0 \leq \|W_0\|_0 + \int_0^\tau \|\tilde{F}\|_0 dt \leq M + \mu h.$$

Para todo $0 < h < M/\mu$ obtenemos $\|W_0\| < 2M$. \square

Para analizar la convergencia de las iteraciones de Picard, definimos

$$Z_k := U_{k+1} - U_k = \int_0^\tau \tilde{F}(\bar{x}, t, U_k) - \tilde{F}(\bar{x}, t, U_{k-1}) dt.$$

En virtud de que \tilde{F} tiene derivadas continuas con respecto a u , por el teorema del valor medio tenemos

$$\tilde{F}_j(\bar{x}_j, t, U_k) - \tilde{F}_j(\bar{x}_j, t, U_{k-1}) = D_u \tilde{F}_j(\bar{x}_j, t, \tilde{\theta}_j) Z_{k-1},$$

con $\tilde{\theta}_j = U_k + \theta U_{k+1}$, $|\theta| < 1$. Como $\|D_u \tilde{F}\|_0 < \mu$ obtenemos

$$\|Z_k\|_0 < h j \mu \|Z_{k-1}\|_0 \leq h n \mu \|Z_{k-1}\|_0.$$

Escogiendo $h n \mu < 1/2$, claramente concluimos que

$$\|Z_k\|_0 \leq K \|Z_{k-1}\|_0, \quad \text{con } 0 < K < 1.$$

Esto significa que \mathcal{T} es un *mapeo contractivo* en \mathcal{A} en la norma del máximo. Por el teorema de punto fijo de Banach, \mathcal{T} tiene un único punto fijo $U \in \mathcal{A}$, que es el límite uniforme de las iteraciones de Picard, U_n , en \mathcal{G}_h . Claramente, U es solución del problema de Cauchy, ya que $U(0) = W_0(x)$ y $DU = \tilde{F}(x, t, U)$. Resta verificar que U_t y U_ξ son continuas. Es suficiente con probar la existencia y continuidad de la derivada con respecto a ξ , en virtud de que la derivada direccional, DU , es claramente continua.

EJERCICIO 1.20. Bajo las hipótesis y en la iteración de Picard definida:

(a) Verificar que la derivada con respecto de ξ de $W = \mathcal{TV}$ es

$$\begin{aligned} \partial_\xi W(\xi, \tau) = & - \int_0^\tau (G_x + G_u V_x + L_x D u - u_x D L) dt + \\ & + (L_x v)|_{t=\tau} - (L \partial_x u_0)|_{t=0}. \end{aligned}$$

(Expresión en términos de V y de sus primeras derivadas sin hacer referencia a segundas derivadas de L . Recordar que $V = L(x, t)u(x, t)$, y que $\tilde{F} = LG + (DL)L^{-1}W$.) Concluir que W_ξ es continua.

(b) Verificar que para $h > 0$ (posiblemente más) pequeño, la transformación \mathcal{T} es contractiva también en las primeras derivadas.

En vista del ejercicio 1.20, podemos concluir que también $\partial_\xi U_n$ y $\partial_t U_n$ convergen uniformemente, por lo que la función construida U es solución del problema de Cauchy.

Finalmente, para continuar la solución a tiempos posteriores, se toma $t = h$ como condición inicial y se repite el proceso para obtener una solución (única) en el intervalo $t \in [h, 2h], [2h, 3h]$, etc. La existencia es global en $t > 0$ siempre y cuando la continuidad y la cota uniforme se preserven. Para los detalles, ver [6, 15].

Problemas con valores en la frontera. Este procedimiento se puede adaptar al caso con valores en la frontera de la forma

$$Bu(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

donde $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es una matriz constante de rango igual a p , el número de valores propios positivos de A . Asimismo, suponemos que $g \in C^1((0, +\infty); \mathbb{R}^p)$ es conocida y suficientemente regular. Para un punto $P = (\xi, \tau) \in \mathcal{G}_h$, sea \hat{x}_j la intersección de la curva característica \mathcal{C}_j que pasa por P con el eje $\{t = 0\}$. Si $\hat{x}_j > 0$ entonces se define la iteración de la misma manera que para el problema de Cauchy:

$$w_j(\xi, \tau) = w_j(\hat{x}_j, 0) + \int_0^\tau \tilde{F}_j(\bar{x}_j(t; \xi, \tau), t, V) dt.$$

(Esto sucede, por ejemplo, si $1 \leq j \leq n - p$, ya que las velocidades características son negativas, $a_1 \leq \dots \leq a_{n-p} < 0$.)

En puntos de la forma $P = (0, t)$, la condición de frontera $BL^{-1}W = g$, con B de rango p , implica que las p restantes coordenadas se pueden expresar como combinaciones lineales de las primeras $n - p$ ondas incidentes (ver figura 1.3), de manera que

$$w_j(0, t) = \tilde{g}_j(t) + \sum_{i=1}^{n-p} \gamma_{ij}(t) w_i(0, t),$$

para ciertos escalares $\gamma_{ij}(t)$. Los valores de $w_i(0, t)$ con $1 \leq i \leq n - p$ se pueden calcular por integración sobre las características que intersectan a la condición inicial en coordenadas \hat{x}_i positivas. Por lo tanto, si $P = (0, \tau_0)$ entonces

$$w_j(0, \tau_0) = \tilde{g}_j(\tau_0) + \sum_{i=1}^{n-p} \gamma_{ij}(\tau_0) \left(w_i(\hat{x}_i, 0) + \int_0^{\tau_0} \tilde{F}_i(\bar{x}_i(t; 0, \tau_0), t, V) dt \right).$$

Así, para cualquier $P = (\xi, \tau)$, la iteración de Picard para las coordenadas cuyas características intersectan la condición de frontera (pueden ser todas las \mathcal{C}_j 's con $j \geq n - p + 1$ o sólo algunas de ellas, ver figura 1.3) se puede expresar de la forma

$$\begin{aligned} w_j(\xi, \tau) &= \tilde{g}_j(\tau_0) + \sum_{i=1}^{n-p} \gamma_{ij}(\tau_0) \left(w_i(\hat{x}_i, 0) + \int_0^{\tau_0} \tilde{F}_i(\bar{x}_i(t; 0, \tau_0), t, V) dt \right) + \\ &+ \int_{\tau_0}^\tau \tilde{F}_j(\bar{x}_j(t; \xi, \tau), t, V) dt. \end{aligned}$$

De esta forma se puede definir el mapeo $W = \mathcal{T}V$, y demostrar que es una contracción para $0 < h \ll 1$ suficientemente pequeño de la misma manera que en el problema de Cauchy.

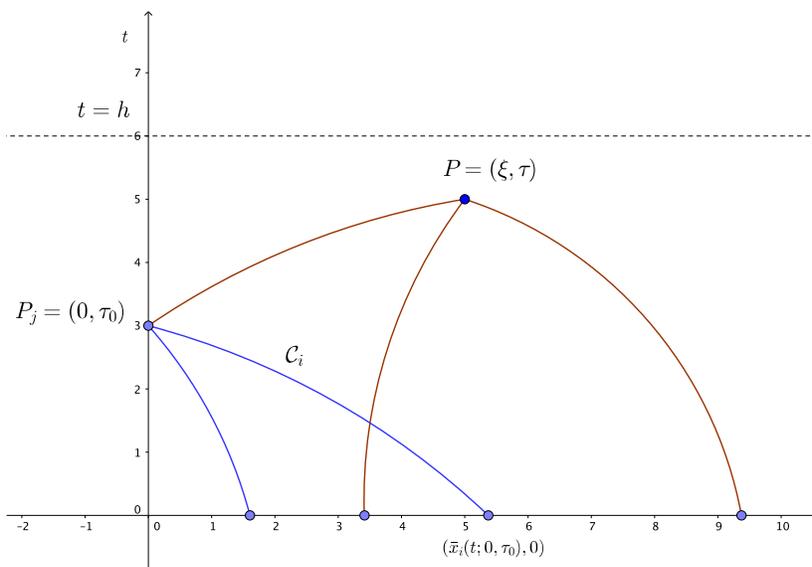


FIGURA 1.3. Algunas características que pasan por $P = (\xi, \tau) \in \mathcal{G}_h$ intersectan a la frontera en puntos de la forma $(0, \tau_0)$. La solución en estas coordenadas se calcula mediante integración directa sobre las características que pasan por $(0, \tau_0)$ y que intersectan al eje $\{t = 0\}$ en puntos de la forma $(\bar{x}_i(t; 0, \tau_0))$.

1.4. Resumen de la primera lección

Cuando la dimensión espacial es igual a $d = 1$, es relativamente sencillo determinar cuántas condiciones de frontera se necesitan para tener un sistema hiperbólico que tenga sentido. Hemos visto que el rango de B debe ser igual al número de valores propios positivos de la matriz A , bajo la hipótesis de que la frontera no es característica. Haciendo un conteo de las ondas incidentes y reflejadas, uno se puede cerciorar de que la condición de frontera debe satisfacer este criterio, incluso para problemas no homogéneos. Asimismo, en una dimensión espacial es natural aplicar el método de integración sobre curvas características para resolver de manera única el sistema hiperbólico con valores iniciales y de frontera. En varias dimensiones espaciales, sin embargo, la situación se complica y tanto hacer el análisis de ondas incidentes y reflejadas, así como la efectuar la integración sobre características, no son métodos fácilmente extrapolables. En la siguiente lección vamos a examinar un criterio para determinar el rango de B para problemas en varias dimensiones espaciales.

LECCIÓN 2

Problemas mixtos en varias dimensiones espaciales

En esta segunda lección daremos un criterio para determinar el número de condiciones de frontera en varias dimensiones espaciales. Asimismo, estableceremos el problema prototipo en el semiplano \mathbb{R}_+^d y definiremos lo que entendemos como un problema bien planteado en sentido de Kreiss.

Vamos a comenzar considerando sistemas hiperbólicos lineales con coeficientes constantes de la siguiente forma:

$$u_t + \sum_{j=1}^d A^j u_{x_j} + Cu = f, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

donde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$; $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; $C, A^j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices constantes; y $f : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una función conocida. Vamos a suponer que Ω es abierto, acotado, con frontera, $\partial\Omega$, de clase C^1 .

Asimismo, el sistema está dotado de una condición inicial,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

y de condiciones de frontera de la forma

$$Bu = g, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

donde $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es una matriz constante de rango $p \leq n$, y la función

$$g : \partial\Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

es conocida.

A este tipo de problemas se les llama *mixtos* en la literatura ya que combinan condiciones de frontera con condiciones iniciales. Vamos a determinar p , el número de condiciones de frontera.

2.1. Hiperbolicidad, simetrizabilidad y variedad característica

DEFINICIÓN 2.1. El sistema (2.1) es *hiperbólico* si para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$, el símbolo

$$A(\xi) := \sum_{j=1}^d \xi_j A^j, \quad (2.4)$$

es uniformemente diagonalizable sobre \mathbb{R} , es decir, existe una matriz invertible $P(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A(\xi) = P(\xi)^{-1} \text{diag} \left(a_j(\xi) \right)_{j=1}^n P(\xi),$$

donde $a_j(\xi) \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ son los valores propios de $A(\xi)$, y además existe una constante uniforme $C > 0$ tal que

$$|P(\xi)||P(\xi)^{-1}| \leq C,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.

DEFINICIÓN 2.2. Se dice que el sistema (2.1) es *constantemente hiperbólico* si las matrices $A(\xi)$ son diagonalizables sobre \mathbb{R} para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$ y, además, las multiplicidades de los valores propios de $A_j(\xi)$ son constantes en $\xi \in \mathbb{R}^d$.

DEFINICIÓN 2.3. El sistema es *simétrico* si las matrices A^j son simétricas. El sistema es *simetrizable en sentido de Friedrichs* si existe $S_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (simetrizador), definido positivo, simétrico, tal que $S_0 A^j$ es simétrica para cada $j = 1, \dots, n$.

LEMA 2.4. *Si el sistema (2.1) es Friedrichs simetrizable o constantemente hiperbólico entonces es hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el sistema es simetrizable, con simetrizador S_0 . Entonces S_0^{-1} es simétrica, definida positiva, y admite una única raíz cuadrada, R , simétrica, positiva definida, tal que $R^2 = S_0^{-1}$. Sea

$$\tilde{S}(\xi) := \sum_{j=1}^d \xi_j S_0 A^j.$$

Entonces tenemos que

$$A(\xi) = S_0^{-1} \tilde{S}(\xi) = R^2 \tilde{S}(\xi) R R^{-1}.$$

Notamos que la matriz $R \tilde{S}(\xi) R$ es real y simétrica. Por lo tanto tiene valores propios reales, $\lambda_j(\xi)$, y se puede escribir como $Q(\xi)^\top \text{diag}(\lambda_j(\xi)) Q(\xi)$ para cierta matriz ortogonal $Q(\xi)$. Definiendo $P(\xi) := Q(\xi) R^{-1}$, obtenemos

$$A(\xi) = P(\xi)^{-1} \text{diag}(\lambda_j(\xi)) P(\xi),$$

con valores propios reales $a_j = \lambda_j$. Además,

$$|P(\xi)||P(\xi)^{-1}| = |R||R^{-1}|,$$

es independiente de ξ y por ende, uniformemente acotado.

