Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CENCIAS

C_0 Semigrupos para sistemas hiperbólicos port-hamiltonianos y sus aplicaciones

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TíTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

EDUARDO PARRA GARCÍA

DIRECTOR DEL TRABAJO:
DR. RAMÓN PLAZA VILLEGAS

Ciudad Universitaria , CDMX 2018

Hoja de datos del jurado

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido paterno	Parra
Apellido materno	García
Nombre(s)	Eduardo
Teléfono	26155399
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Matemáticas	Matemáticas
Número de cuenta	305157490
2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado	Dr
Nombre(s)	Ramón Gabriel
Apellido paterno	Plaza
Apellido materno	Villegas
3.Datos del sinodal 1	3.Datos del sinodal 1
Grado	Dra
Nombre(s)	María de la Luz Jimena
Apellido paterno	de Teresa
Apellido materno	de Oteyza
4.Datos del sinodal 2	4.Datos del sinodal 2
Grado	Dra
Nombre(s)	Luis Octavio
Apellido paterno	Silva
Apellido materno	Pereyra
5.Datos del sinodal 3	5.Datos del sinodal 3
Grado	Dr
Nombre(s)	Francisco Javier
Apellido paterno	Torres
Apellido materno	Ayala
6.Datos del sinodal 4	6.Datos del sinodal 4
Grado	Dr
Nombre(s)	Pedro
Apellido paterno	Miramontes
Apellido materno	Vidal
7.Datos del trabajo escrito	7.Datos del trabajo escrito
Titulo	C_0 semigrupos para sistemas hiperbólicos de tipo port-hamiltonianos y sus aplicaciones
Número de páginas	86
Año	2018

Índice

Introducción

En este trabajo estudiaremos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, en particular los sistemas llamados port hamiltonianos o hamiltonianos. Estos sistemas aparecen en el estudio de distintos temas como mecánica, la teoría de circuitos eléctricos, la teoría de sistemas y teoría del control. Para una introducción histórica del estudio de estos sistemas consultar Van der Schaft y Jeltsema [27].

A lo largo de esta tesis únicamente nos detendremos a estudiar el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales con una dimensión espacial y otra dimensión temporal, es decir ecuaciones de evolución en una dimensión con la variable espacial en un dominio acotado. Por lo tanto resolveremos ecuaciones diferenciales parciales con valor inicial y, además, con valores en la frontera.

Para estudiar sistemas port-hamiltonianos de ecuaciones diferenciales parciales es necesario estudiar el caso de sistemas port-hamiltonianos de dimensión infinita; en este caso estudiaremos estos sistemas dentro de un espacio de funciones L^2. Para ello será indispensable utilizar algunas técnicas y resultados del análisis funcional, en particular, resultados aplicables a los espacios de Hilbert. Otra herramienta básica para el estudio de los sistemas port-hamiltonianos de ecuaciones diferenciales parciales será la teoría de C_0 semigrupos. Esta teoría se utiliza para estudiar ecuaciones diferenciales en espacios de Banach de dimensión infinita.

El objetivo de este trabajo es utilizar la teoría de C_0 semigrupos para encontrar condiciones generales en las cuales el problema de valor inicial con valores en la frontera asociado a un sistema port-hamiltoniano está bien planteado, es decir, las condiciones que nos aseguran resolver los problemas de existencia, unicidad y de dependencia continua de los valores iniciales.

El trabajo se divide de la siguiente manera. En el capítulo 1 se presenta una introducción breve a la teoría de los C_0 semigrupos. Se presentan los resultados básicos, algunos ejemplos y algunos de los teoremas clásicos de generación de C_0 semigrupos, tales como el teorema de Hille-Yosida y el teorema de Lumer-Phillips ([9] y [21]). También se presenta el problema abstracto de Cauchy, el cual será la herramienta fundamental para relacionar los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales con la teoría de semigrupos.

En el capítulo 2 se presentan de forma breve los sistemas port-hamiltonianos y sus propiedades más importantes. Se muestra la formulación de los sistemas port-hamiltonianos como un problema de Cauchy abstracto y se enuncia el teorema principal de este trabajo. En este teorema se enuncian las propiedades que debe setisfacer un sistema port-hamiltoniano para que el correspondiente problema abstracto de Cauchy esté bien planteado. Estos resultados fueron obtenidos por Jacob, Morris y Zwart [14], Jacob y Zwart [15] y Augner y Jacob [2].

En el capítulo 3 se aplicarán los resultados de generación de semigrupos a sistemas port-hamiltonianos ampliamente conocidos como el de la ecuación de la cuerda vibrante; asimismo, aplicaremos la teoría a modelos poco estudiados como el modelo hiperbólico de difusión de calor de Cattaneo-Maxwell ([18]). Asimismo, el teorema de generación de semigrupos, junto con la teoría de ecuaciones semi-lineales presentada en el capítulo 1, nos permite concluir la existencia y unicidad de soluciones a sistemas hiperbólicos no lineales, tales como el modelo hiperbólico de difusión no fickeana con térnimo de reacción de tipo Fisher-KPP.

Al final del trabajo se presenta un apéndice con los resultados de análisis funcional más importantes utilizados en este trabajo. También se incluye una breve presentación de la integral de Lebesgue para funciones vectoriales.

Capitulo 1

Teoría de C_0 semigrupos

En este capítulo se introduce el concepto de semigrupos fuertemente continuos o también llamados C_0 semigrupos, así como sus propiedades básicas y algunos teoremas importantes de esta teoría tales como el teorema de Hille-Yosida y el teorema de Lumer-Phillips.

1.1 Definiciones

Definición 1.1.1 (Semigrupo de operadores acotados)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach. Una familia de operadores acotados de E en E $(T(t,\cdot))$, $0 \le t < \infty$ es un semigrupo de operadores acotados si satisface:

(i) $T(0,\cdot) = I, I$ es el operador identidad
(ii) $T(t+s,\cdot) = T(t,\cdot)T(s,\cdot)$ para todo $t, s \ge 0$

Otras notaciones utilizadas para los semigrupos, alternativas a $T(t,\cdot)$, son $T(t)$ o T_t, si $x \in E$ entonces aplicar algún operador del semigrupo a x se escribe $T(t,x)$, $T(t)x$ o $T_t(x)$ respectivamente. La noción de semigrupo generaliza la idea de la función exponencial y la exponencial de un operador para el caso de los operadores en espacios lineales de dimensión infinita.

Observación. De la definición de semigrupos se puede observar que los operadores que forman parte de semigrupo conmutan entre sí.

Definición 1.1.2 (Semigrupo fuertemente continuo)**.** Sea $(T(t))$ un semigrupo de operadores acotados en E, $(T(t))$ es un semigrupo fuertemente continuo si satisface:

(iii) $\lim\limits_{t\to 0+} T(t)x = x \quad$ para cada $x \in E$

A los semigrupos fuertemente continuos también se les conoce como C_0 semigrupos.

1.2 Propiedades

Teorema 1.2.1. *Sea $T(t)$ un C_0 semigrupo. Entonces existen constantes $1 \le M$ y $\omega \ge 0$ tales que $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$ para $0 \le t < \infty$.*

Demostración. Primero suponemos que existe un $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ está acotado para $0 \leq t \leq \eta$. Procedemos por contradicción y suponemos que la afirmación anterior no se cumple. Entonces podemos encontrar una sucesión (t_n) tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\|T(t_n)\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto implica que $\sup \|T(t_n)\| = \infty$.

Entonces por el teorema de acotación uniforme existe un $x_0 \in E$ tal que

$$\sup \|T(t_n, x_0)\| = \infty.$$

Pero $\lim_{n\to\infty} \|T(t_n, x_0)\| = \|x_0\|$ por ser semigrupo de operadores acotados y esto implica que la sucesión de términos $\|T(t_n, x_0)\|$ es acotada, lo cual es una contradicción con la afirmación anterior.

Por lo tanto existen $0 < M$ y $0 < \eta$ tales que $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t < \eta$ y como $\|T(0)\| = 1$ se cumple que $1 \leq M$.

Consideramos $\omega = \eta^{-1} \log M$; si $t \geq 0$ podemos escribir $t = \eta n + \delta$ donde $0 \leq \delta < \eta$ y entonces tomando normas y aplicando la propiedad (ii) de la definición de semigrupo tenemos la desigualdad

$$\|T(t)\| = \|T(\eta n + \delta)\| = \|T(\eta n)T(\delta)\|$$

$$\leq \|T(\eta n)\|\|T(\delta)\| = \|T^n(\eta)\|\|T(\delta)\|$$

$$\leq MM^n \leq MM^{t/\eta} = Me^{(t/\eta)\log M} = Me^{t\omega}$$

□

Observación. Si $\omega = 0$ se dice que el semigrupo es uniformemente acotado. Si además $M = 1$ se dice que el semigrupo es un semigrupo contractivo.

Se dice que el semigrupo es isométrico si $\|T(t)x\| = \|x\|$ para todo $t \geq 0$ y $x \in E$.

Un concepto importante que acompaña al concepto de semigrupo es el de generador infinitesimal del semigrupo.

Definición 1.2.1 (Generador Infinitesimal de un semigrupo)**.** Sea $(T(t))$ un semigrupo. Definimos el operador lineal *A*

$$D(A) := \left\{ x \in E : \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \tag{1.1}$$

y

$$Ax := \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad x \in D(A) \tag{1.2}$$

Teorema 1.2.2. *Sea $(T(t))$ un C_0 semigrupo, entonces para $x \in E$ el mapeo $t \mapsto T(t)x$ es un mapeo continuo de los reales no negativos $\mathbb{R}_0^+$ en E*

Demostración. Sea $x \in E$. Vamos a demostrar que el mapeo $\phi_x(t) = T(t)x$ es continuo para $t \geq 0$.

Primero demostraremos que es continuo por la derecha. Aplicando las propiedades (i) y (ii) de la definición 1.1.1 de semigrupo y el teorema anterior tenemos la siguiente desigualdad para $0 \leq h$

$$0 \leq \|T(t+h)x - T(t)x\| = \|T(t)(T(h)x - x)\| \leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\|.$$

notamos que el lado derecho tiende a 0 cuando $h \to 0+$ por la propiedad (i) de C_0 semigrupos.

Para demostrar que $\phi_x(t)$ es continuo por la izquierda tomamos $0 \leq h \leq t$ y aplicamos un argumento similar al anterior para obtener la siguiente desigualdad

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| = \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| = \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\|$$

$$= \|T(t-h)(x - T(h)x)\| \leq \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \leq Me^{(t-h)\omega}\|x - T(h)x\|$$

y esta parte de la desigualdad tiende a 0 cuando $h \to 0+$ y por lo tanto es continua por la izquierda también. Así, el mapeo $\phi_x(t)$ es continuo.