La demostración de que un sistema constantemente hiperbólico es hiperbólico se deja como ejercicio. \square

EJERCICIO 2.5. Sea un sistema hiperbólico para el cual $n = d = 2$:

$$u_t + A^1 u_x + A^2 u_y = 0, \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

con $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $A^j \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (a) Mediante un cambio de variables lineal, $v = Qu$, reduce el sistema al caso en que A^1 es diagonal.

- (b) Muestra que si A^1 (ya diagonalizada) es de la forma $aI \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (valor propio múltiple), con $a \in \mathbb{R}$, entonces el sistema se puede reducir al caso unidimensional ($d = 1$), con una condición inicial que depende de un parámetro.
- (c) Si suponemos que A^1 es diagonal pero *no* de la forma aI , muestra que, o bien A^2 es diagonal, o bien $a_{12}^2 a_{21}^2 > 0$ (a_{ij} son las entradas de A^2). (*Sugerencia:* calcula el polinomio característico de $A^2 + xA^1$.)
- (d) Finalmente, muestra que el sistema es simetrizable.

DEFINICIÓN 2.6 (variedad característica). Sea el operador

$$L := \partial_t + \sum_{j=1}^d A^j \partial_{x_j}.$$

La *variedad característica* asociada al operador L es el conjunto $(\sigma, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tales que

$$\det \left(\sigma I + \sum_{j=1}^d \xi_j A^j \right) = 0.$$

A este conjunto lo denotamos como char_L .

DEFINICIÓN 2.7. Sea \mathcal{S} una hipersuperficie suave y orientable en $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$. Se dice que \mathcal{S} es *característica* con respecto al operador L si el vector normal unitario a \mathcal{S} , $\hat{\nu} = (\hat{\nu}_t, \hat{\nu}_x)^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $|\hat{\nu}| = 1$, pertenece a char_L sobre cada punto de \mathcal{S} .

2.2. Condiciones de frontera

Nuestro objetivo es determinar un criterio para especificar el número de condiciones de frontera en varias dimensiones espaciales, es decir, para especificar p , el rango de B . Para ello consideremos el siguiente problema homogéneo, con condiciones de frontera homogéneas:

$$\begin{aligned} Lu &= 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \\ Bu &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde el operador L tiene la forma

$$Lu = u_t + \sum_{j=1}^d A^j u_{x_j} + C,$$

con $A^j, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrices constantes. Aquí $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un subconjunto abierto, acotado, con frontera de clase C^1 . Vamos a establecer las siguientes hipótesis:

HIPÓTESIS 2.8 (simetrizabilidad \Rightarrow hiperbolicidad). *El sistema es simétrico hiperbólico, es decir, A^j es simétrica para cada $j = 1, \dots, d$.*

HIPÓTESIS 2.9 (rango de B). *Las condiciones de frontera son relaciones lineales homogéneas entre las componentes de u sobre $\partial\Omega$, es decir, $Bu|_{\partial\Omega} = 0$, donde $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tiene rango igual a $p \leq n$.*

Denotamos el “cilindro” espacio temporal, $\mathcal{Z} = \Omega \times (0, +\infty)$, de manera que la frontera vertical del cilindro (sin tomar en cuenta la “base” del mismo, $\Omega \times \{t = 0\}$) es $\mathcal{S} = \partial\Omega \times (0, +\infty)$, es decir, una copia de $\partial\Omega$ para cada tiempo $t > 0$. Vamos a suponer que la frontera no es característica en el sentido de la definición 2.7.

HIPÓTESIS 2.10 (frontera no característica). *La hipersuperficie $\mathcal{S} = \partial\Omega \times (0, +\infty)$ no es característica con respecto al operador L en ningún punto, es decir, su normal unitaria satisface $\hat{\nu} \notin \text{char}_L$ para todo $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty)$.*

Notamos que el vector normal exterior unitario a la hipersuperficie $\mathcal{S} = \partial\Omega \times (0, +\infty)$ es de la forma $\hat{\nu} = (0, \hat{n})^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, donde $\hat{n} \in \mathbb{R}^d$, con $|\hat{n}| = 1$, $\hat{n} = (n_1, \dots, n_d)^\top$, es el vector normal unitario exterior a la frontera $\partial\Omega$, por lo cual la hipótesis 2.10 se reduce a requerir que

$$\det \hat{A} := \det \left(\sum_{j=1}^d n_j A^j \right) \neq 0. \quad (2.6)$$

La condición de frontera homogénea implica que, para cada $(x, t) \in \mathcal{S}$, el vector $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^n$ pertenece al núcleo de B ,

$$\mathcal{N} := \ker B \subset \mathbb{R}^n,$$

que es un espacio lineal de dimensión $n - p$, en virtud de que el rango de B es p . Vamos a establecer para \mathcal{N} la siguiente propiedad:

Para todos los vectores u en \mathcal{N} la forma cuadrática $Q(u) = u^\top \hat{A}u$ es no negativa sobre \mathcal{S} , donde $\hat{A} = \sum n_j A^j$ y $\hat{n} = (n_1, \dots, n_d)$ es la normal unitaria externa a $\partial\Omega$. (*)

Suponiendo la propiedad (*), es decir, que el espacio \mathcal{N} es no-negativo con respecto a la hipersuperficie \mathcal{S} , es posible garantizar la unicidad de la solución al problema con valores iniciales y de frontera. Para verificar esto utilizaremos lo que se conoce como *método de energía*. Sea $u = u(x, t)$ una solución suave (por ejemplo, de clase C^1) del problema (2.5). Multiplicando la ecuación $Lu = 0$ por u^\top por la izquierda obtenemos

$$u^\top Lu = u^\top u_t + \sum_{j=1}^d u^\top A^j u_{x_j} + u^\top Cu = 0.$$

Dado que A^j es simétrica y constante¹, notamos que $(u^\top A^j u)_{x_j} = 2u^\top A^j u_{x_j}$. Por lo tanto, integrando en el dominio acotado $R = \Omega \times [0, T]$, con $T > 0$

¹si las matrices A^j no son constantes el argumento funciona de igual manera definiendo $\tilde{C} := C - \frac{1}{2} \sum \partial_{x_j} A^j$.

fijo, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_R \frac{1}{2}(u^\top u)_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (u^\top A^j u)_{x_j} + u^\top C u \, dx \, dt \\
&= \int_\Omega |u(x, T)|^2 - |u(x, 0)|^2 \, dx + \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} \begin{pmatrix} u^\top A^1 u \\ \vdots \\ u^\top A^d u \end{pmatrix} \, dx \, dt + \\
&\quad + 2 \int_0^T \int_\Omega u^\top C u \, dx \, dt,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \int_{\partial\Omega} u^\top \hat{A} u \, dS_x \, dt + 2 \int_0^T \int_\Omega u^\top C u \, dx \, dt = 0. \quad (2.7)$$

tras haber aplicado el teorema de la divergencia.

LEMA 2.11. *Mediante un cambio de variables podemos transformar L en un operador \tilde{L} para el cual la correspondiente matriz C es definida positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $v = e^{-\mu t} u$, con $\mu > 0$. Entonces

$$Lu = e^{\mu t}(\mu v + Lv) =: e^{\mu t} \tilde{L}v.$$

Por lo tanto $Lu = f$ si y sólo si

$$\tilde{L}v = v_t + \sum_{j=1}^d A^j v_{x_j} + (C + \mu I)v = e^{-\mu t} f = \tilde{f}.$$

Escogiendo $\mu > 0$ suficientemente grande obtenemos $C + \mu I > 0$. \square

En vista del lema anterior podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $C > 0$. Sean entonces dos soluciones u_1, u_2 , suaves, del siguiente problema:

$$\begin{aligned}
Lu &= f, & x \in \Omega, \, t > 0, \\
u(x, 0) &= u_0, & x \in \Omega, \\
Bu &= g, & x \in \partial\Omega, \, t > 0,
\end{aligned} \quad (2.8)$$

con f, g, u_0 conocidas. Por linealidad, la diferencia $u = u_1 - u_2$ es solución del sistema (2.5) con condición inicial $u(0) = 0$. Si la condición de frontera satisface la propiedad (*), es decir, es no negativo sobre \mathcal{S} , entonces sustituyendo $u(0) = 0$ y $f = g = 0$ en la estimación de energía (2.7), observamos que las dos integrales son no negativas, y así concluimos que

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

para todo $T > 0$ arbitrario. Esto implica que $u = 0$ c.d.s. en $x \in \Omega$ para cualquier $t > 0$. Esto implica que la solución es única, con $u_1 = u_2$ c.d.s. en $\Omega \times (0, +\infty)$.

De este modo, observamos que si solicitamos que el espacio \mathcal{N} sea no negativo con respecto a \mathcal{S} entonces es posible argumentar a favor de la unicidad de una posible solución al problema no homogéneo original. Claramente, el espacio \mathcal{N} es más grande si imponemos menos condiciones de frontera. Para establecer un criterio razonable sobre el espacio \mathcal{N} , le vamos a pedir, adicionalmente, que sea *maximal no negativo*:

\mathcal{N} es maximal no negativo si es un espacio no negativo con respecto a \mathcal{S} y, además, para todo espacio lineal \mathcal{N}' no negativo sobre \mathcal{S} se tiene que $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$. (**)

LEMA 2.12. *Si \mathcal{N} es maximal no negativo entonces la dimensión de \mathcal{N} coincide con el número de valores propios positivos de \hat{A} (contando multiplicidades).*

DEMOSTRACIÓN. Por hiperbolicidad y por ser la frontera no característica sabemos que, para cada punto $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty)$, la matriz $\hat{A} = \sum n_j A^j$ tiene exactamente $n-k$ valores propios negativos, y k valores propios positivos:

$$a_1 \leq \dots \leq a_{n-k} < 0 < a_{n-k+1} \leq \dots a_n.$$

Sea $\{w_j\}_{j=1}^n$ una base de vectores propios de \hat{A} , tal que $\mathbb{R}^n = \text{span}(w_j)$, y $\hat{A}w_j = a_j w_j$, $j = 1, \dots, n$. Podemos considerar la base como ortonormal, con $w_j^\top w_i = 0$ si $i \neq j$, con $|w_j| = 1$. Si $u \in \mathcal{N}$, espacio no negativo, sabemos que $u^\top \hat{A}u \geq 0$. Escribiendo u en la base de vectores propios, $u = \sum \alpha_j w_j$ claramente tenemos que

$$u^\top \hat{A}u = \left(\sum_{j=1}^d \alpha_j w_j^\top \right) \left(\hat{A} \sum_{j=1}^d \alpha_j w_j \right) = \sum_{j=1}^{n-k} |\alpha_j|^2 a_j + \sum_{j=n-k+1}^n |\alpha_j|^2 a_j.$$

La primera suma es siempre negativa, mientras que la segunda es siempre positiva. Ahora bien, si suponemos que $\dim \mathcal{N} = n-p > k$ entonces siempre podemos encontrar una solución $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k})$, no trivial, al sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j B w_j = 0.$$

(Sistema homogéneo de p ecuaciones con $n-k$ incógnitas.) Definimos

$$u := \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j w_j.$$

Claramente, $Bu = 0$, por lo que $u \in \mathcal{N}$. Además, por el cálculo anterior reconocemos que $u^\top \hat{A}u < 0$, lo que contradice el hecho que \mathcal{N} es no negativo. Concluimos que, necesariamente, $\dim \mathcal{N} = n-p \leq k$.

Ahora supongamos que $n-p < k$. En este caso las condiciones

- $u^\top \hat{A}v = 0$, para todo $v \in \mathcal{N}$;

- $u^\top w_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, n - k$,

constituyen $n - k + n - p = 2n - (k + p)$ ecuaciones homogéneas, lineales, sobre $u \in \mathbb{R}^n$. Dado que $2n - (k + p) < n$, estas ecuaciones tienen una solución no trivial $u \neq 0, u \in \mathbb{R}^n$. Notamos que la primera condición implica que $u \notin \mathcal{N}$ (ya que si $u \in \mathcal{N}$ entonces, necesariamente, $u^\top \hat{A}u > 0$). Así, construimos un vector de la forma

$$U = \alpha u + v,$$

con $\alpha > 0$ y $v \in \mathcal{N}$ arbitrario. Entonces, como \hat{A} es simétrica, es claro que

$$U^\top \hat{A}U = \alpha^2 u^\top \hat{A}u + v^\top \hat{A}v.$$

Claramente, por construcción, $u \in \text{span}\{w_j\}_{j=n-k+1}^n$, por lo que

$$u = \sum_{j=n-k+1}^n \beta_j w_j$$

y, por ende,

$$u^\top \hat{A}u = \sum_{j=n-k+1}^n a_j \beta_j^2 > 0.$$

Esto, junto con $v^\top \hat{A}v \geq 0$ (ya que $v \in \mathcal{N}$), implica que $U^\top \hat{A}U > 0$, con $U = \alpha u + v \notin \mathcal{N}$. Tenemos un subespacio más grande que es no negativo. Esto contradice la maximalidad de \mathcal{N} .

Concluimos que

$$\dim \mathcal{N} = n - p = k,$$

el número de valores propios positivos de \hat{A} . □

Podemos resumir las observaciones anteriores en la siguiente

PROPOSICIÓN 2.13. *Una condición necesaria para tener un “problema bien planteado” es que el número de condiciones de frontera p sea igual al número de valores propios negativos de $\hat{A} = A(\hat{n}) = \sum n_j A^j$ sobre $\mathcal{S} = \partial\Omega \times (0, +\infty)$, donde \hat{n} es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.*

OBSERVACIÓN 2.14. Esta proposición es bastante contra-intuitiva: nos dice que el criterio para determinar el número de condiciones de frontera en varias dimensiones espaciales es esencialmente el mismo que en una dimensión. Esto contrasta con nuestra intuición: en varias dimensiones espaciales las características no son curvas sino hiper-superficies en el espacio-tiempo, por lo que no resulta evidente, a partir del número de velocidades características positivas o negativas, saber cuántas de ellas intersectan la frontera \mathcal{S} (que no es característica).

Suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es abierto, acotado, con frontera de clase C^1 , para cada $x^0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y una función $\phi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 , tal que

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B_r(x^0) : x_d > \phi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

La transformación $y = \Phi(x)$, definida mediante $y_j = x_j$, para $j = 1, \dots, d-1$, $y_d = x_d - \phi(x_1, \dots, x_{d-1})$, es invertible, $D_x \Phi = I$, de clase C^1 , que mapea localmente la frontera de Ω , $\partial\Omega$, al semi plano $\{x_d = 0\}$. Nótese que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{x^0 \in \partial\Omega} B_r(x^0).$$

Dado que $\partial\Omega$ es compacto, existe una subcubierta abierta finita, es decir, existe un número finito de puntos, $x_1^0, \dots, x_N^0 \in \partial\Omega$, y correspondientes radios, $r_1, \dots, r_N > 0$, tales que

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N B_i, \quad B_i := B_{r_i}(x_i^0).$$

Escogiendo un abierto $B_0 \subset\subset \Omega$ (compactamente contenido en Ω) tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N B_i,$$

entonces existe una *partición de unidad* subordinada a la cubierta, $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$, con $\zeta_i \in C_0^\infty(B_i)$, $0 \leq \zeta_i \leq 1$, y $\sum_{i=0}^N \zeta_i = 1$ (véase [8]). De este modo es posible mapear cada porción de la frontera $\partial\Omega$ al semiplano

$$\mathbb{R}_+^d := \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\},$$

y con ayuda de la partición de unidad, plantear el problema (2.1), (2.2) y (2.3), en el semi-plano \mathbb{R}_+^d en las nuevas coordenadas. El resultado es un sistema hiperbólico prototipo en el semiplano \mathbb{R}_+^d de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^d A^j u_{x_j} + Cu &= f, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \\ Bu &= g, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde

$$\Omega := \mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}, \quad \partial\Omega = \partial\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\},$$

las matrices $A^j, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son constantes, con A^j simétrica para cada $1 \leq j \leq d$, y las funciones

$$\begin{aligned} f &= f(x, t) : \mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ u_0 &= u_0(x) : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ g &= g(\tilde{x}, t) : \mathbb{R}^{d-1} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \tilde{x} = (x_1, \dots, x_{d-1}), \end{aligned}$$

son conocidas. Claramente, si la matriz de la condición de frontera B tiene dimensiones $p \times n$, entonces en el problema transformado el rango de B se mantiene. Nótese que la frontera $\partial\mathbb{R}_+^d$ tiene como normal exterior unitaria al vector

$$\hat{n} = (0, \dots, 0, -1)^\top,$$

por lo cual

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^d n_j A^j = -A_d.$$

Esto implica que si la frontera no es característica entonces $\det A_d \neq 0$, y además el número de condiciones de frontera (el rango de B) está dado por

$$\begin{aligned} p &= \text{no. de valores propios negativos de } \hat{A} \\ &= \text{no. de valores propios positivos de } A_d. \end{aligned}$$

El problema (2.9), simétrico hiperbólico, con coeficientes constantes, en el semiplano \mathbb{R}_+^d , con valores iniciales y de frontera, y con frontera no característica es el problema prototipo planteado por Kreiss en su artículo seminal de 1970 [17].

Aún no hemos definido lo que significa un problema bien planteado.

2.3. Problemas bien planteados en varias dimensiones

En general, cuando se habla de un problema bien planteado en ecuaciones diferenciales parciales, nos referimos al sentido definido por Hadamard [12]. En términos generales se puede expresar de la siguiente manera: un problema bien planteado es aquél para el cual, dada una condición inicial $u_0 \in X$, con X espacio de Banach, existe una y sólo una solución $u \in C([0, T]; Y)$, con $T > 0$ y Y espacio de Banach, tal que el mapeo $u_0 \mapsto u$, $X \rightarrow C([0, T]; Y)$ es continuo.

De manera informal, decimos que la solución existe, es única, y depende continuamente de los datos (que pueden ser datos iniciales, valores en la frontera y términos de forzamiento, por ejemplo). En el caso de sistemas hiperbólicos con valores iniciales y de frontera en varias dimensiones espaciales el método de características descrito en la lección anterior no es fácilmente extrapolable. Como hemos mencionado, las características son hiper-superficies en el espacio-tiempo y existe la posibilidad de encontrar soluciones de tipo onda viajera que son tangentes a la frontera. Por esta razón, el análisis de existencia y unicidad en varias dimensiones espaciales se realiza aplicando el método de estimaciones de energía *a priori*.

Este método consiste en establecer estimaciones de energía para soluciones suaves que decaen a cero cuando $|x| \rightarrow +\infty$. Usado técnicas standard de análisis funcional la estimación implica, a su vez, la existencia y unicidad de la solución en los espacios apropiados. En esta curso no nos preocuparemos por deducir la existencia a partir de la estimación *a priori* de energía, sino que nos enfocaremos en las condiciones para establecer dicha estimación. El problema del método de estimaciones de energía es que es un “truco”: si podemos establecer la estimación entonces contamos con una metodología directa para deducir existencia y unicidad, pero no nos dice cuáles son las condiciones necesarias ni suficientes para tener un problema bien planteado. La contribución fundamental de Kreiss consistió

en encontrar precisamente las condiciones necesaria y suficiente para que el problema (2.9) esté bien planteado en espacios L^2 . Dichas condiciones son puramente algebraicas, fáciles de comprender, y (relativamente) fáciles de comprobar. El trabajo de Kreiss [17] dio lugar a una subsecuente subárea en análisis aplicado a sistemas hiperbólicos en varias circunstancias y bajo diversas condiciones (cf. [18, 20, 31, 30, 29, 25, 24, 23, 28, 27, 2]), que incluyen coeficientes variables, frontera característica, sistemas no lineales, aplicaciones a ondas de choque, etc.

En la tónica de establecer estimaciones de energía *a priori*, vamos a definir los siguientes espacios L^2 pesados (hiperbólicos).

DEFINICIÓN 2.15. Sea $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ una región del espacio-tiempo. Definimos el espacio pesado $L^2_\eta(\mathcal{G})$ como el espacio de funciones u en \mathcal{G} tales que $(x, t) \mapsto e^{-\eta t}u(x, t)$ es de cuadrado integrable, con $\eta \in \mathbb{R}$. Claramente, cada L^2_η es un espacio de Hilbert con producto interno y norma,

$$\langle u, v \rangle_{\eta, \mathcal{G}} := \int_{\mathcal{G}} u^* v e^{-2\eta t} dx dt, \quad \|u\|_{\eta, \mathcal{G}} := \|e^{-\eta t}u\|_{L^2(\mathcal{G})},$$

respectivamente.

DEFINICIÓN 2.16. Se dice que el problema (2.9) está *bien planteado en sentido de Kreiss* si para soluciones suaves que decaen a cero en el espacio cuando $|x| \rightarrow +\infty$ es posible establecer la siguiente estimación *a priori* de energía:

$$\begin{aligned} \|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \|u\|_{\eta, \Omega \times [0, T]}^2 + \|u\|_{\eta, \partial\Omega \times [0, T]}^2 &\leq \\ &\leq C \left(\frac{1}{\eta} \|f\|_{\eta, \Omega \times [0, T]}^2 + \|g\|_{\eta, \partial\Omega \times [0, T]}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

para cierto $\eta > 0$ suficientemente grande, todo $T > 0$, y con constante uniforme $C > 0$ independiente de u .

OBSERVACIÓN 2.17. La definición de espacio L^2 pesado hiperbólico surge de manera natural a partir de la transformada de Fourier-Laplace, como veremos en la siguiente lección. La ventaja de utilizar factores de peso $\eta > 0$ en el tiempo consiste en la posibilidad de analizar problemas con coeficientes variables usando el mismo método, mediante la elección de pesos, $\eta \gg 1$, apropiadamente grandes (véase Majda [23, 24]).

Existe una clase de condiciones de frontera para la cual es posible establecer la estimación de energía (2.10) directamente.

2.4. Condiciones de frontera estrictamente disipativas

DEFINICIÓN 2.18. En el problema prototipo (2.9), se dice que la condición de frontera es *estrictamente disipativa* si existe una constante uniforme $\delta > 0$ tal que, para todos los vectores u que la satisfacen, se cumple:

$$-u^\top A_d u \geq \delta |u|^2 - \frac{1}{\delta} |g|^2. \quad (2.11)$$

Vamos a establecer la estimación *a priori* de energía en el caso de una condición de frontera estrictamente disipativa. Sea $u = u(x, t)$ una solución suave, $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d \times (0, T))$, acotada, que decae rápido a cero cuando $|x| \rightarrow +\infty$. Haciendo el cambio de variables

$$w = e^{-\eta t} u,$$

para $\eta > 0$, obtenemos

$$w_t + \sum_{j=1}^d A^j w_{x_j} + (C + \eta I)w = e^{-\eta t} f,$$

con datos,

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= u(x, 0), & x &\in \mathbb{R}_+^d, \\ Bw &= e^{-\eta t} g(t), & x &\in \partial\mathbb{R}_+^d, t \in (0, T). \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación por w^\top e integrando en $(x, t) \in \mathbb{R}_+^d \times (0, T)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+^d} \partial_t |w|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+^d} \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} (w^\top A^j w) dx dt + \\ + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+^d} w^\top (C + \eta I) w dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+^d} e^{-\eta t} w^\top f dx dt, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \|w(T)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 - \|w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 - \int_0^T \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} w^\top A_d w d\tilde{x} dt + \\ + 2 \int_{\mathbb{R}_+^d} w^\top (C + \eta I) w dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}_+^d} 2e^{-\eta t} w^\top f dx dt, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \partial\mathbb{R}_+^d$. Sobre la frontera, $x_d = 0$, w satisface $Bw = e^{-\eta t} g$. Por la condición de disipatividad estricta tenemos que

$$-w^\top A_d w \geq \delta |w|^2 - \frac{1}{\delta} |e^{-\eta t} g|^2, \quad \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^d.$$

Asimismo,

$$2e^{-\eta t} w^\top f \leq \frac{\eta}{2} |w|^2 + \frac{2}{\eta} |f|^2 e^{-2\eta t}.$$

Sustituyendo obtenemos,

$$\begin{aligned} \|w(T)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \delta \|w\|_{L^2(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0, T))}^2 + \int_{\mathbb{R}_+^d} w^\top (2C + \frac{3}{2}\eta I) w dx dt \leq \\ \leq \|w(0)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \frac{1}{\delta} \|e^{-\eta t} g\|_{L^2(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0, T))}^2 + \frac{2}{\eta} \|e^{-\eta t} f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d \times (0, T))}^2. \end{aligned}$$

Escogiendo $\eta \gg 1$ suficientemente grande tal que $2C + \frac{3}{2}\eta I \geq \eta I$, y sustituyendo $u = e^{\eta t}w$, concluimos que existe una constante uniforme $\bar{C} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u(T)\|_{L^2_\eta(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \eta \|u\|_{L^2_\eta(\mathbb{R}_+^d \times (0,T))}^2 + \|u\|_{L^2_\eta(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0,T))}^2 &\leq \\ &\leq \bar{C} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \|g\|_{L^2_\eta(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0,T))}^2 + \frac{1}{\eta} \|f\|_{L^2_\eta(\mathbb{R}_+^d \times (0,T))}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ésta es la estimación *a priori* de energía (2.10) para el semi-plano.