□

Teorema 1.2.3. *Sea $(T(t))$ un C_0 semigrupo y sea A su generador infinitesimal; entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) Para cada $x \in E$

$$\lim_{h \to 0} h^{-1} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x. \tag{1.3}$$

ii) Si $x \in E$ entonces $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ y

$$A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x. \tag{1.4}$$

iii) Si $x \in D(A)$ entonces para $t \geq 0, \quad T(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{1.5}$$

iv) Si $x \in D(A)$ entonces

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau. \tag{1.6}$$

Demostración.

i) Sea $x \in E$ y $t, h \geq 0$. x y t serán elementos arbitrarios pero fijos. Como el mapeo $T(s)x$ es continuo para $s \geq 0$ y E es espacio de Banach, entonces la función $T(s)x$ es integrable en sentido de Riemann en el intervalo $[t, t+h]$, pues el mismo criterio de Cauchy para la integral de Riemann real es válido en espacios de Banach (en el apéndice A.3 se define la integral de Lebesgue para funciones en espacios de dimensión infinita).

La suma de Riemann de la forma $T(t+h)xh$ aproxima la integral $\int_t^{t+h} T(s)xds$, si $0 < h \ll 1$, entonces

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds \approx T(t+h)x$$

,

para h suficientemente pequeña.

Por la continuidad uniforme del mapeo $s \mapsto T(s)x$ en el intervalo $[t, t+h]$ y la propiedad (ii) de semigrupos, se cumple que si $h \to 0+$ entonces

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds \to T(t)x$$

.

ii) Sea $x \in E$ y $h > 0$. Para demostrar 1.3 aplicamos la definición de generador infinitesimal

$$A(\int_0^t T(s)xds) = \lim_{h\to 0+} h^{-1}(T(h)\int_0^t T(s)xds - \int_0^t T(s)xds).$$

Como $T(h)$ es un operador lineal continuo entonces es también un operador lineal cerrado. Dado que el operador A es cerrado, se puede aplicar al integrando. Utilizando las propiedades (i) y (ii) de C_0 semigrupo, así como el teorema de cambio de variable tenemos

$$\begin{aligned} A(\int_0^t T(s)xds) &= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(\int_0^t T(h+s)xds - \int_0^t T(s)xds) \\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(\int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds) \\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(\int_t^{t+h} T(s)xds + \int_h^t T(s)xds - \int_h^t T(s)xds - \int_0^h T(s)xds \\ &= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds = T(t)x - x. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene aplicando el inciso i) de este teorema. Esto prueba la igualdad deseada y también que $A(\int_0^t T(s)xds)$ esta bien definido, es decir, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$.

iii) Sea $x \in D(A)$ y $t \geq 0$; aplicando la definición del operador A tenemos

$$AT(t)x = \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(T(h)T(t)x - T(t)x) = T(t)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(T(h)x - x) = T(t)Ax,$$

Lo cual prueba que el límite existe y se cumple que $T(t)x \in D(A)$, además de la igualad $AT(t)x = T(t)Ax$. Esta última igualdad implica que la derivada por la derecha está bien definida y satisface

$$\frac{d^+T(t)x}{dt} = T(t)Ax.$$

Resta demostrar que la derivada por la izquierda existe para $0 < t$ y que coincide con la derivada por la derecha.

Mediante un cálculo directo observamos que para $0 < h < t$ se cumple

$$\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax = T(t-h)\frac{T(h)x - x}{h} + T(t-h)Ax - T(t-h)Ax + T(t)Ax.$$

Agrupando y calculando límites de ambos lados tenemos la siguiente igualdad

$$\lim_{h\to 0+}(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax)$$

$$= \lim_{h\to 0+} T(t-h)(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax) + \lim_{h\to 0+}(T(t-h)Ax - T(t)Ax) = 0,$$

en virtud de que $\lim\limits_{h\to 0+}(T(t-h)Ax - T(t)Ax) = 0$ por la continuidad de los operadores del semigrupo.

Entonces tenemos

$$\lim_{h\to 0+} \|T(t-h)(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax)\| \leq \lim_{h\to 0+} \|T(t-h)\|\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\|$$

$$\leq Me^{\omega t} \lim_{h\to 0+} \|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\| = 0$$

dado que $x \in D(A)$. Por lo tanto la derivada izquierda existe y coincide con la derivada derecha. Concluimos que el mapeo $t \mapsto T(t)x$ es diferenciable en $D(A)$:

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

iv) Sea $x \in D(A)$ por el inciso (iii) tenemos que

$$\int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t \frac{dT(\tau)x}{d\tau}d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

$\square$

A continuación se presentan algunas de las propiedades más importantes de los generadores infinitesimales.

Teorema 1.2.4. *Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $(T(t))$ entonces:*

i) El dominio de A, $D(A)$, es denso en E
ii) A es un operador lineal cerrado.

Demostración. i) Sea $x \in E$. Definimos la sucesión $x_n := n\int_0^{1/n} T(s)xds$ para $n \in \mathbb{N}$.

Por el inciso (ii) del teorema anterior, $x_n \in D(A)$ y por el inciso (i) del teorema 1.2.3, $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $\overline{D(A)} = E$.

ii) Si $x, y \in D(A)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ la linealidad de A se obtiene directo de la definición del operador A

$$\begin{aligned} A(\alpha x + y) &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h)(\alpha x + y) - (\alpha x + y)) \\ &= \alpha \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h)x - x) + \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(T(h)y - y) \\ &= \alpha A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Para demostrar que A es cerrado tomamos $(x_n) \subseteq D(A)$ tal que $x_n \to x$ y $A(x_n) \to y$ cuando $n \to \infty$. Aplicando el operador A a la sucesión (x_n) y por el inciso (iv) del teorema anterior tenemos que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds.$$

Tomando límites de ambos lados en la igualdad anterior cuando $n \to \infty$ tenemos la igualdad

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds,$$

pues en el intervalo $[0,t]$ las funciones $T(\cdot)Ax_n \to T(\cdot)y$ convergen uniformemente.

Si multiplicamos esta última igualdad por $1/t$ y tomamos el límite cuando $t \to 0+$ resulta que

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\,(T(t)x - x) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\,(\int_0^t T(s)yds) = y.$$

Esta última igualdad se obtiene utilizando el inciso (iv) del teorema anterior. Es decir, hemos demostrado que $A(x) = y$. Como el límite existe eso implica que $x \in D(A)$ y así concluimos que A es un operador cerrado. $\square$

Teorema 1.2.5. *Sean $(T(t))$ y $(S(t))$ C_0 semigrupos de operadores acotados, y A y B sus generadores infinitesimales, respectivamente. Si $A = B$ entonces $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración. Como $A = B$ entonces $D(A) = D(B)$, y para cada $x \in D(A)$ se cumple que $Ax = Bx$. Sea $t \geq 0$; observamos que el mapeo $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ es diferenciable para $0 < s < t$ y directamente podemos calcular el valor de la derivada:

$$\frac{d(T(t-s)S(s)x)}{ds} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(t-(s+h))S(s+h)x - T(t-s)S(s)x)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(t-s-h)(S(s+h)x - S(s)x)) + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(t-s-h) - T(t-s))S(s)x$$

$$= T(t-s)BS(s)x - AT(t-s)S(s)x = T(t-s)AS(s)x - T(t-s)AS(s)x = 0.$$

Por lo tanto la función $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ es constante y se cumple que la función evaluada es cero y en *t* tienen el mismo valor, es decir, $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in D(A)$. Como $D(A)$ es un conjunto denso se satisface que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in E$ y para todo $t \geq 0$.

$\square$

Antes de revisar otras propiedades de los semigrupos que serán importantes en las aplicaciones al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales es necesario presentar algunos ejemplos de semigrupos y sus generadores infinitesimales para comprender mejor las propiedades enunciadas.

1.2.1 Ejemplos

Semigrupo multiplicativo

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito. Consideremos el espacio de Banach $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ y $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Definamos la imagen esencial de q como

$$q_{ess}(\Omega) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(\{s \in \Omega : |f(s) - \lambda| < \epsilon\}) > 0\ \forall \epsilon > 0\}.$$

También definamos los operadores $T_q(t) : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ actuando como

$$T_q(t)f := e^{tq(s)}f(s).$$

Podemos comprobar mediante cálculos directos lo siguiente:

i) Si la función $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es esencialmente acotada, entonces la familia de operadores $(T_q(t))$ forman un C_0-Semigrupo de operadores acotados.

Como q es esencialmente acotada la norma infinito de q es

$$\|q\|_\infty := \sup\{|\lambda| : \lambda \in q_{ess}\}.$$

Entonces, por definición, se cumple $|q(s)| \leq \|q\|_\infty$ para toda $s \in \Omega$.

Claramente se cumple que $T_q(t)$ es un operador lineal para todo $t \geq 0$, pues

$$\begin{aligned} T_q(t)(\alpha f + g) &= e^{tq(s)}(\alpha f(s) + g(s)) \\ &= \alpha e^{tq(s)} f(s) + e^{tq(s)} g(s) \\ &= \alpha T_q(t) f + T_q(t) g \end{aligned}$$

y además son operadores acotados, ya que

$$\|T_q(t)f\|_p = (\int_\Omega |e^{tq(s)} f(s)|^p \mu(ds))^{1/p} \leq e^{t\|q\|_\infty} (\int_\Omega |f(s)|^p \mu(ds))^{1/p} = e^{t\|q\|_\infty} \|f\|_p.$$

Directamente de la definición de la familia de operadores se observa que se satisfacen los incisos (i), (ii) y (iii) de las definiciones 1.1.1 y 1.2.1:

i) $T_q(0)f = e^{0q(s)} f(s) = f(s)$

ii) $T_q(t)T_q(r)f = e^{tq(s)} e^{rq(s)} f(s) = e^{(t+r)q(s)} f(s) = T_q(t+r)f$

iii) $\lim\limits_{t\to 0} T_q(t)f = f$

También podemos calcular explícitamente su generador infinitesimal

$$Af = \mathop{lim}_{h\to 0+} h^{-1}(T_q(h)f - f) = \mathop{lim}_{h\to 0+} h^{-1}(e^{hq(s)} f(s) - f(s)) = q(s)f(s)$$

$$D(A) := \{f \in L^p(\Omega) : qf \in L^p(\Omega)\}$$

Por los teoremas expuestos anteriormente se debe cumplir que el operador A es un operador cerrado y su dominio es denso en $L^p(\Omega)$. Además por los cálculos mostrados arriba notamos que para este caso particular las constantes mencionadas en el teorema 1.2.1 son $M = 1$ y $\omega = \|q\|_\infty$.