OBSERVACIÓN 2.19. El problema es que existen muchas aplicaciones importantes en las que las condiciones de frontera *no* son estrictamente disipativas, sobre todo en mecánica de fluidos (ver Agemi [1]). De hecho, pedir que la condición de frontera sea estrictamente disipativa es demasiado fuerte. El mérito de Kreiss consistió, como ya lo hemos mencionado, en identificar una clase más general de condiciones de frontera para las cuales es posible establecer una estimación de energía de la forma (2.10).

2.5. Resumen de la segunda lección

Mediante un argumento que requiere la maximalidad no negativa del núcleo de la matriz B de las condiciones de frontera (propiedad que nos permite, a su vez, garantizar la unicidad de una eventual solución), hemos establecido un criterio para determinar el número de condiciones de frontera, el rango de B , en términos de las velocidades características del símbolo del sistema evaluado en la dirección normal a la frontera. El criterio coincide, sorprendentemente, con el establecido en una dimensión espacial en la lección anterior. Revisamos también las definiciones de hiperbolicidad, de simetrizabilidad y de superficies características en varias dimensiones espaciales. Asimismo, hemos planteado el problema prototipo a estudiar: un sistema simétrico hiperbólico con coeficientes constantes, en el semi-plano, con frontera no característica. Definimos lo que se entiende como un problema bien planteado en sentido de Kreiss, y establecimos la estimación de energía para condiciones de frontera que satisfacen la condición de disipatividad estricta.

LECCIÓN 3

La condición débil de Kreiss-Lopatinski

En esta lección analizaremos la condición necesaria para poder establecer una estimación de energía para el problema prototipo (2.9), conocida como la *condición débil de Kreiss-Lopatinski*. Esta condición es puramente algebraica: está definida en el espacio de frecuencias de Fourier-Laplace (también conocido como espacio de *modos normales*) y atañe a la condición de frontera, así como al símbolo del operador, únicamente.

3.1. El lema de Hersh

Para establecer la condición necesaria, vamos a considerar el siguiente problema homogéneo, con condiciones de frontera e iniciales igualmente homogéneas:

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^d A^j u_{x_j} &= 0, & x \in \mathbb{R}_+^d, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}_+^d, \\ Bu &= 0, & x \in \partial\mathbb{R}_+^d, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como antes, suponemos que las matrices A^j son constantes y simétricas y que la frontera $\partial\mathbb{R}_+^d = \{x_d = 0\}$ no es característica, es decir, $\det A_d \neq 0$. Asimismo, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, donde p es el número de valores propios positivos de A_d .

Tomemos entonces la transformada de Fourier-Laplace de la solución u (ver apéndice A). Sin embargo, tomaremos la transformada de Fourier únicamente en las variables transversales a la frontera, es decir, en $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Definimos entonces

$$\tilde{u}(x_d, \tilde{\xi}, \lambda) := \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\lambda t} e^{-i\tilde{\xi} \cdot y} u(y, x_d, t) dy dt, \tag{3.2}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$. Transformando la ecuación (y aplicando propiedades elementales de la transformada de Fourier-Laplace; ver apéndice A) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\lambda \tilde{u} + i \sum_{j \neq d} \xi_j A^j \tilde{u} + A_d \partial_{x_d} \tilde{u} = 0,$$

con condición de frontera

$$B\tilde{u} = 0, \quad \text{en } x_d = 0.$$

Observamos que hemos obtenido un sistema dinámico en $x_d > 0$:

$$\partial_{x_d} \tilde{u} = -A_d^{-1} \left(\lambda I + i \sum_{j \neq d} \xi_j A^j \right) \tilde{u} =: \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi}) \tilde{u}. \quad (3.3)$$

El siguiente resultado es fundamental:

LEMA 3.1 (Hersh [13]). *Para cada $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, con $\operatorname{Re} \lambda > 0$, la matriz $\mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})$ tiene exactamente $n - p$ valores propios, $\kappa = \kappa(\lambda, \tilde{\xi})$, con parte real positiva, $\operatorname{Re} \kappa > 0$, y p valores propios con parte real negativa, $\operatorname{Re} \kappa < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a verificar que si $\operatorname{Re} \lambda > 0$ entonces la matriz $\mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})$ no tiene espacio central. En efecto, suponiendo que $\kappa = i\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, es un valor propio de \mathcal{A} , entonces existe un vector propio $w \in \mathbb{C}^n$, $w \neq 0$, tal que

$$i\theta w = \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi}) w = -A_d^{-1} \left(\lambda I + i \sum_{j \neq d} \xi_j A^j \right) w,$$

es decir,

$$\left(\theta A_d + \sum_{j \neq d} \xi_j A^j \right) w = i\lambda w, \quad w \neq 0.$$

En virtud de que el sistema es hiperbólico, esto implica que $i\lambda \in \mathbb{R}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Notamos que la matriz $\mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})$ es analítica en el conjunto conexo $\{(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ (es lineal en ambos parámetros), por lo que los valores propios $\kappa = \kappa(\lambda, \tilde{\xi})$ son continuos en ese conjunto. Dado que no hay espacio central en dicho conjunto, los valores propios tienen signo constante y basta con calcular dicho signo en cualquier punto del dominio. Escogemos $\lambda = 1$, $\tilde{\xi} = 0$, de manera que

$$\mathcal{A}(1, 0) = -A_d^{-1},$$

matriz que tiene exactamente p valores propios negativos y exactamete $n - p$ valores propios positivos. \square

En virtud de este lema, reconocemos que la matriz \mathcal{A} es hiperbólica en el sentido de sistemas dinámicos, es decir, no tiene espacio central. Así, para cada $(\lambda, \tilde{\xi})$ con $\operatorname{Re} \lambda > 0$ denotamos como $\mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ al subespacio invariante “estable” de \mathcal{A} , es decir, asociado a los valores propios con parte real negativa, mientras que denotamos como $\mathbb{E}^u(\lambda, \tilde{\xi})$ al espacio “inestable” asociado a los valores propios con parte real positiva. De este modo,

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) \oplus \mathbb{E}^u(\lambda, \tilde{\xi}),$$

con

$$\dim \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) = p, \quad \dim \mathbb{E}^u(\lambda, \tilde{\xi}) = n - p,$$

para cada $(\lambda, \tilde{\xi})$ con $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Sea un punto fijo $(\lambda_0, \tilde{\xi}_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ con $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$. Consideremos una curva rectificable Γ en el plano complejo con parte real positiva tal que contiene en su interior a los $n - p$ valores propios con parte real positiva de $\mathcal{A}(\lambda_0, \tilde{\xi}_0)$. (Ver figura 3.1.) La proyección sobre $\mathbb{E}^u(\lambda_0, \tilde{\xi}_0)$ está definida mediante

$$\mathbb{E}^s(\lambda_0, \tilde{\xi}_0) = \mathbb{P}^u(\lambda_0, \tilde{\xi}_0)\mathbb{C}^n,$$

donde

$$\mathbb{P}^u(\lambda_0, \tilde{\xi}_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - \mathcal{A}(\lambda_0, \tilde{\xi}_0))^{-1} dz,$$

conocida como integral de Dunford (ver, por ejemplo, Kato [16]). Análogamente, la proyección sobre el espacio estable está dada por

$$\mathbb{P}^s(\lambda_0, \tilde{\xi}_0) = I - \mathbb{P}^u(\lambda_0, \tilde{\xi}_0), \quad \mathbb{E}^s(\lambda_0, \tilde{\xi}_0) = \mathbb{P}^s(\lambda_0, \tilde{\xi}_0)\mathbb{C}^n.$$

Si variamos $(\lambda, \tilde{\xi})$ en una vecindad de $(\lambda_0, \tilde{\xi}_0)$, por analiticidad de \mathcal{A} es posible verificar que el mapeo

$$(\lambda, \tilde{\xi}) \mapsto \mathbb{P}^u(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C}^n,$$

es analítico en el conjunto $\{(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ (véase [16]). Tenemos entonces la siguiente

PROPOSICIÓN 3.2. *Los espacios estable, $\mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$, e inestable, $\mathbb{E}^u(\lambda, \tilde{\xi})$, del símbolo $\mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})$ dependen analíticamente de $(\lambda, \tilde{\xi})$ en el conjunto $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$.*

3.2. La condición débil de Kreiss-Lopatinski

Sea ahora $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ con $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Para $U_0 \in \mathbb{C}^n$ arbitrario, la ecuación

$$\begin{aligned} \partial_{x_d} U &= \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})U, \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

tiene una única solución $U = U(x_d)$. Descomponiendo

$$U_0 = U_0^+ \oplus U_0^- \in \mathbb{C}^n = \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) \oplus \mathbb{E}^u(\lambda, \tilde{\xi}),$$

la solución se puede escribir como

$$U(x_d) = U^+(x_d) + U^-(x_d),$$

donde

$$U^+(x_d) = \exp(x_d \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi}))U_0^+, \quad U^-(x_d) = \exp(x_d \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi}))U_0^-.$$

(Por supuesto, para cada matriz A y $t \in \mathbb{R}$, la matriz $\exp(tA)$ se define mediante la serie infinita $\exp(tA) = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots$) Es decir, las soluciones de $\partial_{x_d} U = \mathcal{A}U$ tienen la forma:

- $U(x_d) = e^{\kappa(\lambda, \tilde{\xi})x_d}U(0)$, si κ es un valor propio simple de \mathcal{A} y $U(0)$ el vector propio asociado; o bien,

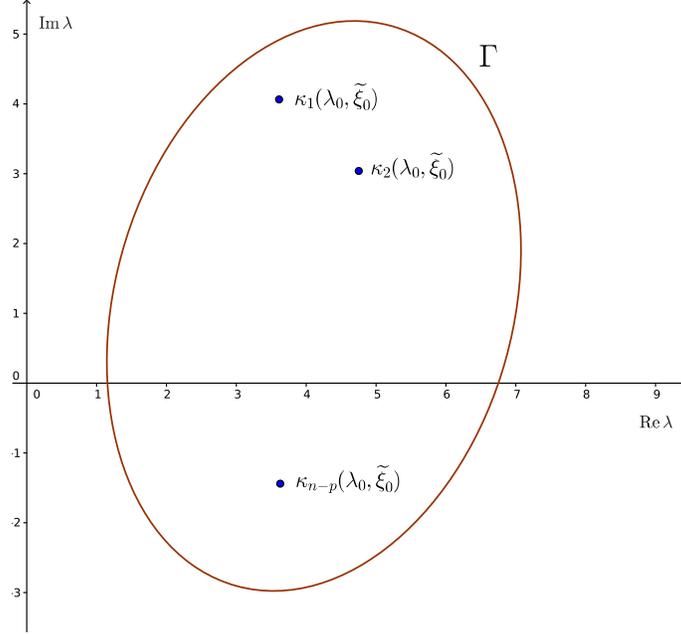


FIGURA 3.1. Contorno Γ en el plano complejo que contiene en su interior a los valores propios inestables (con $\text{Re } \kappa > 0$) de $\mathcal{A}(\lambda_0, \tilde{\xi}_0)$.

- $U(x_d) = e^{\kappa(\lambda, \tilde{\xi})x_d} P(x_d, \lambda, \tilde{\xi})$, donde P es un polinomio en x_d con coeficientes analíticos en $(\lambda, \tilde{\xi})$ si κ es un valor propio múltiple con un bloque no trivial de Jordan.

En cualquier caso, dado que los espacios estable e inestable son invariantes, notamos que

$$\exp(x_d \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})) U_0^+ \in \mathbb{E}^u(\lambda, \tilde{\xi}),$$

crece exponencialmente rápido cuando $x_d \rightarrow +\infty$, mientras que

$$\exp(x_d \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})) U_0^- \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}),$$

tiende a cero exponencialmente cuando $x_d \rightarrow +\infty$. Por ende, la solución al problema (3.4) decae exponencialmente a cero cuando $x_d \rightarrow +\infty$ si y sólo si $U_0 \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$. Mas aún, en ese caso tenemos que $U \in L^2(0 < x_d < +\infty)$.

De este modo, consideremos funciones de la forma

$$u(x, t) = e^{i\tilde{\xi}\tilde{x}} e^{t\lambda} U(x_d),$$

donde $x = (\tilde{x}, x_d)$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } \lambda > 0$, y donde $U = U(x_d)$ es solución de (3.4). Si, además, $U_0 \in \ker B$, entonces

$u = u(x, t)$ es solución del problema

$$\begin{aligned} Lu &= u_t + \sum_{j=1}^d A^j u_{x_j} = 0, \\ u(x, 0) &= e^{i\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}} U_0, \\ Bu|_{x_d=0} &= 0. \end{aligned}$$

Soluciones de este tipo decaen exponencialmente cuando $x_d \rightarrow +\infty$ y satisfacen la condición de frontera si $U_0 \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) \cap \ker B$. A partir de ellas, vamos a construir soluciones en L^2 que violan la estimación de energía. Por ejemplo, para cada $\alpha > 0$ es posible definir soluciones de la forma

$$u^\alpha(x, t) = e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}} e^{\alpha\lambda t} U(\alpha x_d),$$

que satisfacen $Lu^\alpha = 0$ y $Bu^\alpha|_{x_d=0} = 0$ si $U(0) \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) \cap \ker B$. Mas aún, notamos que si $\alpha \rightarrow +\infty$ entonces la familia crece arbitraria y exponencialmente rápido en $t > 0$, ya que $\operatorname{Re} \lambda > 0$. El término $e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}}$, sin embargo, no tiene norma finita en L^2 . Para curar esto truncamos la función en \tilde{x} . Sea una función *cut-off*, $\psi = \psi(\tilde{x})$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$, tal que

- (i) $\psi = 0$ si $|\tilde{x}| \geq 2$,
- (ii) $\psi = 1$ si $|\tilde{x}| \leq 1$,
- (iii) $0 \leq \psi \leq 1$.

Entonces definimos la siguiente familia de funciones

$$u^{\alpha, \theta}(x, t) := \psi(\tilde{x}/\theta) e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}} e^{\alpha\lambda t} U(\alpha x_d), \quad (3.5)$$

con $\alpha, \theta > 1$.

LEMA 3.3. *La familia definida en (3.5) viola la estimación de energía (2.10) para $\alpha, \theta \gg 1$ suficientemente grandes.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, con $\operatorname{Re} \lambda > 0$, fijo. Supongamos que $U = U(x_d)$ es solución de

$$\partial_{x_d} U = \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi}) U = -A_d^{-1} (\lambda I + i \sum_{j \neq d} \xi_j A^j) U, \quad U(0) = U_0,$$

con $U_0 \in \ker B \cap \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$. Por lo tanto, $U(x_d)$ decae exponencialmente a cero cuando $x_d \rightarrow +\infty$ y $U \in L^2(0 < x_d < +\infty)$. Así, definimos la constante

$$0 < C_U := \|U\|_{L^2(0 < x_d < +\infty)} < +\infty.$$

Por construcción de U , para cada $\alpha, \theta > 0$, la función $u^{\alpha, \theta}$ definida en (3.5) es solución de

$$\partial_t u^{\alpha, \theta} + \sum_{j=1}^d A^j \partial_{x_j} u^{\alpha, \theta} = f^{\alpha, \theta},$$

donde

$$f^{\alpha,\theta} = \frac{1}{\theta} e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}} e^{\alpha\lambda t} \sum_{j \neq d} A^j U(\alpha x_d) \psi_{x_j}(\tilde{x}/\theta),$$

con condición inicial

$$u^{\alpha,\theta}(x, 0) = u_0^{\alpha,\theta}(x) := \psi(\tilde{x}/\theta) e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}} U(\alpha x_d),$$

y condición de frontera

$$(Bu^{\alpha,\theta})|_{x_d=0} = \psi(\tilde{x}/\theta) e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}} e^{\alpha\lambda t} BU_0 = 0,$$

en virtud de que $U_0 \in \ker B$. Definimos las constantes

$$\begin{aligned} 0 < C_{0,\psi} &:= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\psi(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} = \int_{B_2(0)} |\psi(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} < +\infty, \\ 0 < C_{1,\psi} &:= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla\psi(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} = \int_{B_2(0)} |\nabla\psi(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} < +\infty. \end{aligned}$$

Para cierto $\eta > 0$ calculamos entonces los lados derecho e izquierdo de la estimación de energía (2.10). Calculemos la energía de la condición inicial:

$$\begin{aligned} \|u_0^{\alpha,\theta}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}}|^2 |U(\alpha x_d)|^2 |\psi(\tilde{x}/\theta)|^2 d\tilde{x} dx_d \\ &= \int_0^{+\infty} |U(\alpha x_d)|^2 dx_d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\psi(\tilde{x}/\theta)|^2 d\tilde{x} \\ &= \frac{\theta^{d-1}}{\alpha} C_U C_{0,\psi}. \end{aligned}$$

A continuación estimaremos la energía de $f^{\alpha,\theta}$:

$$\|f^{\alpha,\theta}\|_{\eta, \mathbb{R}_+^d \times [0, T]}^2 = \int_0^T \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{e^{-2\eta t}}{\theta^2} |e^{i\alpha\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}}|^2 |e^{\alpha\lambda t}|^2 \left| \sum_{j \neq d} A^j U(\alpha x_d) \psi_{x_j}(\tilde{x}/\theta) \right|^2 d\tilde{x} dx_d dt.$$

Dado que los coeficientes están acotados, $|A^j| \leq \hat{C}$, con $\hat{C} > 0$ uniforme para toda j , obtenemos

$$\begin{aligned} \|f^{\alpha,\theta}\|_{\eta, \mathbb{R}_+^d \times [0, T]}^2 &\leq \frac{\hat{C}}{\theta^2} \int_0^T e^{2(\alpha \operatorname{Re} \lambda - \eta)t} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla\psi(\tilde{x}/\theta)|^2 d\tilde{x} \int_0^{+\infty} |U(\alpha x_d)|^2 dx_d \\ &= \hat{C} C_{1,\psi} C_U \frac{\theta^{d-1}}{\alpha} \frac{R_{\eta, T}(\alpha)}{\theta^2}, \end{aligned}$$

donde

$$R_{\eta, T}(\alpha) := \frac{e^{2(\alpha \operatorname{Re} \lambda - \eta)T} - 1}{2(\alpha \operatorname{Re} \lambda - \eta)}.$$

Nótese que para $T > 0$, $\eta > 0$ fijos, $R_{\eta, T}(\alpha) \rightarrow +\infty$ si $\alpha \rightarrow +\infty$.

Calculando la energía de la solución tenemos:

$$\begin{aligned} \|u^{\alpha,\theta}\|_{\eta,\mathbb{R}_+^d \times [0,T]}^2 &= \int_0^T \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\eta t} |e^{i\alpha\xi\cdot\tilde{x}}|^2 |e^{\alpha\lambda t}|^2 |U(\alpha x_d)|^2 |\psi(\tilde{x}/\theta)|^2 d\tilde{x} dx_d dt \\ &= \int_0^T e^{2(\alpha\operatorname{Re}\lambda - \eta)t} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\psi(\tilde{x}/\theta)|^2 d\tilde{x} \int_0^{+\infty} |U(\alpha x_d)|^2 dx_d \\ &= C_{0,\psi} C_U \frac{\theta^{d-1}}{\alpha} R_{\eta,T}(\alpha). \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} \|u^{\alpha,\theta}(T)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |e^{i\alpha\xi\cdot\tilde{x}}|^2 |e^{\alpha\lambda T}|^2 |U(\alpha x_d)|^2 |\psi(\tilde{x}/\theta)|^2 d\tilde{x} dx_d \\ &= C_{0,\psi} C_U \frac{\theta^{d-1}}{\alpha} e^{2\alpha T \operatorname{Re}\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u^{\alpha,\theta}\|_{\eta,\partial\mathbb{R}_+^d \times [0,T]}^2 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\eta t} |e^{i\alpha\xi\cdot\tilde{x}}|^2 |e^{\alpha\lambda t}|^2 |U(0)|^2 |\psi(\tilde{x}/\theta)|^2 d\tilde{x} dt \\ &= C_{0,\psi} |U_0|^2 \theta^{d-1} R_{\eta,T}(\alpha). \end{aligned}$$

Si la estimación de energía (2.10) es cierta (con $g = 0$) entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|u^{\alpha,\theta}(T)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \eta \|u^{\alpha,\theta}\|_{\eta,\mathbb{R}_+^d \times [0,T]}^2 + \|u^{\alpha,\theta}\|_{\eta,\partial\mathbb{R}_+^d \times [0,T]}^2 \\ &= C_{0,\psi} \theta^{d-1} \left(\frac{1}{\alpha} C_U e^{2\alpha T \operatorname{Re}\lambda} + \frac{\eta}{\alpha} C_U R_{\eta,T}(\alpha) + |U_0|^2 R_{\eta,T}(\alpha) \right) \\ &\leq C \left(\frac{1}{\eta} \|f^{\alpha,\theta}\|_{\eta,\mathbb{R}_+^d \times [0,T]}^2 + \|u_0^{\alpha,\theta}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 \right) \\ &\leq C C_U \frac{\theta^{d-1}}{\alpha} \left(C_{0,\psi} + \frac{1}{\eta\theta^2} \hat{C} C_{1,\psi} R_{\eta,T}(\alpha) \right), \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{e^{2\alpha T \operatorname{Re}\lambda}}{R_{\eta,T}(\alpha)} + \eta + \alpha |U_0|^2 \leq \bar{C} \left(\frac{1}{R_{\eta,T}(\alpha)} + \frac{1}{\eta\theta^2} \right), \quad (3.6)$$

para cierta constante uniforme $\bar{C} = \bar{C}(\psi, U) > 0$. Dado que $\operatorname{Re}\lambda > 0$, tomando el límite cuando $\alpha, \theta \rightarrow +\infty$, reconocemos que

$$\frac{e^{2\alpha T \operatorname{Re}\lambda}}{R_{\eta,T}(\alpha)} \rightarrow 1, \quad \text{si } \alpha \rightarrow +\infty,$$

y que el lado derecho de (3.6) tiende a cero, mientras que el lado izquierdo crece arbitrariamente, $\alpha |U_0|^2 \rightarrow +\infty$. Obtenemos, así, una contradicción. Concluimos que la familia (3.5) viola la estimación de energía de Kreiss (2.10). \square

Hersh [13] demostró que si la estimación de energía *a priori* no es válida para todas las soluciones suficientemente suaves del sistema, entonces no es posible establecer la existencia y la unicidad de la solución al problema (el

argumento de Hersh utiliza el teorema de la gráfica cerrada; ver [13] para mayores detalles). Por lo tanto podemos formular la siguiente

PROPOSICIÓN 3.4. *El problema de valores iniciales y de frontera (2.9) está mal planteado en sentido de Kreiss si para cierto $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$, el sistema*

$$\begin{aligned} \lambda U &= -\left(A_d \partial_{x_d} U + i \sum_{j \neq d} \xi_j A^j U\right), \\ BU(0) &= 0, \\ U &\in L^2(0 < x_d < +\infty), \end{aligned} \tag{3.7}$$

tiene solución para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (es decir, si el problema (3.7) tiene un “valor propio” λ inestable).

Por lo tanto, si queremos que el problema esté bien planteado, es menester evitar que estas soluciones existan. Sabemos que $U \in L^2(0 < x_d < +\infty)$ si y sólo si $U(0) \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$. Como $\dim \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) = p$, entonces existe una base, $v_j = v_j(\lambda, \tilde{\xi})$, $j = 1, \dots, p$, del espacio estable. Si $U(0) \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ entonces existen escalares $\beta_j \in \mathbb{C}$ tales que

$$U(0) = \sum_{j=1}^p \beta_j v_j(\lambda, \tilde{\xi}).$$

De este modo,

$$BU(0) = B \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} =: B R^s(\lambda, \tilde{\xi}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix},$$

donde la matriz de dimensiones $n \times p$, $R^s(\lambda, \tilde{\xi})$, contiene a la base de \mathbb{E}^s dispuesta como columnas. A este símbolo se le llama *haz estable de Lopatinski*. Si queremos evitar que $U(0) \in \ker B \cap \mathbb{E}^s$, la única solución al sistema $BU(0) = 0$ debe ser para $\beta_j = 0$, $j = 1, \dots, p$. Es decir, la restricción de B en \mathbb{E}^s debe ser inyectiva para todo $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Ésta es una condición necesaria para tener un problema bien planteado.

DEFINICIÓN 3.5 (condición débil de Kreiss-Lopatinski). Se dice que el problema de valores iniciales y de frontera (2.9) satisface la *condición débil de Kreiss-Lopatinski* si para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, con $\operatorname{Re} \lambda > 0$, la restricción de B en $\mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ es inyectiva.