Semigrupos de traslación

Definimos en $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, la familia de operadores $T_l(t)f =: f(t + \cdot)$ para $t \geq 0$, y $f \in L^p(\mathbb{R})$. De la definición se observa inmediatamente que la familia $(T_l(t))$ satisface (i) y (ii) de la definición de semigrupos. Además resulta ser un semigrupo contractivo, en particular un semigrupo isométrico, es decir, $\|T_l(t)f\|_p = \|f\|_p$. Resta mostrar que forman un C_0 semigrupo.

Par ello demostraremos que $\lim\limits_{t\to 0+} T_l(t)f = f$, o equivalentemente, que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t+s) - f(s)|^p \lambda(ds) \to 0$$

cuando $t \to 0$.

Recordamos el conocido resultado de análsis real que establece que el conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R})$ de las funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto es un subconjunto denso de $L^p(\mathbb{R})$, ver Brezis [4].

En virtud de este teorema podemos tomar $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y observar que

$$\int |\phi(t+s) - \phi(s)|^p \lambda(ds) \to 0$$

cuando $t \to 0$, tras haber aplicado teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Así obtenemos el resultado para las funciones del conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \to 0+} T_l(t)\phi = \phi, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Para $f \in L^p(\mathbb{R})$ tomamos una sucesión (ϕ_n) en $C_0^\infty(\mathbb{R})$, la cual satisface $\phi_n \to f$ en $L^p(\mathbb{R})$. Utilizando esto y las propiedades básicas de una norma obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\|T_l(t)f - f\|_p \leq \|T_l(t)f - T_l(t)\phi_n\|_p + \|T_l(t)\phi_n - f\|_p = \|T_l(t)\|\|f - \phi_n\|_p + \|T_l(t)\phi_n - f\|_p$$

Tomando el límite cuando $t \to 0+$ tenemos

$$\lim_{t \to 0+} \|T_l(t)f - f\|_p \leq \lim_{t \to 0+} (\|T_l(t)\|\|f - \phi_n\|_p + \|T_l(t)\phi_n - f\|_p) = 2\|f - \phi_n\|_p,$$

y como $\phi_n \to f$ se tiene que $\lim\limits_{t \to 0+} \|T_l(t)f - f\|_p = 0$. Por lo tanto se cumple

$$\lim_{t \to 0+} T_l(t)f = f \quad \text{ en } L^p(\mathbb{R}).$$

Concluimos que $(T_l(t))$ es un C_0 semigrupo contractivo en $L^p(\mathbb{R})$. Para conocer su generador infinitesimal aplicamos directamente la definición

$$Af = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(f(t+s) - f(s)).$$

Observamos que se trata de la definición usual de derivada de $f'(s)$ pero aplicada a funciones en $L^p(\mathbb{R})$. El dominio del operador A debe incluir a las funciones que tienen derivada continua y perteneciente a $L^p(\mathbb{R})$. Estas funciones pertenecen al espacio de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$; esto sugiere que el dominio de A debería ser el espacio $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Estos espacios se definen como

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : \text{ existe } g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int f\phi' = -\int g\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

A la función g se le suele denotar f'. Este espacio es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{1,p} := \|f\|_p + \|f'\|_p.$$

Una exposición completa de la teoría de los espacios de Sobolev puede encontrarse en los textos Adams [1] o Brezis [4]. Para este ejemplo basta notar que el espacio $W^{1,p}(\mathbb{R})$ consiste de funciones en $L^p(\mathbb{R})$ que tienen derivada en un sentido débil, y esto incluye por supuesto a las funciones que tienen derivada en el sentido clásico. Si nos restringimos a este espacio, el operador actúa como la derivada, por lo que

$$D(A) := W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad \text{ y } \quad Af = \tfrac{d}{dt}f.$$

Semigrupo del calor

El semigrupo del calor, también llamado semigrupo de difusión o semigrupo gaussiano es un semigrupo importante tanto en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales como en la teoría de procesos estocásticos.

Se puede definir en el espacio $L^1(\mathbb{R})$ la siguiente familia de operadores lineales: sea $N_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2t}$; esta función es conocida como núcleo de Gauss. Para $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $t > 0$ definimos $T(t)f := N_t * f$ y $T(0)f = f$, donde

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbb{R}} f(y-z)g(z)dz,$$

es el llamado producto de convolución o simplemente convolución de f con g.

Por la desigualdad de Young (véase Brezis [4], capítulo 4) se cumple que

$$\|T(t)f\|_1 = \|N_t * f\|_1 \leq \|N_t\|_1 \|f\|_1 = \|f\|_1$$

pues $(2\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2t}dx = 1$. De aquí tenemos que los operadores $T(t)$ son continuos y de norma menor o igual a uno y, además, $N_t * f \in L^1(\mathbb{R})$.

Por definición $T(0) = I$. Para demostrar la propiedad (ii) de la definición de semigrupos se utilizan algunas propiedades conocidas de la transformada de Fourier, tales como ser una transformación biyectiva y la propiedad relacionada a la convolución de funciones. Estas propiedades se pueden encontrar en los libros de Evans [10], Rudin [23] y Yosida [28]

Para $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define la transformada de Fourier como

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx. \tag{1.7}$$

Para probar la propiedad de (ii) de C_0 semigrupos utilizamos otro hecho conocido: la transformada de Fourier de la función $N_1(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ resulta ser la misma función. Esto se puede probar directamente calculando la integral de contorno y usando teorema de Cauchy para integrales de variable compleja. Utilizando esto y un simple cambio de variable obtenemos la igualdad

$$\widehat{N_t(x)} = N_1(\sqrt{t}\xi).$$

Usando el teorema de convolución para la transformada de Fourier obtenemos

$$\widehat{N_t * N_s} = \sqrt{2\pi}\hat{N}_t \cdot \hat{N}_s = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t+s)\xi^2/2} = N_1(\sqrt{t+s}\xi) = \widehat{N_{t+s}},$$

y como la transformada de Fourier es invertible resulta que $N_t * N_s = N_{t+s}$. Por lo tanto si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $t, s \geq 0$ se cumple que

$$T(t)T(s)(f) = T(t)(N_s * f) = (N_t * N_s) * f = N_{t+s} * f = T(t+s)f,$$

es decir, la familia de operadores $(T(t))$ forma un semigrupo.

Para mostrar que es uniformemente continuo calculamos primero para $t \geq 0$ la norma

$$\|T(t)f - f\| = \int_{\mathbb{R}} | \int_{\mathbb{R}} N_t(x-y)f(y)dy - f(x)|dx.$$

Por propiedades del n úcleo de Gauss se cumple $\int_{\mathbb{R}} N_t(x-y)f(x)dy = f(x)$, y sustituyendo esta igualdad en la anterior tenemos se cumple la siguiente afirmación

$$\|T(t)f - f\| = \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} N_t(x-y)(f(y)dy - f(x))dy|dx.$$

Utilizando el cambio de variable $z = (x-y)/\sqrt{t}$ para la variable y, la monotonía de la integral de Lebesgue y el teorema de Fubini, tenemos

$$\|T(t)f - f\| = \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} N_1(z)(f(x-\sqrt{t}z)dy - f(x))dz|dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} N_1(z)|(f(x-\sqrt{t}z)dy - f(x))|dzdx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} N_1(z) \int_{\mathbb{R}} |(f(x-\sqrt{t}z)dy - f(x))|dxdz \leq 2\|f\|.$$

Por lo tanto para todo $0 \leq t$ se cumple que $\|T(t)f - f\| \leq 2\|f\|$, lo cual implica que $T(t)f - f \leq 2f$ casi donde sea, o a.e por sus siglas en inglés, en $\mathbb{R}$. Podemos aplicar el lema de Fatou y obtener

$$\lim_{t\to 0+} \|T(t)f - f\| \leq \overline{\lim_{t\to 0+}} \|T(t)f - f\| \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}} N_1(z) \overline{\lim_{t\to 0+}} \int_{\mathbb{R}} |(f(x-\sqrt{t}z)dy - f(x))|dxdz.$$

Por un argumento de densidad similar al utilizado en el ejemplo 2 se obtiene que

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \int_{\mathbb{R}} |(f(x-\sqrt{t}z)dy - f(x))|dx = 0,$$

y con ello tenemos $\lim_{t\to 0+} \|T(t)f - f\| = 0$. Por lo tanto el semigrupo del calor es un C_0 semigrupo contractivo.

Para calcular el generador infinitesimal es necesario introducir algunos conceptos como los operadores resolventes de asociados a un operador lineal y demostrar algunos teoremas que simplifican los cálculos. Se afirma sin demostración que el generador infinitesimal del semigrupo del calor esta dado por el siguiente operador

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$$

Una demostración de esta afirmación se puede consultar en el libro de análisis funcional de K. Yosida [28].

1.3 Generación de C_0 semigrupos

Hasta ahora se han demostrado y ejemplificado algunas propiedades importantes de los semigrupos fuertemente continuos y sus generadores infinitesimales. En el último ejemplo se observa una relación de los C_0 semigrupos con una ecuación diferencial parcial importante, la ecuación del calor. La función N_t es la llamada solución fundamental de la ecuación del calor.

Para observar que una ecuación diferencial parcial se puede estudiar en el contexto de la teoría de semigrupos consideramos como ejemplo un caso particular de la ecuación del calor en una dimensión y retomamos el ejemplo anterior. La ecuación del calor esta dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \tag{1.8}$$

Queremos buscar una solución $u(x,t)$ para $t > 0$ la cual satisface la ecuación, y además, la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, donde $f \in E$ es algún espacio de Banach adecuado para el problema (por ejemplo el espacio de funciones integrables o de las funciones de cuadrado integrable).

Podemos interpretar el mapeo $t \mapsto u(\cdot,t)$ como una trayectoria continua en E, de esta manera el problema de la ecuación del calor se trasforma en una ecuación diferencial ordinaria con valores en el espacio de Banach E:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \qquad t \geq 0, \\ u(0) &= x. \end{cases}$$

Si generalizamos esta idea y en lugar de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ consideramos un operador $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ con $x \in D(A)$ podemos naturalmente plantear el siguiente problema de valor inicial, llamado también problema abstracto de Cauchy (PCA):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u &= Au \qquad t \geq 0, \\ u(0) &= x. \end{cases}$$

En virtud del inciso (iii) del teorema 1.2.3, sabemos que si A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo entonces podemos resolver el problema y, además, la solución está dada por $u(t) := T(t)x$ donde $(T(t))$ es el semigrupo generado por A. Retomando el caso de la ecuación del calor en una dimensión, las soluciones $u(x,t)$ están determinadas por la conocida fórmula:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-z)^2/2t} f(z)dz.$$

Este ejemplo muestra que el operador A no necesita ser un operador acotado para que el problema tenga solución.

Esta fórmula se puede obtener por otros métodos y sin utilizar integración de Lebesgue ni teoría de semigrupos. Los detalles se pueden consultar en libros de ecuaciones diferenciales parciales (ver Evans [10] y Strauss [25]).

Con el ejemplo de la ecuación del calor observamos algunos puntos importantes. Primero, trasformar el problema original de la ecuación diferencial en un PCA. En segundo lugar, encontrar algunos criterios para saber si un operador lineal A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo y así poder resolver el PCA. En tercer lugar, responder las preguntas sobre unicidad de soluciones del PCA y en qué casos estará bien planteado.

1.3.1 Generación de C_0 semigrupos contractivos

Teorema de Hille-Yosida

En esta sección se presentan resultados que caracterizan a la clase de operadores lineales que generan un C_0 semigrupo contractivo.

Definición 1.3.1 (Resolvente)**.** Sea $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ operador lineal en un espacio de Banach E. Se define el conjunto resolvente de A como

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda I - A : D(A) \longrightarrow E \text{ tiene inversa continua e imagen densa en } E\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$ entonces el operador resolvente de A en λ se define como $R_\lambda(A) : E \longrightarrow E$

$$R_\lambda(A)x := (\lambda I - A)^{-1}x \quad \text{para } x \in E$$

Aunque originalmente el operador A está definido en $D(A)$ y no en todo E, la definición anterior de operador resolvente es correcta y la justifica el siguiente resultado.

Utilizamos la notación $\Im(A)$ para denotar a la imagen del operador A.

Teorema 1.3.1. *Sea $A : D(A) \longrightarrow E$ un operador lineal cerrado con dominio denso. Si $\lambda \in \rho(A)$ entonces el operador resolvente $R_\lambda(A)$ es un operador continuo bien definido en todo E.*

Demostración. Sea $\lambda \in \rho(A)$. $R_\lambda(A)$ es continuo por definición del operador resolvente y $D(R_\lambda(A)) = \Im(\lambda I - A)$, el cual es denso en E. Además por ser $R_\lambda(A)$ un operador acotado se cumple para toda $x \in D(A)$ la siguiente desigualdad:

$$\|x\| = \|R_\lambda(A)(\lambda I - A)x\| \leq \|R_\lambda(A)\|\|(\lambda I - A)x\|, \qquad (*)$$

es decir, existe $c > 0$ tal que $c\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$.

Sean $y \in E$, $(x_n) \subset D(A)$ y supongamos que $\lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = y$, o de manera equivalente que $y \in \overline{Im(\lambda I - A)}$. Como la sucesión $(\lambda I - A)x_n$ es convergente, entonces es acotada. Además, por la desigualdad anterior, la sucesión (x_n) también es acotada. Asimismo , como la sucesión $(\lambda I - A)x_n$ converge, entonces es una sucesión de Cauchy en E. Por la desigualdad $(*)$ y la linealidad del operador $\lambda I - A$ se satisface que la sucesión (x_n) también es sucesión de Cauchy y por lo tanto converge a un elemento $x_0 \in E$.

$(\lambda I - A)$ es un operador cerrado; por lo tanto $(\lambda I - A)x_0 = y$ y así $y \in \Im(\lambda I - A)$. De este modo, $E = \Im((\lambda I - A)) = D(R_\lambda(A))$. □

Observación. Si $\lambda \in \rho(A)$ entonces $\Im(\lambda I - A) = E$.

Observación. Como se satisface $A(\lambda I - A) = (\lambda I - A)A$ entonces se cumple también la igualdad $AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A$

Estas observaciones serán de utilidad demostraciones posteriores. En particular, se utilizarán en la demostración del teorema de existencia y unicidad de las soluciones del problema abstracto de Cauchy y para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2. *Sea A operador cerrado con dominio denso $D(A)$ y sean $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$
(ii) $R_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\mu(A)R_\lambda(A)$

Demostración. (i) Utilizando el resultado de la segunda observación del toerema 1.3.1 tenemos

$$R_\lambda(A) = R_\lambda(A)A(\mu I - A)R_\mu(A) = \mu R_\lambda(A)R_\mu(A) - AR_\lambda(A)R_\mu(A).$$

Análogamente, obtenemos la igualdad

$$R_\mu(A) = \lambda R_\lambda(A)R_\mu(A) - AR_\lambda(A)R_\mu(A).$$

Al restar ambas obtenemos la identidad buscada

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A).$$

(ii) La segunda afirmación se obtiene de forma directa pues

$$(R_\lambda(A)R_\mu(A))^{-1} = (R_\mu(A))^{-1}(R_\lambda(A))^{-1} =$$

$$(\mu I - A)(\lambda I - A) = (\lambda I - A)(\mu I - A) =$$

$$(R_\lambda(A))^{-1}(R_\mu(A))^{-1} = (R_\mu(A)R_\lambda(A))^{-1},$$

y por lo tanto se satisface que

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\mu(A)R_\lambda(A).$$

Obtenemos así la conclusión. □

Observación. La identidad (i) del teorema anterior se conoce como la ecuación del resolvente.

A continuación se presenta el conocido teorema de Hille-Yosida, el cual caracteriza los generadores infinitesimales de semigrupos contractivos.

Teorema 1.3.3 (Hille-Yosida)**.** *Sea A un operador lineal. A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo , $(T(t))$, si y sólo si*

(i) A es un operador cerrado y $D(A)$ es denso en E;
(ii) $(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ y para cada $\lambda > 0$

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{1.9}$$

Antes de pasar a la demostrar el teorema se presentan algunos lemas útiles.

Lema 1.3.3.1. *Sea A un operador lineal el cual satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema de Hille-Yosida; entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda(A)x = x, \quad x \in E \tag{1.10}$$

Demostración. Primero tomamos $x \in D(A)$ y mediante un calculo directo obtenemos la siguiente desigualdad

$$\|\lambda R_\lambda(A)x - x\| = \|\lambda R_\lambda(A)x - (\lambda I - A)R_\lambda(A)x\| = \|AR_\lambda(A)x\| \leq \|R_\lambda(A)\|\|Ax\| \leq \frac{\|Ax\|}{\lambda}.$$

Ahora bien, tomando límites cuando $\lambda \to \infty$ en la desigualdad anterior obtenemos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda(A)x = x.$$

Para el caso general $x \in E$, por ser $D(A)$ denso en E entonces existe una sucesión (x_n) en $D(A)$ tal que $x_n \to x$. Utilizando la desigualdad del triángulo obtenemos

$$\|\lambda R_\lambda(A)x - x\| \le \|\lambda R_\lambda(A)x - \lambda R_\lambda(A)x_n\| + \|\lambda R_\lambda(A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\|.$$

Por la convergencia de la sucesión (x_n), la continuidad del operador $\lambda R_\lambda(A)$, y la desigualdad anterior, si tomamos $\epsilon > 0$ obtenemos la desigualdad

$$\|\lambda R_\lambda(A)x - x\| \le \epsilon/2 + \|\lambda R_\lambda(A)x_n - x_n\|.$$

Tomando límite cuando $\lambda \to \infty$, por la igualdad ya demostrada obtenemos

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R_\lambda(A)x - x\| < \epsilon.$$

Con esto concluimos que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda(A)x = x$ para toda $x \in E$. Y así queda demostrada la afirmación. □

Lema 1.3.3.2. *Sea A un operador lineal que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema de Hille-Yosida. Para $\lambda > 0$ definimos el operador lineal $A_\lambda x := \lambda A R_\lambda(A)x$ con $x \in E$. Entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax, \quad x \in D(A). \tag{1.11}$$

Demostración. El resultado se obtiene directamente del lema anterior pues para $x \in D(A)$ se cumple

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda A R_\lambda(A)x = \lambda R_\lambda(A)Ax = Ax.$$

□

Observación. El operador A_λ definido en el lema anterior se conoce como *aproximación de Yosida* del operador A. Tal operador resulta ser acotado pues lo podemos escribir de la forma

$$A_\lambda = \lambda A R_\lambda(A) = (\lambda^2 I - \lambda^2 I + \lambda A)R_\lambda(A) = \lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I.$$

Lema 1.3.3.3. *Sea A un operador lineal que satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema de Hille-Yosida. Sea A_λ la aproximación de Yosida del operador A. Entonces A_λ genera un semigrupo contractivo, uniformemente continuo (e^{tA_λ}) y, además, para cada $x \in E$ y $\lambda, \mu > 0$ se cumple*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \le t\|A_\lambda x - A_\mu x\|. \tag{1.12}$$

Demostración. Como A_λ es un operador lineal acotado entonces la serie $e^{tA_\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A_\lambda^k}{k!}$ esta bien definida para todo $t \ge 0$. Además satisface las propiedades (i) y (ii) de la definición de semigrupos pues la función exponencial las satisface.

El semigrupo $T(t) := e^{tA_\lambda}$ es uniformemente continuo , es decir, $\lim\limits_{t\to 0+} \|T(t) - I\| = 0$ en la norma de operadores; esto se obtiene de la representación en serie de potencias e implica la propiedad (iii) de la definición de C_0 semigrupos.

También tenemos directamente de la representación en serie de potencias que

$$\frac{d}{dt}e^{tA_\lambda} = A_\lambda e^{tA_\lambda},$$

es decir, A_λ es generador infinitesimal del semigrupo $(T(t))$. Además se cumple

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R_\lambda(A)}\| \leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R_\lambda(A)\|} \leq 1,$$

para $t \geq 0$; por lo tanto $T(t)$ es un semigrupo contractivo.

Los operadores resolventes $R_\lambda(A)$ y $R_\mu(A)$ conmutan para todos los valores de $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Por la definición de las aproximaciones de Yosida, A_μ y A_λ también conmutan. Por la conmutatividad de las aproximaciones de Yosida y la representación en series de potencias, los operadores exponenciales e^{tA_λ} y e^{tA_μ} conmutan entre sí y conmutan con las aproximaciones de Yosida.