La condición débil de Kreiss-Lopatinski se puede reformular de la siguiente manera. Definimos el determinante (de $p \times p$),

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) := \det(BR^s(\lambda, \tilde{\xi})), \quad (\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \operatorname{Re} \lambda > 0, \tag{3.8}$$

conocido como el *determinante de Lopatinski*. Por analiticidad de R^s , el determinante de Lopatinski es una función analítica en $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$

con $\operatorname{Re} \lambda > 0$ (cf. [3, 17]). Entonces reformulamos la condición débil de Kreiss-Lopatinski de la siguiente manera:

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \neq 0, \quad \text{para todo } (\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (3.9)$$

OBSERVACIÓN 3.6. Una condición necesaria para tener un problema bien planteado es que (3.9) se cumpla en el espacio de frecuencias $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, con $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Obsérvese que se trata de una condición puramente algebraica que involucra a la condición de frontera, a través de B . Sin embargo, las propiedades algebraicas de ésta determinan la “estabilidad” de las soluciones al problema (2.9).

3.3. Resumen de la tercera lección

En esta lección hemos introducido una condición necesaria, conocida como la condición débil de Kreiss-Lopatinski, para que el problema (2.9) esté bien planteado en sentido de Kreiss. Mediante el método de modos normales (o equivalentemente, la transformada de Fourier-Laplace) hemos analizado el símbolo del operador diferencial. Si la condición de frontera viola la condición débil de Kreiss-Lopatinski entonces podemos construir soluciones al problema de valores iniciales y de frontera que violan la estimación de energía. El lema de Hersh es un resultado fundamental para dicha construcción, el cual nos indica que el símbolo \mathcal{A} es una matriz hiperbólica en el sentido de sistemas dinámicos en la variable normal a la frontera. Notamos que la condición necesaria de Kreiss-Lopatinski es puramente algebraica que involucra directamente a la condición de frontera.

LECCIÓN 4

La condición uniforme de Kreiss-Lopatinski

En esta lección introducimos la condición suficiente para tener un problema bien planteado. Esta condición fue descubierta por H. O. Kreiss [17] y se conoce como la *condición uniforme de Kreiss-Lopatinski*. La demostración del teorema de Kreiss es muy complicada. Está basada en la construcción de un simetrizador en el espacio de frecuencias, conocido como *simetrizador de Kreiss*. En esta lección únicamente presentaremos las propiedades más importantes del simetrizador de Kreiss, y mostraremos cómo la existencia del simetrizador implica que el problema está bien planteado en sentido de Kreiss.

4.1. El simetrizador de Kreiss

En su artículo seminal de 1970, H. O. Kreiss [17] reconoció que es posible establecer una condición suficiente para tener un problema bien planteado. La condición débil de Kreiss-Lopatinski indica que la matriz de frontera B debe ser inyectiva en el espacio $\mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ cuando $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Kreiss estableció que B restringida a \mathbb{E}^s debe ser *uniformemente invertible* para $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ con $|(\lambda, \tilde{\xi})| = 1$ y $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

DEFINICIÓN 4.1 (condición uniforme de Kreiss-Lopatinski). Se dice que el problema de valores iniciales y de frontera (2.9) satisface la *condición uniforme de Kreiss-Lopatinski*, si existe una constante uniforme $C > 0$ tal que

$$|U| \leq C|BU|,$$

para todo $U \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ con $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, $|(\lambda, \tilde{\xi})| = 1$ y $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

OBSERVACIÓN 4.2. La restricción $|(\lambda, \tilde{\xi})| = 1$ es una consecuencia de que la matriz $\mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})$ es homogénea de grado uno, por lo que es suficiente con establecer la condición uniforme (así como la condición débil) en el hemisferio $|(\lambda, \tilde{\xi})| = 1$ y $\operatorname{Re} \lambda > 0$. La información importante de la definición anterior es que la constante $C > 0$ es *uniforme* para todo $\operatorname{Re} \lambda > 0$, incluso cuando $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow 0^+$. De hecho, es posible demostrar (véase [3]) que una formulación equivalente de la condición uniforme de Lopatinski es la siguiente:

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \neq 0, \quad \text{para todo } (\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \operatorname{Re} \lambda \geq 0. \quad (4.1)$$

Algunas observaciones son importantes: nótese que el determinante de Lopatinski está definido para $\operatorname{Re} \lambda > 0$, en virtud de que en dicho dominio el haz de

Lopatinski $R^s(\lambda, \tilde{\xi})$ tiene exactamente dimension p . Kreiss [17] demuestra que los haces de Lopatinski son de hecho continuos hasta $\text{Re } \lambda = 0$, y por lo tanto podemos tomar cualquier representación del espacio R^s y su límite cuando $\text{Re } \lambda \rightarrow 0^+$. El resultado nos ofrece una definición del determinante de Lopatinski incluso cuando $\text{Re } \lambda = 0$. Si el determinante de Lopatinski tiene un cero para algún valor de λ imaginario puro, entonces notamos que la condición débil de Kreiss-Lopatinski (3.9) no se viola. Sin embargo, la condición uniforme no se satisface. Este caso es de primordial importancia, pues implica la existencia de soluciones de tipo onda viajera que son tangentes a la frontera $\{x_d = 0\}$ y cuya amplitud decae exponencialmente cuando $x_d \rightarrow +\infty$. A este tipo de soluciones se les conoce como “ondas superficiales”. Un ejemplo de este tipo de soluciones ocurre en el sistema de elasticidad lineal isotrópica [32]; su importancia en geofísica radica en que son responsables de los desastres ocurridos en terremotos.

El siguiente teorema constituye una de las contribuciones principales del trabajo de Kreiss.

TEOREMA 4.3 (Kreiss [17]). *Si el problema de valores iniciales y de frontera (2.9) satisface la condición uniforme de Kreiss-Lopatinski entonces existe un símbolo,*

$$(\lambda, \tilde{\xi}) \mapsto K(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

definido en $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, $\text{Re } \lambda > 0$, que satisface las siguientes propiedades:

- (a) $K(\lambda, \tilde{\xi})$ es uniformemente acotada y homogénea de grado uno.
- (b) La matriz $K(\lambda, \tilde{\xi})A_d$ es Hermiteana.
- (c) Existe una constante uniforme $\delta > 0$ tal que

$$-v^* K(\lambda, \tilde{\xi})A_d v \geq \delta |v|^2 - \frac{1}{\delta} |g|^2,$$

para todo $v \in \mathbb{C}^n$ que satisface la condición de frontera $Bv = g$, con $g \in \mathbb{C}^n$ dado, y todo $(\lambda, \tilde{\xi})$, $\text{Re } \lambda > 0$.

- (c) Existe una constante $C_1 > 0$ uniforme tal que

$$-\text{Re } K(\lambda, \tilde{\xi})A_d \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi}) \geq (\text{Re } \lambda)C_1 I.$$

Al símbolo $K(\lambda, \tilde{\xi})$ se le conoce como simetrizador de Kreiss.

OBSERVACIÓN 4.4. Nótese que la propiedad (c) del simetrizador de Kreiss se asemeja a la condición de disipatividad estricta de la condición de frontera (ver definición 2.18), pero en el espacio de frecuencias. Es destacable que no toda condición de frontera que satisface la condición uniforme de Kreiss-Lopatinski es estrictamente disipativa, pero al revés sí [3].

OBSERVACIÓN 4.5. La construcción del simetrizador de Kreiss, bajo la hipótesis de la condición uniforme de Kreiss-Lopatinski, es muy complicada, incluso en el caso en que la frontera es no característica. La complicación principal consiste en la construcción para frecuencias con $\text{Re } \lambda > 0$ cercanas al eje imaginario. Para $\text{Re } \lambda \geq \eta_0 > 0$, uniformemente lejos del eje

imaginario, el simetrizador de Kreiss tiene una estructura muy sencilla. Sin embargo, construirlo en el límite cuando $\text{Re } \lambda \rightarrow 0$ es laborioso. Sugiero al lector consultar el texto de Benzoni-Gavage y Serre [3], que dedica un capítulo completo para su construcción. La parte técnica está basada en una condición, conocida como *condición de estructura de bloque* (ver Majda [24], o Métivier [28], para el enunciado preciso de dicha condición), la cual es suficiente para aplicar la construcción diseñada por Kreiss. El mismo Kreiss [17] demostró que todo sistema estrictamente hiperbólico tiene estructura de bloque. Majda [24] demostró que se cumple también para el sistema de Euler de dinámica de gases. Pasaron treinta años después del artículo de Kreiss para que Métivier demostrara que la condición de estructura de bloque es satisfecha por todo sistema simétrico [28]. Un ejemplo de un sistema no simétrico que la satisface es el de las ecuaciones de la elastodinámica en el caso isentrópico (ver Freistühler y Plaza [11]).

4.2. Estimación en el espacio de frecuencias

A continuación emplearemos las propiedades del simetrizador de Kreiss para establecer una estimación en el espacio de Fourier-Laplace que, a la postre, implica la estimación de energía para el caso con condiciones iniciales homogéneas. Sea u una solución suave en \mathbb{R}_+^d que decae a cero cuando $|x| \rightarrow +\infty$, del siguiente problema de valores en la frontera:

$$\begin{aligned} Lu = u_t + \sum_{j=1}^d A^j u_{x_j} &= f, & x \in \mathbb{R}_+^d, t > 0, \\ Bu &= g, & x \in \partial\mathbb{R}_+^d, t > 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $f = f(x, t)$ y $g = g(\tilde{x}, t)$ son tales que admiten una transformada de Fourier-Laplace (por ejemplo, de orden exponencial en $t > 0$ y en la clase de Schwarz para $t > 0$ fijo; ver apéndice A). Denotamos como $\tilde{u} = \tilde{u}(x_d, \tilde{\xi}, \lambda)$, $\tilde{f} = \tilde{f}(x_d, \tilde{\xi}, \lambda)$ y $\tilde{g} = \tilde{g}(\tilde{\xi}, \lambda)$ las correspondientes transformadas de Fourier-Laplace de u , f y g respectivamente (véase (3.2) o apéndice A). De esta manera, tomando la transformada de la ecuación obtenemos

$$\lambda \tilde{u} + A_d \partial_{x_d} \tilde{u} + i \sum_{j \neq d} \xi_j A^j \tilde{u} = \tilde{f},$$

con la condición de frontera

$$B\tilde{u}(0, \lambda, \tilde{\xi}) = \tilde{g}.$$

Denotaremos como $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ al producto interno en $L^2(0 < x_d < +\infty)$,

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_0^{+\infty} u^* v dx_d.$$

Así, en virtud de que $\tilde{u}(x_d, \tilde{\xi}, \lambda) \in L^2(0 < x_d < +\infty)$, calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K \tilde{f} \rangle_0 &= \operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K(\lambda \tilde{u} + A_d \partial_{x_d} \tilde{u} + i \sum_{j \neq d} \xi_j A^j \tilde{u}) \rangle_0 \\ &= \operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K A_d \partial_{x_d} \tilde{u} \rangle_0 - \operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K A_d \mathcal{A} \tilde{u} \rangle_0 \end{aligned}$$

Notamos que, como $K A_d$ es Hermiteana, se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K A_d \partial_{x_d} \tilde{u} \rangle_0 &= \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \tilde{u}^* K A_d \tilde{u} dx_d \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \partial_{x_d} (\tilde{u}^* K A_d \tilde{u}) dx_d \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{u}(0, \lambda, \tilde{\xi})^* K(\lambda, \tilde{\xi}) A_d \tilde{u}(0, \lambda, \tilde{\xi}). \end{aligned}$$

Denotamos $U(\lambda, \tilde{\xi}) := \tilde{u}(0, \lambda, \tilde{\xi})$, sobre la frontera $\partial \mathbb{R}_+^d = \{x_d = 0\}$. Por la condición de frontera, $B U = \tilde{g}$, y la propiedad (c) del simetrizador de Kreiss, tenemos

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K A_d \partial_{x_d} \tilde{u} \rangle_0 = -\frac{1}{2} U^* K(\lambda, \tilde{\xi}) A_d U \geq \delta |U|^2 - \frac{1}{\delta} |\tilde{g}|^2,$$

para cierto $\delta > 0$. Por otro lado, usando la propiedad (d) del simetrizador de Kreiss, tenemos la estimación

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K A_d \mathcal{A} \tilde{u} \rangle_0 &= -\int_0^{+\infty} \operatorname{Re} (\tilde{u}^* K A_d \mathcal{A} \tilde{u}) dx_d \\ &= -\int_0^{+\infty} \tilde{u}^* \operatorname{Re} (K A_d \mathcal{A}) \tilde{u} dx_d \\ &\geq C_1 \eta \int_0^{+\infty} |\tilde{u}|^2 dx_d \\ &= C_1 \eta \|\tilde{u}(\cdot, \lambda, \tilde{\xi})\|_0^2, \end{aligned}$$

donde $\eta = \operatorname{Re} \lambda > 0$. Sustituyendo obtenemos

$$\operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K \tilde{f} \rangle_0 \geq \delta |U|^2 - \frac{1}{\delta} |\tilde{g}|^2 + C_1 \eta \|\tilde{u}(\cdot, \lambda, \tilde{\xi})\|_0^2. \quad (4.3)$$

Dado que K es uniformemente acotado (propiedad (a)), existe una constante uniforme $C_2 > 0$ tal que, para cualquier $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \tilde{u}, K \tilde{f} \rangle_0 &= \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \tilde{u}^* K \tilde{f} dx_d \\ &\leq C_2 \int_0^{+\infty} |\tilde{u}| |\tilde{f}| dx_d \\ &\leq \frac{1}{2} C_2 \epsilon \eta \|\tilde{u}\|_0^2 + \frac{C_2}{2\epsilon \eta} \|\tilde{f}\|_0^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.3) obtenemos

$$\frac{\delta}{C_1}|U|^2 + \eta\left(1 - \frac{C_2\epsilon}{2C_1}\right)\|\tilde{u}\|_0^2 \leq \frac{1}{2\delta C_1}|\tilde{g}|^2 + \frac{C_2}{2C_1\eta\epsilon}\|\tilde{f}\|_0^2.$$

Escogiendo $0 < \epsilon \ll 1$ suficientemente pequeño tal que $1 - C_2\epsilon/(2C_1) \geq 1/2$, obtenemos la estimación,

$$\frac{\delta}{C_1}|U|^2 + \frac{1}{2}\eta\|\tilde{u}\|_0^2 \leq \frac{1}{2\delta C_1}|\tilde{g}|^2 + C_3(\epsilon)\frac{1}{\eta}\|\tilde{f}\|_0^2.$$

Concluimos que existe una constante uniforme $C > 0$ tal que

$$|U|^2 + \eta\|\tilde{u}\|_0^2 \leq C\left(|\tilde{g}|^2 + \frac{1}{\eta}\|\tilde{f}\|_0^2\right).$$

Hemos, por consiguiente, demostrado el siguiente

LEMA 4.6. *Si se cumple la condición uniforme de Kreiss-Lopatinski entonces existe una constante uniforme $C > 0$ tal que*

$$|\tilde{u}(0, \lambda, \tilde{\xi})|^2 + \eta\|\tilde{u}(\cdot, \lambda, \tilde{\xi})\|_0^2 \leq C\left(|\tilde{g}(\lambda, \tilde{\xi})|^2 + \frac{1}{\eta}\|\tilde{f}(\cdot, \lambda, \tilde{\xi})\|_0^2\right), \quad (4.4)$$

para toda solución suave que decae cuando $|x| \rightarrow +\infty$ del problema (4.2), y para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, con $\eta = \operatorname{Re} \lambda > 0$.

4.3. Estimación básica de energía

Emplearemos la estimación del lema (4.6) para deducir la estimación de energía en el espacio físico, cuando la condición inicial es homogénea. Supongamos que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))$. Definimos entonces

$$f := Lu, \quad g := Bu|_{x_d=0}.$$

De este modo, u es solución del sistema

$$\begin{aligned} Lu &= f, & x \in \mathbb{R}_+^d, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}_+^d, \\ Bu &= g, & x \in \partial\mathbb{R}_+^d, t > 0. \end{aligned}$$

Notamos que la condición inicial es homogénea en virtud de que u tiene soporte compacto en $\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty)$. Podemos entonces aplicar la estimación sobre el problema puro de valores en la frontera (4.2), ya que las transformadas de Fourier-Laplace de u , f y g están bien definidas. Integremos de esta manera la estimación (4.4) en $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$ y $\tau := \operatorname{Im} \lambda \in (-\infty, \infty)$, con $\lambda = \eta + i\tau$. Primero, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \|\tilde{u}(\cdot, \lambda, \tilde{\xi})\|_0^2 d\tilde{\xi} d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^{+\infty} |\tilde{u}(x, \eta + i\tau, \tilde{\xi})|^2 dx d\tilde{\xi} d\tau \\ &= \|\tilde{u}(\cdot, \eta + (\cdot), \cdot)\|_{L^2((0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})}^2 \\ &= 2\pi \|u\|_{L_\eta^2(\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2, \end{aligned}$$

tras haber aplicado la identidad de Plancherel (ver relación (A.6) en el apéndice A). Análogamente reconocemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \|\tilde{u}(0, \lambda, \tilde{\xi})\|_0^2 d\tilde{\xi} d\tau &= 2\pi \|u(0, \cdot, \cdot)\|_{L_\eta^2(\mathbb{R}^{d-1} \times (0, +\infty))}^2 \\ &= 2\pi \|u\|_{L_\eta^2(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \|\tilde{f}(\cdot, \lambda, \tilde{\xi})\|_0^2 d\tilde{\xi} d\tau &= 2\pi \|f\|_{L_\eta^2(\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\tilde{g}(\eta + i\tau, \tilde{\xi})|^2 d\tilde{\xi} d\tau &= 2\pi \|g\|_{L_\eta^2(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, integrando la estimación (4.4) en $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$ y $\tau = \text{Im } \lambda \in (-\infty, \infty)$, para $\text{Re } \lambda = \eta > 0$ fijo obtenemos la estimación de energía (2.10) para el caso $u_0 = 0$:

$$\eta \|u\|_{L_\eta^2(\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2 + \|u\|_{L_\eta^2(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2 \leq C \left(\|g\|_{L_\eta^2(\partial\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2 + \frac{1}{\eta} \|f\|_{L_\eta^2(\mathbb{R}_+^d \times (0, +\infty))}^2 \right). \quad (4.5)$$

Notamos que (4.5) es la estimación de energía para el caso homogéneo ($u_0 = 0$) y con $T = +\infty$. Para aplicar la relación de Plancherel en el espacio de Fourier-Laplace se define (ver apéndice A),

$$u_\eta(x, t) = \begin{cases} (2\pi)^{1/2} e^{-\eta t} u(x, t), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

que pertenece al espacio $L_\eta^2(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))$ si u tiene soporte compacto en $t > 0$. La estimación (4.5) es la obtenida por Kreiss en [17]. Para considerar el caso general, Rauch [31] utiliza el siguiente argumento: el problema de Cauchy homogéneo

$$\begin{aligned} Lw &= 0, & x \in \mathbb{R}_+^d, t > 0, \\ w(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+^d, \end{aligned} \quad (4.6)$$

con $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^d)$, tiene una solución local suave $w \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d \times (0, T))$, para cierto $T > 0$, tal que

$$w|_{x_d=0} = 0.$$

Esto se puede demostrar con transformada de Fourier (el problema es de coeficientes constantes) y la condición en $x_d = 0$ se hereda de la condición inicial para tiempos suficientemente pequeños, $T > 0$; ver Rauch [31]. (Por esta razón, la solución se denomina *local*.) Tomando una función *cut-off*, $\zeta \in C_0^\infty(-T, T)$, tal que $\zeta = 1$ si $t \in (-\delta, \delta) \subset (-T, T)$, y $0 \leq \zeta \leq 1$, podemos definir

$$\begin{aligned} f &:= w \partial_t \zeta + Lu, \\ g &:= Bu, \end{aligned}$$

donde $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))$, y por ende, $u(x, 0) = 0$ (condición homogénea). De este modo, obtenemos que

$$v := u + \zeta(t)w,$$

es solución del problema no homogéneo

$$\begin{aligned} Lv &= f, & x \in \mathbb{R}_+^d, t > 0, \\ v(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+^d, \\ Bv &= g, & x \in \partial\mathbb{R}_+^d, t > 0. \end{aligned}$$

Aplicando la estimación para u (solución del problema homogéneo), Rauch establece la estimación de energía (local) para v , solución del problema no homogéneo en los espacios $L_\eta(\mathbb{R}_+^d \times [0, T])$. Para mayores detalles, consultar [31].

4.4. Resumen de la cuarta lección

En esta lección hemos introducido la condición suficiente, conocida como la condición uniforme de Kreiss-Lopatinski, para tener un problema bien planteado en sentido de Kreiss. La demostración de Kreiss está basada en la construcción de un símbolo, conocido como simetrizador de Kreiss, que permite establecer una estimación de energía en el espacio de frecuencias. Ésta última, a su vez, utilizando la identidad de Plancherel, se traduce en una estimación de energía en el espacio físico original. Kreiss estableció su estimación para el caso de condiciones iniciales homogéneas [17]. En un trabajo posterior, Rauch [31] extendió el resultado al caso general.

APÉNDICE A

Transformadas de Fourier y Laplace

El material de este apéndice es de carácter ilustrativo. Las demostraciones, así como mayor información, se puede consultar en cualquier libro básico de análisis de Fourier (por ejemplo, [7]).

A.1. La transformada de Fourier

Sea $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Un multi-índice, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, con $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \geq 0$, tiene grado $|\alpha| = \sum \alpha_j \geq 0$. Se definen $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}$.

DEFINICIÓN A.1. La *clase de Schwarz*, $S = S(\mathbb{R}^d)$, se define como el espacio de funciones de clase C^∞ en \mathbb{R}^d que, junto con todas sus derivadas, decaen más rápido a cero que cualquier polinomio cuando $|x| \rightarrow +\infty$, es decir,

$$S(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta D^\alpha u| < +\infty, \forall \alpha, \beta \text{ multi-índices}\}.$$

DEFINICIÓN A.2. Para $u \in S(\mathbb{R}^d)$ se definen su transformada y transformada inversa de Fourier como

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &:= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx, \\ \check{u}(\xi) &:= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} u(x) dx, \end{aligned}$$

Derivando bajo el signo de integración e integrando por partes (posible para funciones en $S(\mathbb{R}^d)$) tenemos el siguiente

LEMA A.3. *Sea $u \in S(\mathbb{R}^d)$. Entonces:*

- (a) $\hat{u} \in C^\infty$ y $D^\alpha \hat{u}(\xi) = ((-ix)^\alpha u)^\wedge(\xi)$.
- (b) $(D^\alpha u)^\wedge = (i\xi)^\alpha \hat{u}$.

A su vez, podemos aplicar el lema anterior para obtener:

LEMA A.4. *Si $u \in S(\mathbb{R}^d)$ entonces $\hat{u}, \check{u} \in S(\mathbb{R}^d)$.*

TEOREMA A.5 (teorema de inversión). *Para cada $u \in S(\mathbb{R}^d)$ se tiene $(\hat{u})^\check{} = u$.*

Es decir, la transformada de Fourier es un isomorfismo de $S(\mathbb{R}^d)$ en $S(\mathbb{R}^d)$. Finalmente, tenemos el siguiente

TEOREMA A.6 (teorema de Plancherel). *Para cada $u \in S(\mathbb{R}^d)$ se tiene que*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN. Si $u \in S(\mathbb{R}^d)$ denotamos $v(x) = u(-x)^*$ (conjugado complejo). Claramente $\hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi)^*$. La convolución, definida como

$$w(y) := (v * u)(y) := \int_{\mathbb{R}^d} v(y-x)u(x) dx,$$

también pertenece a $S(\mathbb{R}^d)$. Así,

$$\begin{aligned} \hat{w}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot y} \int_{\mathbb{R}^d} v(y-x)u(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} u(x) \hat{v}(\xi) dx = (2\pi)^{d/2} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi), \end{aligned}$$

es decir, la transformada de Fourier de una convolución es el producto de las transformadas. Así, con $v(x) = u(-x)^*$ y $w(y) = (v * u)(y)$, calculamos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^* u(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} v(-x)u(x) dx \\ &= w(0) \\ &= (\hat{w})^\sim(0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot y} \hat{w}(y) dy \right)_{|\xi=0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{d/2} \hat{u}(y) \hat{v}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(y)^* \hat{u}(y) dy = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN A.7. Se puede demostrar que $S(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para cada $1 \leq p < +\infty$. Por lo tanto la transformada de Fourier se extiende a un isomorfismo unitario de L^2 a L^2 .

A.2. La transformada de Laplace

A.2.1. Definición. Sea una función $f : [0, +\infty) \rightarrow K$, donde $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . La *transformada de Laplace* de f se define como

$$(\mathcal{L}f)(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.1})$$

OBSERVACIÓN A.8. Sea $\lambda = \eta + i\xi$. Si la integral en (A.1) existe para $\operatorname{Re} \lambda = \eta_0$ entonces existe para todo $\operatorname{Re} \lambda = \eta \geq \eta_0$, uniformemente con respecto a λ ya que

$$|e^{-\lambda t} f(t)| \leq e^{-\eta t} |f(t)| \leq e^{-\eta_0 t} |f(t)|.$$

DEFINICIÓN A.9. Se dice que f es de *orden exponencial* si existen constantes uniformes $C > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(t)| \leq Ce^{\gamma t},$$

para todo $t \geq 0$.