La desigualdad (1.11) se obtiene de la propiedad (iv) del teorema 1.2.3 y de considerar la siguiente función y su derivada. Sea $x \in E$ fijo; definimos el mapeo

$$s \mapsto e^{stA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x,$$

el cual es continuo, diferenciable y además su derivada cumple la siguiente identidad

$$\frac{d}{ds}(e^{stA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x) = t(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu})(A_\lambda - A_\mu)x.$$

Entonces calculamos

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| = \|\int_0^1 (\frac{d}{ds}(e^{stA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x))ds\| \leq \int_0^1 \|(\frac{d}{ds}(e^{stA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x))\|ds =$$

$$\int_0^1 \|t(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu})(A_\lambda - A_\mu)x\|ds \leq t\int_0^1 \|(A_\lambda - A_\mu)x\|ds = t\|(A_\lambda - A_\mu)x\|$$

Y con esto tenemos la identidad buscada.

□

Ahora pasamos a la demostración del teorema de Hille-Yosida.

Demostración del teorema de Hille-Yosida. Primero suponemos que A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo $(T(t))$. Por teorema 1.2.4, A es un operador cerrado y su dominio es denso. Por tanto satisface la condición (i) del teorema de Hille-Yosida.

Para $\lambda > 0$ y $x \in E$ definimos el siguiente operador lineal

$$S_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{1.13}$$

El operador está bien definido pues se tiene $\|T(t)\| \leq 1$ y la integral de la exponencial converge como integral impropia. Además se puede calcular una cota explícita para el operador S_λ:

$$\|S_\lambda x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|x\|dt = \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

Si aplicamos el operador A a $S_\lambda x$ tenemos por definición de generador infinitesimal

$$AS_\lambda x = \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(T(h)S_\lambda x - S_\lambda x);$$

asimismo, desarrollando la parte derecha de la igualdad tenemos

$$\frac{1}{h}(T(h)S_\lambda x - S_\lambda x) = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h) - T(t))$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds$$

$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds + \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds$$

$$= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds.$$

Si calculamos el límite cuando $h \to 0+$ de ambos lados de la igualdad obtenemos

$$AS_\lambda x = \lambda S_\lambda x - x,$$

lo cual es equivalente a

$$(A - \lambda I)S_\lambda x = x \quad \text{para toda } x \in E.$$

Por lo tanto $(A - \lambda I)S_\lambda = I$ y esto implica que $S_\lambda = R_\lambda(A)$ para $\lambda > 0$. Entonces se cumple que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$ y también la cota del resolvente

$$\|R_\lambda(A)\| \le \frac{1}{\lambda}.$$

Con esto hemos demostrado la afirmación (ii) y concluimos la primera parte de la demostración del teorema.

Para la segunda parte de la demostración suponemos que el operador A satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema. Sabemos que el operador A_λ es acotado y por lema 1.3.3.3 genera un semigrupo uniformemente continuo, $(e^{tA_\lambda})_{t\ge 0}$. Utilizaremos este semigrupo para construir el C_0 semigrupo que buscamos.

Sea $x \in D(A)$; por lema 1.3.3.3 y por desigualdad del triángulo tenemos la desigualdad siguiente:

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \le t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \le t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|. \tag{1.14}$$

Por desigualdad (1.13) y el lema 1.3.3.2 $\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \to 0$ cuando $\lambda, \mu \to \infty$, y por ser E espacio de Banach concluimos que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ existe para todo $x \in D(A)$.

Se definen los operadores

$$T(t)x := \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad \text{para } x \in D(A) \text{ y } t \ge 0.$$

Por la linealidad de e^{tA_λ} y la linealidad del límite, $T(t)$ resulta ser un operador lineal. Además por ser un semigrupo uniformemente continuo se cumple que

$$\|T(t)x\| = \|\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x\| = \lim_{\lambda\to\infty}\|e^{tA_\lambda}x\| \le \lim_{\lambda\to\infty}\|e^{tA_\lambda}\|\|x\| \le \|x\|,$$

y por lo tanto, $T(t)$ es un operador lineal acotado y de norma menor o igual a uno.

Por esta razón, si $x, y \in D(A)$, $\epsilon > 0$ y $\|x - y\| < \epsilon/2$ entonces $\|T(t)x - T(t)y\| \le \|x - y\| < \epsilon$, es decir, $T(t)$ es uniformemente continua en $D(A)$ para $t \ge 0$. Por un teorema de extensión de funciones uniformemente continuas en espacios métricos completos (ver

Dugundji [Dugu], teorema 5.2, capítulo XIV), podemos extender $T(t)$ de forma continua a todo el espacio E. Por la continuidad y la linealidad del operador $T(t)$ en $D(A)$ la extensión resulta ser lineal y acotada en E y sigue satisfaciendo la condición $\|T(t)\| \leq 1$.

Si $t \in [a, b] \subset [0, \infty)$ y $\mu \to \infty$, de la desigualdad (1.13) obtenemos

$$\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| \leq b\|A_\lambda x - Ax\|.$$

Esto muestra que $\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$, uniformemente en intervalos acotados.

Por la definición de $T(t)$ es claro que $T(0) = I$, y por ser (e^{tA_λ}) un semigrupo uniformemente continuo, se cumple también que

$$T(t)T(s)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}x =$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = T(t+s)x.$$

Como la función $t \mapsto T(t)x$ es localmente el límite uniforme de las funciones continuas $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$ entonces es continua y por lo tanto $T(t)$ es un C_0 semigrupo contractivo.

Resta demostrar que su generador infinitesimal es el operador A. Sea $x \in D(A)$; por el teorema 1.2.3 tenemos

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x - x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds$$

$$= \int_0^t \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Ax ds.$$

Si B es el generador infinitesimal de $(T(t))$, aplicando la definición 1.2.1 y la igualdad anterior obtenemos que, para $x \in D(A)$,

$$Bx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds = Ax,$$

y, por lo tanto, $D(A) \subseteq D(B)$ y los operadores coinciden en $D(A)$. Por ser B generador infinitesimal de un C_0 semigrupo satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema de Hille-Yosida, en particular $1 \in \rho(B)$ y por hipótesis se tiene también que $1 \in \rho(A)$.

Por lo demostrado en el teorema 1.3.1 se cumple que $\mathrm{Im}(I - A) = E$, es decir, $D(A)$ se mapea en E bajo $I - A$ y como $A = B$ en $D(A)$ también ocurre que $(I - B)D(A) = E$. Aplicando $R_1(B)$ de ambos lados tenemos $D(A) = D(B)$ y esto implica $A = B$. Por lo tanto A es generador infinitesimal de $(T(t))$.

$\square$

A ahora observamos algunos corolarios obtenidos de forma sencilla a partir del teorema de Hille-Yosida y los argumentos utilizados en su demostración.

Corolario 1.3.3.1. *Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo $(T(t))$ y A_λ la aproximación de Yosida de A, entonces:*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad \textit{para } x \in E$$

Corolario 1.3.3.2. *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo contractivo $(T(t))$. Entonces se cumplen:*

(i) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\} \subseteq \rho(A)$.

(ii) Para tales λ se cumple $\|R_\lambda(A)\| \leq \dfrac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}$.

Demostración. Por lemas anteriores los resolventes se pueden expresar en forma integral para $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, pues la integral

$$S_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds,$$

está bien definida y se cumple, según lo observado en la demostración del teorema de Hille-Yosida, que $S_\lambda = R_\lambda(A)$; por lo tanto si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y la estimación de la norma se obtiene de calcular una norma de la integral anterior.

□

Observación. Si $T(t)$ es un C_0 semigrupo que satisface $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ entonces la familia de operadores $S(t) := e^{-\omega t} T(t)$ forman un C_0 semigrupo contractivo. Si A es el generador infinitesimal de $(T(t))$ entonces $A - \omega I$ es el generador infinitesimal de $(S(t))$.

Corolario 1.3.3.3. *El operador A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo que satisface $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ si y sólo si:*

(i) A es operador cerrado y tiene dominio denso en E;
(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) = 0\ ,\ \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$

Teorema de Lumer-Phillips

En esta sección se presenta el resultado conocido como teorema de Lumer-Phillips. Este teorema caracteriza a los generadores infinitesimales de los C_0 semigrupos, el cual resulta de mucha utilidad en espacios de Hilbert y otros espacios como los espacios L^p, porque no es necesario realizar cálculos explícitos de las normas de los resolventes y eso será de particular importancia para las secciones siguientes.

Definición 1.3.2 (Mapeo de Dualidad)**.** Sea $x_0 \in E$; se define el conjunto o mapeo de dualidad $F(x_0)$ del punto x_0 como

$$F(x_0) := \{f \in E' : \|f\| = \|x_0\| \ y \ \langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2\}.$$

Como una consecuencia del teorema de Hahn-Banach siempre se cumple que $F(x_0) \neq \emptyset$. Sin embargo el conjunto $F(x_0)$ puede contener mas de un elemento. Un resultado conocido sobre el conjunto de dualidad es que si el espacio E es estrictamente convexo entonces el conjunto de dualidad contiene un único elemento (cf. Brezis [4]).

Un espacio E es estrictamente convexo si $\forall x, y \in E$, $\|x\| = 1 = \|y\|$ con $x \neq y$ y $\forall t \in (0,1)$, se cumple $\|tx + (1-t)y\| < 1$. Ejemplos de espacios estrictamente convexos son los espacios de Hilbert y los espacios L^p para $1 < p < \infty$.

Definición 1.3.3 (Operador disipativo)**.** Un operador lineal A en un espacio de Banach E es disipativo si para todo $x \in D(A)$ existe $f \in F(x)$ tal que $\mathrm{Re}(\langle Ax, f \rangle) \leq 0$.

Observación. En espacios de Hilbert, una consecuencia del teorema de representación de Riesz y de la convexidad estricta es que $x \in F(x)$ es el único elemento en el conjunto de dualidad; por lo tanto, en espacios de Hilbert un operador lineal A es disipativo si $\mathrm{Re}(\langle Ax, x\rangle) \leq 0$ para todo $x \in D(A)$. Esta identidad se suele utilizar como definición de operador disipativo en espacios de Hilbert.

Ejemplo

Consideremos el espacio de Hilbert $E = L^2([0,1];\mathbb{R})$ y el operador $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ donde $A(x) = \frac{d}{dt}x$ y $D(A) = \{x \in H^1([0,1];\mathbb{R}) : x(1) = 0\}$. Entonces,

$$\mathrm{Re}(\langle Ax, x\rangle) = \langle Ax, x\rangle = \int_0^1 x(t)\frac{d}{dt}x(t)dt = -\frac{1}{2}(x(0))^2 = 0$$

es decir, se cumple que la derivada, definida en un conjunto de funciones que satisfacen cierta condición de frontera, resulta ser un operador disipativo en el espacio $L^2([0,1];\mathbb{R})$.

Como el generador infinitesimal de un C_0 es un análogo de la derivada del semigrupo, este ejemplo nos sugiere que podría existir alguna relación entre el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo y la propiedad de ser disipativo.

A continuación se muestra una caracterización de los operadores disipativos.

Teorema 1.3.4. *Sea A un operador lineal; A es disipativo si y sólo si*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|, \qquad x \in D(A) \text{ y } \lambda > 0.$$

Demostración.

Suponemos que A es un operador disipativo. Sea $x \in D(A)$ y $\lambda > 0$. Si tomamos $f \in F(x)$ entonces se cumple que $\mathrm{Re}(\langle Ax, f\rangle) \leq 0$.

Además por propiedades del modulo complejo y la norma de operadores se cumple la siguiente desigualdad,

$$\mathrm{Re}(\langle(\lambda I - A)x, f\rangle) \leq |\langle(\lambda I - A)x, f\rangle| \leq \|f\|\|(\lambda I - A)x\| = \|x\|\|(\lambda I - A)x\|.$$

Dado que $f \in F(x)$ y $\mathrm{Re}(\langle Ax, f\rangle) \leq 0$ se cumple también

$$\mathrm{Re}(\langle(\lambda I - A)x, f\rangle) = \mathrm{Re}(\langle\lambda x, f\rangle) - \mathrm{Re}(\langle Ax, f\rangle) \geq \lambda\|x\|^2,$$

y, por lo tanto, se cumple la desigualdad buscada

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

Para demostrar la otra implicación tomamos $x \in D(A)$ y suponemos que se cumple la desigualdad $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|$ para todo $\lambda > 0$.

Tomemos $y_\lambda \in F((\lambda I - A)x)$ y definimos $z_\lambda := \frac{y_\lambda}{\|y_\lambda\|}$. Por construcción $z_\lambda \in B_{E^*}$, donde $B_{E^*} := \{x \in E^* : \|x\| \leq 1\}$ es la bola unitaria en E^*, el espacio dual de E. Además se cumple que

$$\lambda\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\| = \langle(\lambda I - A)x, z_\lambda\rangle = \mathrm{Re}(\langle(\lambda I - A)x, z_\lambda\rangle) =$$

$$\mathrm{Re}(\langle\lambda x, z_\lambda\rangle) - \mathrm{Re}(\langle Ax, z_\lambda\rangle) \leq |\langle\lambda x, z_\lambda\rangle| - \mathrm{Re}(\langle Ax, z_\lambda\rangle) \leq \lambda\|x\| - \mathrm{Re}(\langle Ax, z_\lambda\rangle).$$

Entonces tenemos la desigualdad

$$\lambda\|x\| \leq \lambda\|x\| - \mathrm{Re}(\langle Ax, z_\lambda\rangle).$$

Esto implica que $\text{Re}(\langle Ax, z_\lambda \rangle) \leq 0$ para $\lambda > 0$. Utilizando la desigualdad del triángulo y las ultimas dos desigualdades tenemos

$$\lambda\|x\| - \|Ax\| \leq \|(\lambda I - A)x\| \leq \lambda \text{Re}(\langle x, z_\lambda \rangle),$$

y, por lo tanto, se cumple

$$\|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \leq \text{Re}(\langle x, z_\lambda \rangle).$$

Por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki sabemos que B_{E^*} es compacta en la topología débil-estrella de E^*. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión (z_n) tiene una subsucesión convergente en B_{E^*}, $z_{n_j} \to z$, con $z \in B_{E^*}$. Tomando límites en la última desigualdad tenemos las siguientes desigualdades

$$\text{Re}(\langle Ax, z \rangle) \leq 0 \text{ y } \|x\| \leq \text{Re}(\langle x, z \rangle).$$

Por otra parte, se cumple también $\text{Re}(\langle x, z \rangle) \leq |\langle x, z \rangle| \leq \|x\|$ y por lo tanto $\text{Re}(\langle x, z \rangle) = |\langle x, z \rangle| = \|x\|$.

Si definimos $x^* := \|x\|z$, entonces $x^* \in F(x)$ y $\text{Re}(\langle Ax, x^* \rangle) \leq 0$ y por lo tanto el operador A es disipativo.

Y así concluimos la demostración del teorema. □

Teorema 1.3.5. *Sea A un operador disipativo con dominio $D(A)$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones*

(i) $\lambda I - A$ es inyectivo para $\lambda > 0$;
(ii) $\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}$ para $x \in \Im(\lambda I - A)$;
(iii) Si $\lambda I - A$ es suprayectivo para algun $\lambda > 0$ entonces es suprayectivo para todo $\lambda > 0$ y $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$.

Demostración.

(i) En virtud del teorema 1.3.4 si $x, y \in D(A)$ son tales que $(\lambda I - A)(x - y) = 0$ entonces se debe cumplir que $\|x - y\| = 0$ y, por lo tanto, $x = y$.

(ii) Si $x \in \Im(\lambda I - A)$ entonces por el inciso anterior $(\lambda I - A)^{-1}x$ está bien definido. Así por el teorema 1.3.4 se cumple que $\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}$

(iii) Sea $\lambda_0 > 0$ tal que $\Im(\lambda_0 I - A) = E$. Por el inciso anterior $(\lambda I - A)^{-1}x$ está definido para todo $x \in E$ y, además, $\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$. Por lo tanto $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Definimos el siguiente conjunto

$$\Lambda := \left\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \Im(\lambda I - A) = E\right\}.$$

Si $\alpha \in \Lambda$ podemos aplicar el argumento anterior para concluir que $\alpha \in \rho(A)$; por lo tanto, $\Lambda \subseteq \rho(A)$.

Además por ser $\rho(A)$ un conjunto abierto, si $\alpha \in \Lambda$ entonces existe una vecindad de α que tiene intersección no vacía y contenida en $\mathbb{R}^+$, es decir, Λ es abierto relativo a $\mathbb{R}^+$.

Observamos primero que $\lambda_0 I - A$ es operador cerrado. Tomamos una sucesión $(u_n) \subset D(A)$ tal que $u_n \to u$ para $u \in E$. Definimos la sucesión $v_n := (\lambda_0 I - A)u_n$ y suponemos que $v_n \to v$. Por la invertibilidad de $\lambda_0 I - A$ tenemos que $u_n = (\lambda_0 I - A)^{-1}v_n$, y por la continuidad del operador inverso tenemos $u = (\lambda_0 I - A)^{-1}v \in D(A)$; además $v = (\lambda_0 I - A)u$. Por lo tanto $\lambda_0 I - A$ es cerrado y de aquí se sigue que A es cerrado.

Sea $\lambda > 0$ y sea $(\lambda_n) \subset \Lambda$ una sucesión tal que $\lambda_n \to \lambda$. Para cada $\lambda_n \in \Lambda$ se cumple la condición $\Im(\lambda_n I - A) = E$. Entonces para $y \in E$ existe un $x_n \in D(A)$ tal que $(\lambda_n I - A)x_n = y$ y por el inciso anterior se satisface $\|x_n\| \leq \frac{\|y\|}{\lambda_n} \leq M$ para alguna $M > 0$, pues la sucesión (λ_n) está acotada por ser convergente.

Por lo tanto se cumplen las siguientes relaciones:

$$\lambda_m\|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| = \|\lambda_m x_n - y - Ax_n\| =$$

$$\|\lambda_m x_n - \lambda_n x_n + Ax_n - Ax_n\| = |\lambda_m - \lambda_n|\|x_n\| \leq M|\lambda_m - \lambda_n|,$$

y como $\lambda_n \to \lambda$, entonces $\frac{1}{\lambda_n} \to \frac{1}{\lambda}$. Por lo tanto $(\frac{1}{\lambda_n})$ está acotada y la desigualdad anterior implica que (x_n) es sucesión de Cauchy.

Sea $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Por construcción $(\lambda_n I - A)x_n = y$; entonces tomando límites se cumple que $y = \lambda x - Ax$ por ser A un operador cerrado y, por esta razón, $x \in D(A)$. Por lo tanto $y \in \Im(\lambda I - A)$. Así concluimos que $\lambda \in \Lambda$ y por lo tanto Λ es cerrado relativo a $\mathbb{R}^+$. Por hipótesis suponemos que el conjunto Λ es no vacío y como $\mathbb{R}^+$ es conjunto conexo concluimos que $\Lambda = \mathbb{R}^+$.

Por lo demostrado anteriormente obtenemos el resultado: $\mathbb{R}^+ = \Lambda \subseteq \rho(A)$

□

Observación. Si A es un operador lineal y $\lambda \in \rho(A)$ entonces tanto $\lambda I - A$ y A son operadores cerrados.

Teorema 1.3.6 (Teorema Lumer-Phillips)**.** *Sea A un operador lineal con dominio denso $D(A)$ en E. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) Si A es operador disipativo y existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $\Im(\lambda_0 I - A) = E$, entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo.

(ii) Si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo entonces el operador A es disipativo y $\Im(\lambda I - A) = E$ para todo $\lambda > 0$.

Demostración.

(i) Sea A un operador lineal y disipativo y sea $\lambda_0 > 0$ tal que $\Im(\lambda_0 I - A) = E$.

Por los teoremas 1.3.4 y 1.3.5 concluimos que $\lambda_0 \in \rho(A)$ y también que A es un operador cerrado. Por los incisos (ii) y (iii) del teorema 1.3.5 se cumplen $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$ y $\|(\lambda I - A)x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}$ para todo $x \in E$, por lo tanto se satisface la desigualdad $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para toda $\lambda > 0$. Por hipótesis, el dominio de A es denso; entonces por el teorema de Hille-Yosida concluimos que A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo.

(ii) Supongamos que A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo. Entonces por teorema de Hille-Yosida (teorema 1.3.3) se cumple que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$. Por el teorema 1.3.1 se cumplen $\Im(\lambda I - A) = E$ y también $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Eso implica que para $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $\lambda\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$ para todo $\lambda > 0$. Y entonces por el teorema 1.3.4, A es un operador disipativo.