LEMA A.10. Si f es de orden exponencial entonces $\mathcal{L}f$ existe para todo $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$; por otro lado, existe $a_0 \in \mathbb{R}$ (llamada *abscisa de convergencia*), tal que $a_0 \leq \gamma$ y la integral en (A.1) no existe si $\operatorname{Re} \lambda < a_0$, y existe siempre que $\operatorname{Re} \lambda > a_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$ entonces

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} |f(t)| dt \leq C \int_0^{+\infty} e^{-(\eta-\gamma)t} dt < +\infty.$$

Por otra parte, sea el conjunto

$$A := \left\{ a \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt \text{ existe} \right\}.$$

Por la observación A.8, para cada $\epsilon > 0$ la integral en (A.1) existe si $\operatorname{Re} \lambda \geq \gamma + \epsilon$. Por lo tanto, $A \neq \emptyset$ y definimos

$$a_0 := \inf A \in \mathbb{R}.$$

Claramente la integral en (A.1) no existe si $\operatorname{Re} \lambda < a_0$ por la definición de ínfimo. Además, existe siempre si $\operatorname{Re} \lambda > a_0$ ya que $a_0 + \epsilon \in A$ para todo $\epsilon > 0$. Igualmente, ya que $\gamma + \epsilon \in A$ para todo $\epsilon > 0$, tomando $\epsilon \rightarrow 0^+$ obtenemos $a_0 \leq \gamma$. \square

PROPOSICIÓN A.11. $(\mathcal{L}f)(\lambda)$ es analítica en el conjunto $\{\operatorname{Re} \lambda > a_0\} \subset \mathbb{C}$, y además,

$$\frac{d}{d\lambda} (\mathcal{L}f)(\lambda) = - \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} f(t) dt. \quad (\text{A.2})$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [26], capítulo 8. \square

LEMA A.12. Sea $f \in C([0, +\infty); K)$ y de clase C^1 por pedazos. Sea

$$\rho = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} : \text{existe } C > 0 \text{ tal que } |f(t)| \leq Ce^{\gamma t}, \forall t \geq 0 \}.$$

Entonces para $\operatorname{Re} \lambda > \rho$ se tiene que

$$\left(\mathcal{L} \frac{df}{dt} \right) (\lambda) = \lambda (\mathcal{L}f)(\lambda) - f(0). \quad (\text{A.3})$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}\frac{df}{dt})(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{df}{dt}(t) dt \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-\lambda t} \frac{df}{dt}(t) dt \\
 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left((e^{-\lambda t} f(t)) \Big|_{t=0}^{t=R} + \lambda \int_0^R e^{-\lambda t} f(t) dt \right) \\
 &= \lambda(\mathcal{L}f)(\lambda) - f(0) + \lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-\lambda R} f(R).
 \end{aligned}$$

Pero para $\operatorname{Re} \lambda > \gamma > \rho$ se tiene que $|e^{-\lambda R} f(R)| \leq C e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \gamma)R} \rightarrow 0$ si $R \rightarrow +\infty$. Así, obtenemos (A.3). \square

A.2.2. Propiedades de la transformada de Laplace. A continuación se enlistan algunas propiedades básicas de la transformada de Laplace que se pueden consultar en [26].

(1) Linealidad: $\mathcal{L}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \mathcal{L}f_1 + \alpha_2 \mathcal{L}f_2$ para cualesquiera $\alpha_i \in \mathbb{C}$, f_i .

(2) Primera traslación: $\mathcal{L}(e^{at} f(t))(\lambda) = (\mathcal{L}f)(\lambda - a)$, $a \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-a)t} f(t) dt = (\mathcal{L}f)(\lambda - a).$$

(3) Segunda traslación: Si

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$$

entonces

$$(\mathcal{L}g)(\lambda) = \int_a^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t-a) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-a\lambda} (\mathcal{L}f)(\lambda).$$

(4) Cambio de escala: Si $f_a(t) = f(at)$, $a > 0$ entonces

$$(\mathcal{L}f_a)(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau/a} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} (\mathcal{L}f)(\lambda/a).$$

(5) n -ésima derivada: Si $f \in C^n((0, +\infty); K)$ con $n \geq 1$, entonces

$$(\mathcal{L}\frac{d^n f}{dt^n})(\lambda) = \lambda^n (\mathcal{L}f)(\lambda) - \lambda^{n-1} f(0) - \lambda^{n-2} f'(0) - \dots - \lambda f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

donde $f^{(k)}(t) = d^k f/dt^k$. Para $n = 1$ recuperamos la fórmula (A.3).

La demostración se hace por inducción (ejercicio).

(6) $\mathcal{L}(t^n f(t))(\lambda) = (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} (\mathcal{L}f)(\lambda)$. Se demuestra por inducción sobre $n \geq 1$.

(7) Si $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)/t$ existe entonces

$$\mathcal{L}(f(t)/t)(\lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} (\mathcal{L}f)(z) dz.$$

A.3. Relación entre ambos conceptos: la transformada de Fourier-Laplace

(I) Notamos primero que la transformada de Laplace $\mathcal{L}f$ es la transformada de Fourier (en la variable temporal) de la función

$$f_\eta(t) = \begin{cases} (2\pi)^{1/2} f(t) e^{-\eta t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

donde $\operatorname{Re} \lambda = \eta$. En efecto,

$$\hat{f}_\eta(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} f_\eta(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\eta+i\xi)t} f(t) dt = (\mathcal{L}f)(\eta + i\xi).$$

Por lo tanto, aplicando el lema de Plancherel obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &:= \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{L}f)(\eta + i\xi)|^2 d\xi = \|(\mathcal{L}f)(\eta + i\cdot)\|_{L^2}^2 = \|\hat{f}_\eta\|_{L^2}^2 = \|f_\eta\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_\eta(t)|^2 dt \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2\eta t} |f(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

que es una norma hiperbólica pesada por η , definida como:

$$\|f\|_{L_\eta^2(\mathbb{R})}^2 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-2\eta x} dx = \|e^{-\eta \cdot} f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

para η fijo. De este modo

$$\|(\mathcal{L}f)(\eta + i\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\|_{L_\eta^2(0, +\infty)}^2. \quad (\text{A.4})$$

(II) Sea $g = g(x, t)$ una función escalar con $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, y $t \geq 0$. Suponemos que para x fijo, g es de orden exponencial como función de $t > 0$, es decir, que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ existe una $C > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ uniformes tales que

$$|g(x, t)| \leq C e^{\gamma t},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$. Asimismo, suponemos que para t fijo, g como función de x tiene transformada de Fourier, por ejemplo, que

$$g(\cdot, t) \in S(\mathbb{R}^d),$$

para cada $t > 0$, fijo. Bajo estas consideraciones, podemos definir *la transformada de Fourier-Laplace* de g como

$$\tilde{g}(\xi, \lambda) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} e^{-\lambda t} g(x, t) dx dt. \quad (\text{A.5})$$

Si $g(\cdot, t) \in S(\mathbb{R}^d)$, el orden de integración no importa (teorema de Fubini) y por ende

$$\tilde{g}(\xi, \lambda) = (\widehat{(\mathcal{L}g)(\cdot, \lambda)})(\xi, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot y} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g(x, t) dt dx = (\mathcal{L}\hat{g}(\xi, t))(\xi, \lambda).$$

(III) Por la observación (II) definimos

$$I(\lambda) := \|\tilde{g}(\cdot, \lambda)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{g}(\xi, \lambda)|^2 d\xi.$$

Por el teorema de inversión y el lema de Plancherel obtenemos

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \|(\mathcal{L}g)(\lambda, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|(\mathcal{L}g)(\lambda, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{L}g)(\lambda, x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g(x, t) dt \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Por otra parte, por la observación (I): $\tilde{g}(\xi, \lambda)$ es la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de

$$g_\eta(x, t) := \begin{cases} (2\pi)^{1/2} e^{-\eta t} g(x, t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

en el sentido de que

$$\begin{aligned} \hat{g}_\eta(\xi, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_\eta(x, t) e^{-i(\xi \cdot x + \tau t)} dx d\tau \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{+\infty} e^{-ix \cdot \xi} e^{-(\eta + i\tau)t} g(x, t) dt dx \\ &= \tilde{g}(\xi, \eta + i\tau). \end{aligned}$$

De esta manera, aplicando el lema de Plancherel se obtiene

$$\begin{aligned} \|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})}^2 &= \|g_\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g_\eta(x, t)|^2 dx dt \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\eta t} |g(x, t)|^2 dx dt \\ &= 2\pi \|e^{-\eta t} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))}^2 \\ &= 2\pi \|g\|_{L_\eta^2(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))}^2, \end{aligned}$$

es decir, obtenemos la útil relación

$$\|g\|_{L_\eta^2(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})}^2. \quad (\text{A.6})$$

Bibliografía

- [1] R. AGEMI, *Mixed problems for the linearized shallow water equations*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), no. 6, pp. 645–681.
- [2] S. BENZONI-GAVAGE, F. ROUSSET, D. SERRE, AND K. ZUMBRUN, *Generic types and transitions in hyperbolic initial-boundary value problems*, Proc. R. Soc. Edinburgh A **132** (2002), no. 5, pp. 1073–1104.
- [3] S. BENZONI-GAVAGE AND D. SERRE, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [4] M. BRAUN, *Differential equations and their applications*, vol. 11 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, fourth ed., 1993.
- [5] E. A. CODDINGTON, *An introduction to ordinary differential equations*, Prentice-Hall Mathematics Series, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.
- [6] R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [7] H. DYM AND H. P. MCKEAN, *Fourier series and integrals*, Academic Press, New York, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.
- [8] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
- [9] H. FREISTÜHLER, *A short note on the persistence of ideal shock waves*, Arch. Math. **64** (1995), pp. 344–352.
- [10] ———, *Theory of non-classical shock waves*. Lecture notes (preliminary version), RWTH Aachen, 1999.
- [11] H. FREISTÜHLER AND R. G. PLAZA, *Normal modes and nonlinear stability behaviour of dynamic phase boundaries in elastic materials*, Arch. Ration. Mech. Anal. **186** (2007), no. 1, pp. 1–24.
- [12] J. HADAMARD, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin **13** (1902), pp. 49–52.
- [13] R. HERSH, *Mixed problems in several variables*, J. Math. Mech. **12** (1963), no. 3, pp. 317–334.
- [14] R. L. HIGDON, *Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems*, SIAM Review **28** (1986), no. 2, pp. 177–217.
- [15] F. JOHN, *Partial Differential Equations*, vol. 1 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, Fourth ed., 1982.
- [16] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1980.
- [17] H.-O. KREISS, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), pp. 277–298.
- [18] H. O. KREISS, *Numerical Methods for Solving Time-Dependent Problems for Partial Differential Equations*, Presses de l'Université de Montreal, 1978.
- [19] H.-O. KREISS AND J. LORENZ, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, vol. 47 of Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2004. Reprint of the 1989 edition.

- [20] H. O. KREISS AND J. OLIGER, *Methods for the Approximate Solution of Time Dependent Problems*, no. 10 in GARP Publications Series, World Meteorological Organization, Geneva, 1973.
- [21] P. D. LAX, *Differential equations, difference equations and matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), pp. 175–194.
- [22] P. G. LEFLOCH, *Hyperbolic systems of conservation laws: The theory of classical and nonclassical shock waves*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [23] A. MAJDA, *The existence of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc. **43** (1983), no. 281, pp. v + 93.
- [24] ———, *The stability of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc. **41** (1983), no. 275, pp. iv + 95.
- [25] A. MAJDA AND S. OSHER, *Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), pp. 607–675.
- [26] J. E. MARSDEN AND M. J. HOFFMAN, *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, New York, second ed., 1987.
- [27] G. MÉTIVIER, *Stability of multidimensional weak shocks*, Comm. Partial Diff. Eqs. **15** (1990), no. 7, pp. 983–1028.
- [28] ———, *The block structure condition for symmetric hyperbolic systems*, Bull. London Math. Soc. **32** (2000), no. 6, pp. 689–702.
- [29] J. V. RALSTON, *Note on a paper of Kreiss*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), pp. 759–762.
- [30] J. RAUCH, *Energy and resolvent inequalities for hyperbolic mixed theorems*, J. Differential Equations **11** (1972), pp. 528–540.
- [31] ———, *L^2 is a continuable initial condition for Kreiss' mixed problems*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), pp. 265–285.
- [32] D. SERRE, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.