□

Corolario 1.3.6.1. *Sea A un operador cerrado y con dominio denso en E. Si A y A^* son operadores disipativos entonces A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo.*

Demostración. Sea A un operador cerrado con dominio denso $D(A)$. Para demostrar que A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo, en virtud del inciso (i) del teorema de Lumer-Phillips, bastará demostrar que $\Im(I-A)=E$.

Primero probaremos que $\Im(I-A)\subseteq E$ es un subespacio cerrado. En efecto, si $y\in\Im(I-A)$ entonces existe $x\in D(A)$ tal que $x-Ax=y$. Como $D(A)$ es denso en E entonces existe una sucesión (x_n) en $D(A)$ tal que $x_n\to x$. Definimos la sucesión $y_n:=x_n-Ax_n$ y como A es cerrado, concluimos que $y_n\to y$. Por lo tanto $\Im(I-A)$ es cerrado.

Si $\Im(I-A)$ fuera denso en E entonces $\Im(I-A)=E$ y entonces por el inciso (i) del teorema de Lumer-Phillips, el operador A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.

Por otra parte, si suponemos que $\Im(I-A)$ no es denso en E, como es un subespacio cerrado, utilizamos el teorema de Hahn-Banach para construir un funcional lineal distinto de cero, $f\in E^*$, que se anula en $\Im(I-A)$, es decir, $\langle f,x-Ax\rangle=0$ o, de manera equivalente, f satisface $\langle f,x\rangle=\langle f,Ax\rangle$ para todo $x\in D(A)$.

De la igualdad obtenemos $\langle A^*f,x\rangle=\langle f,x\rangle$, lo que implica $\langle (I-A^*)f,x\rangle=0$ para toda $x\in D(A)$. Por teorema de Hahn-Banach concluimos que $(I-A^*)f=0$, pero por ser A^* operador disipativo, $f=0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Im(I-A)$ debe ser densa en E y así se cumple que $\Im(I-A)=E$.

Por teorema de Lumer-Phillips concluimos que por ser A disipativo y $\Im(I-A)=E$ entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.

□

Ahora se presenta un teorema que resultará importante en la aplicación de la teoría de semigrupos al estudio de ecuaciones diferenciales parciales en espacios de Hilbert. En el siguiente teorema se relacionan los generadores infinitesimales de un C_0 semigrupo cuando se cambia el producto interior del espacio de Hilbert por otro producto interior equivalente.

Definición 1.3.4 (Operador coercivo)**.** Un operador A en un espacio de Hilbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es coercivo si para todo $x\in H$, $\langle x,Ax\rangle\geq C\|x\|^2$ para alguna constante $C>0$.

Observación. De esta definición observamos que un operador coercivo resulta ser inyectivo pues $\langle x,Ax\rangle\geq C\|x\|^2$ implica que si $Ax=0$ entonces $x=0$. Por lo tanto un operador coercivo es invertible, es decir, existe un operador lineal $A^{-1}:\Im(A)\longrightarrow H$ tal que $A^{-1}Ax=x$ para todo $x\in H$ y $AA^{-1}y=y$ para $y\in\Im(A)$.

Teorema 1.3.7. *Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y sea P un operador lineal en H tal que P es autoadjunto y coercivo. Consideramos el producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_P:=\langle\cdot,P\cdot\rangle$ y al espacio de Hilbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle_P)$ lo denotamos como H_P. Entonces el operador lineal A con dominio $D(A)$ genera un C_0 semigrupo contractivo en H si y sólo si el operador lineal AP con dominio $D(AP):=\{x\in H: Px\in D(A)\}$ genera un C_0 semigrupo contractivo en H_P.*

Demostración. Por ser P autoadjunto, $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ está bien definido como producto interior y por ser P coercivo, se cumple que $\|P\|\|x\|^2\geq\langle x,x\rangle_P=\langle x,Px\rangle\geq C\|x\|^2$, con lo cual la norma $\|\cdot\|_P:=\sqrt{\langle x,x\rangle_P}$ resulta ser una norma equivalente a la norma $\|\cdot\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. Por lo tanto H_P es espacio de Hilbert.

Por la observación realizada después de la definición de operador coercivo tenemos que P tiene inversa con dominio en $\Im(P)$ y por ser además operador autoadjunto P^{-1} es también coercivo. Pues si $y\in\Im(P)$ entonces

$$\langle y,P^{-1}y\rangle=\langle Px,P^{-1}Px\rangle=\langle Px,x\rangle=\langle x,Px\rangle\geq C\|x\|^2=(\tfrac{C}{\|P\|^2})\|y\|^2.$$

También observamos que P^{-1} es acotado en $\Im(P)$. Pues si $y \in \Im(P)$ por coercitividad y por desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$C\|P^{-1}y\|^2 \leq \langle P^{-1}y, PP^{-1}y\rangle = \langle P^{-1}y, y\rangle \leq \|P^{-1}y\|\|y\|.$$

Esto implica que $\|P^{-1}y\| \leq C_2\|y\|$ y, por lo tanto P^{-1} es un operador acotado.

Para la demostración del teorema primero suponemos que el operador A con dominio denso $D(A)$ genera un C_0 semigrupo en H.

Por teorema de Lumer-Phillips, A es un operador disipativo. Además, notamos que AP es disipativo en H_P, pues si $y \in D(AP)$ entonces

$$\mathrm{Re}(\langle y, APy\rangle_P) = \mathrm{Re}(\langle y, PAPy\rangle) = \mathrm{Re}(\langle Py, APy\rangle) \leq 0,$$

ya que $y \in D(AP)$ si y sólo si $Py \in D(A)$.

Además AP es un operador lineal y cerrado pues A y P son operadores lineales cerrados. Asimismo, el dominio $D(AP)$ es denso.

Para aplicar el corolario anterior falta demostrar que $(AP)^*$ es disipativo también en H_P. Primero observamos que

$$\langle x, Ax\rangle = \langle A^*x, x\rangle = \overline{\langle x, A^*x\rangle};$$

entonces

$$\mathrm{Re}(\langle x, Ax\rangle) = \mathrm{Re}(\overline{\langle x, A^*x\rangle}) = \mathrm{Re}(\langle x, A^*x\rangle) \leq 0.$$

Por lo tanto A^* es disipativo para x en el dominio adecuado.

Por la definición de operador adjunto en un espacio de Hilbert, un elemento $z \in H_P$ cumple $z \in D((AP)^*)$ si y sólo si existe $w \in H_P$ tal que $\langle z, APx\rangle_P = \langle w, x\rangle_P$ para todo $x \in D(AP)$, lo que es equivalente a $\langle Pz, APx\rangle = \langle w, Px\rangle$. Como $x \in D(AP)$ si y sólo si $Px \in D(A)$ entonces la última igualdad se cumple si y sólo si $\langle Pz, Ay\rangle = \langle w, y\rangle$ para todo $y \in D(A)$, lo cual también es equivalente a que $Pz \in D(A^*)$ y $w = (AP)^*z$.

Lo anterior se resume en que $z \in D((AP)^*)$ si y sólo si $Pz \in D(A^*)$ y $(AP)^*z = A^*Pz$. Y con esto ya podemos verificar que $(AP)^*$ es disipativo:

$$\mathrm{Re}(\langle x, (AP)^*x\rangle_P) = \mathrm{Re}(\langle x, PA^*Px\rangle) = \mathrm{Re}(\langle Px, P^*Px\rangle) \leq 0$$

pues como $x \in D((AP)^*)$ entonces $Px \in D(A^*)$, y utilizamos el hecho de que A^* es disipativo. Así obtenemos que $(AP)^*$ es un operador disipativo. Y utilizando el corolario 1.3.6.1 tenemos que AP es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo.

Para la otra implicación observamos que P^{-1} es coercivo y autoadjunto, y que $A = APP^{-1}$, y aplicamos la primera implicación.

□

1.3.2 Teorema general de generación de semigrupos

En la sección anterior se demostraron algunos resultados que caracterizan la generación de un C_0 semigrupo contractivo. En esta sección se generalizan algunos de esos resultados para caracterizar la generación de C_0 semigrupos arbitrarios en $(E, \|\cdot\|)$.

Primero comenzamos con la generación de semigrupos uniformemente acotados, es decir, $\|T(t)\| \leq M$, para $t \geq 0$. Para ello se presenta el siguiente lema técnico que muestra como introducir una norma equivalente en E con la cual $(T(t))$ resulta ser C_0 semigrupo contractivo.

Lema 1.3.7.1. *Sea A un operador lineal tal que $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$. Si se cumple*

$$\|\lambda^n R_\lambda^n(A)\| \leq M \qquad \textit{para } \lambda > 0 \textit{ y todo } n = 1,2,3,\cdots \tag{1.15}$$

entonces existe una norma $\|\cdot\|'$ equivalente a la norma original $\|\cdot\|$ la cual satisface:

(i) $\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$;
(ii)$\|\lambda R_\lambda x\|' \leq \|x\|'$ para todo $x \in E$ y $\lambda > 0$.

Demostración. Sean $\mu > 0$ y $x \in E$. Definimos entonces la siguiente norma

$$\|x\|_\mu := \sup_{n\geq 0}\left\{\|\mu^n R_\mu^n(A)x\|\right\}.$$

Por la definición y las propiedades del supremo de un conjunto de numeros reales, esta función es realmente una norma. Además por las hipótesis del teorema se satisface, en primer, lugar la desigualdad

$$\|\mu^n R_\mu^n(A)x\| \leq \|\mu^n R_\mu^n(A)\|\|x\| \leq M\|x\|, \quad \text{para } \mu > 0.$$

Por lo tanto también se cumple

$$\|x\|_\mu = \sup_{n\geq 0}\left\{\|\mu^n R_\mu^n(A)x\|\right\} \leq M\|x\| \quad \text{para todo } x \in E.$$

Ademas como $\mu^0 = 1$ y $R_\mu^0(A) = I$ entonces $\|x\| \in \left\{\|\mu^n R_\mu^n(A)x\|\right\}$ y, además,

$$\|x\| \leq \sup_{n\geq 0}\left\{\|\mu^n R_\mu^n(A)x\|\right\} = \|x\|_\mu \quad \text{para todo } x \in E.$$

En consecuencia tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\| \qquad \text{para todo } x \in E \text{ y } \mu > 0.$$

Por la definición de la norma $\|\cdot\|_\mu$ y por propiedades del supremo se cumple $\|\mu R_\mu(A)\|_\mu \leq 1$, en virtud de que

$$\|\mu R_\mu(A)x\|_\mu = \sup_{n\geq 0}\left\{\|\mu^n R_\mu^n(A)\mu R_\mu(A)x\|\right\} = \sup_{n\geq 0}\left\{\|\mu^{n+1} R_\mu^{n+1}(A)x\|\right\}$$

$$\leq \sup_{n\geq 0}\left\{\|\mu^n R_\mu^n(A)x\|\right\} = \|x\|_\mu.$$

Por tanto tenemos $\|\mu R_\mu(A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ para toda $x \in E$, es decir, $\|\mu R_\mu(A)\| \leq 1$.

Además observamos que se cumple la siguiente desigualdad

$$\|\lambda R_\lambda(A)\|_\mu \leq 1 \qquad \text{para } 0 < \lambda \leq \mu.$$

Sea $y = R_\lambda(A)x$; utilizando las propiedades de los resolventes del teorema 1.3.2 podemos escribir

$$R_\lambda(A)x - R_\mu(A)x = (\mu-\lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A)x, \text{ y}$$

$$y = R_\mu(A)x + (\mu-\lambda)R_\mu(A)y = R_\mu(A)(x + (\mu-\lambda)y).$$

Así

$$\|\mu R_\lambda(A)x\|_\mu = \|\mu y\|_\mu \leq \|x + (\mu-\lambda)y\|_\mu \leq \|x\|_\mu + (\mu-\lambda)\|y\|_\mu,$$

siempre y cuando $0 < \lambda \leq \mu$. Esto implica que

$$\|\lambda R_\lambda(A)x\|_\mu = \|\lambda y\|_\mu \leq \|x\|_\mu.$$

Concluimos que $\|\lambda R_\lambda(A)\|_\mu \leq 1$ si $0 < \lambda \leq \mu$.

De las desigualdes anteriores tenemos

$$\|\lambda^n R_\lambda^n(A)x\| \leq \|\lambda^n R_\lambda^n(A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad \text{para } 0 < \lambda \leq \mu,$$

y tomando supremos obtenemos

$$\|x\|_\lambda = \sup_{n\geq 0}\{\|\lambda^n R_\lambda^n(A)x\|\} \leq \sup_{n\geq 0}\left\{\|\mu^n R_\mu^n(A)x\|\right\} = \|x\|_\mu.$$

Si definimos

$$\|x\|' := \lim_{\mu\to\infty} \|x\|_\mu$$

entonces la desigualdad $\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$ implica que $\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$; asimismo, la desigualdad $\|\lambda R_\lambda(A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ implica que $\|\lambda R_\lambda(A)x\|' \leq \|x\|'$ para $0 < \lambda < \infty$, y con esto concluimos el resultado buscado.

□

Observación. Al ser $\|\cdot\|'$ una norma equivalente a $\|\cdot\|$ en el espacio de Banach E, las topologías inducidas por ambas normas son equivalentes, es decir, los abiertos de una topología son también abiertos de la otra topología. Por lo tanto las propiedades topológicas no cambian al estudiar E con la nueva norma $\|\cdot\|'$. Únicamente cambiarán algunas de las propiedades asociadas a la métrica inducida por ambas normas.

Ahora pasamos a la primera generalización del teorema de Hille-Yosida.

Teorema 1.3.8. *Un operador lineal A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo, $(T(t))_{t\geq 0}$, que satisface $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \leq 0$ y $M \geq 1$ si y sólo si satisface las siguientes propiedades*

(i) A es cerrado y con dominio denso;
(ii) $\rho(A) \subseteq (0, +\infty)$;
(iii) $\|R_\lambda^n(A)\| \leq \frac{M}{\lambda^n}$ para $\lambda > 0$ y todo $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Demostración. Sea $(T(t))_t$ un C_0 semigrupo uniformemente acotado, $\|T(t)\| \leq M$ en $(E, \|\cdot\|)$. Si cambiamos la norma y estudiamos la familia de operadores $(T(t))$ en E con otra norma equivalente, la familia sigue siendo un semigrupo de operadores pues esto es una propiedad algebraica que no depende de la norma y, por la observación del lema anterior, el semigrupo es fuertemente continuo también con la nueva norma.

$\Rightarrow$] Suponemos primero que A es el generador infinitesimal de $(T(t))$ y $\|T(t)\| \leq M$.
Definimos la norma $|x| := \sup_{t\geq 0}\{\|T(t)x\|\}$. Por ser $(T(t))$ un semigrupo uniformemente acotado y por propiedades del supremo tenemos

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|.$$

Esto implica que $|\cdot|$ es norma equivalente a $\|\cdot\|$. Por lo tanto $(T(t))$ es un C_0 semigrupo en $(E, |\cdot|)$. Además observamos que

$$|T(t)x| = \sup_{s\geq 0}\{\|T(s)T(t)x\|\} = \sup_{s\geq 0}\{\|T(t+s)x\|\} \leq \sup_{s\geq 0}\{\|T(s)x\|\} = |x|,$$

para todo $x \in E$ y todo $t \geq 0$. Por lo tanto $|T(t)| \leq 1$, es decir, $(T(t))$ es un C_0 semigrupo contractivo en $(E, |\cdot|)$. Entonces por el teorema de Hille-Yosida, A es cerrado, el dominio de A es denso, $\rho(A) \subseteq (0, +\infty)$ y, además, $|R_\lambda(A)| \leq \frac{1}{\lambda}$, obteniendo de este modo $|\lambda^n R_\lambda^n(A)| \leq 1$. Esta desigualdad y la desigualdad anterior con permiten deducir,

$$\|R_\lambda^n(A)x\| \leq |R_\lambda^n(A)x| \leq |x| \leq \frac{M}{\lambda^n}\|x\|,$$

por lo que $\|R_\lambda^n(A)\| \leq \frac{M}{\lambda^n}$.

Así quedan demostradas las afirmaciones (i), (ii) y (iii).

$\Leftarrow]$

Si se satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) del teorema entonces por el lema anterior existe una norma $\|\cdot\|'$ equivalente a la norma $\|\cdot\|$ en E, la cual satisface $\|R_\lambda(A)\|' \leq \frac{1}{\lambda}$. Entonces por teorema de Hille-Yosida, A es generador de un C_0 semigrupo contractivo en $(E, \|\cdot\|')$.

Cuando regresamos a la norma original se cumplen las desigualdades

$$\|T(t)x\| \leq \|T(t)x\|' \leq \|x\|' \leq M\|x\| \ .$$

Por lo tanto $\|T(t)\| \leq M$. Esto concluye la demostración.

□

Observación. Para el caso general de un C_0 semigrupo $(T(t))$ por teorema 1.2.1 existen constantes $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tales que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

Si definimos la familia de operadores $(S(t))$ como $S(t) := e^{-\omega t}T(t)$, resulta que $(S(t))$ es un C_0 semigrupo uniformemente acotado, pues $S(0) = I$, $S(s)S(t) = e^{-\omega s}T(s)e^{-\omega t}T(t) = e^{-\omega(s+t)}T(s+t) = S(s+t)$, $\lim_{t\to 0} S(t)x = x$ y además $\|S(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$.

Se cumple además que A es generador infinitesimal de $(T(t))$ si y sólo si $A - \omega I$ es generador infinitesimal de $(S(t))$.

Si A es generador infinitesimal de $(T(t))$ y calculamos el generador infinitesimal de $(S(t))$ obtenemos

$$\lim_{t\to 0+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{e^{-\omega t}T(t)x - x}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0+} [(T(t)x - \omega T(t)x + \omega^2 tT(t)x - \omega^3 t^2 T(t)x + - \cdots) - x] = Ax - \omega x.$$

Por lo tanto, el generador infinitesimal de $(S(t))$ es $A - \omega I$. La implicación contraria es completamente análoga.

De este modo, el caso de un semigrupo general siempre se puede reducir al caso uniformemente acotado y únicamente necesitamos estudiar los generadores infinitesimales de la forma $A - \omega I$.

Teorema 1.3.9. *Un operador lineal A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo,$(T(t))$, que satisface $\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}$, con $M \geq 1$ y $\omega > 0$, si y sólo si*

(i) A es operador cerrado y con dominio denso;
(ii) $\rho(A) \subseteq (\omega, +\infty)$;
(iii) $\|R_\lambda^n(A)\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$, para $\lambda > \omega$ y todo $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Demostración. Suponemos primero que A es generador infinitesimal de $(T(t))$. Por la observación anterior sabemos que A es generador infinitesimal de $(T(t))$ si y sólo si $A - \omega I$ es generador infinitesimal del semigrupo uniformemente acotado $(e^{-t\omega}T(t))$, y esto ocurre si y sólo si $A - \omega I$ satisface las condiciones del teorema 1.3.8.

$A - \omega I$ es cerrado si y sólo si A es cerrado, pues la suma de operadores cerrados es un operador cerrado. También se cumple que el dominio de $A - \omega I$ es $D(A)$ y es denso. Además por teorema de Hille-Yosida tenemos

$$(0, +\infty) \subseteq \rho(A - \omega I).$$

Si $\alpha \in (0, +\infty)$ entonces el operador

$$(\alpha I - (A - \omega I)) = ((\alpha + \omega)I - A)$$

es invertible, y por esta razón se cumple que

$$R_\alpha(A - \omega I) = R_{\omega+\alpha}(A). \tag{1.16}$$

De esta manera $\alpha + \omega \in \rho(A)$, lo cual implica $(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$.

Si $\lambda \in (\omega, +\infty)$ entonces utilizando la identidad (1.15) y el teorema de Hille-Yosida tenemos la siguiente desigualdad

$$\|R_\lambda^n(A)\| = \|R_{\lambda-\omega}^n(A - \omega I)\| \leq \tfrac{M}{(\lambda-\omega)^n}.$$

Con esto concluimos la primera parte de la demostración.

La segunda parte es completamente análoga debido a la observación del teorema 1.3.8 y al teorema de Hille-Yosida.

□

Observación. En la demostración del teorema de Hille-Yosida (teorema 1.3.3) notamos que los resolventes de un generador infinitesimal A se puede representar en forma integral de la siguiente manera

$$R_\lambda(A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)x d\tau \qquad \text{para } \lambda > 0.$$

Pero por la forma de la integral sabemos que converge también para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Y en el argumento de la demostración nada cambia por el hecho de que $\lambda \in \mathbb{C}$ en lugar de suponerlo real, por lo tanto la integral anterior representa también los resolventes $R_\lambda(A)$ para números complejos que satisfacen $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, es decir, $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\} \subseteq \rho(A)$.

Las estimaciones de las normas de los resolvente cambian a la forma

$$\|R_\lambda^n(A)\| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}(\lambda-\omega)^n}.$$

1.4 Problema de Cauchy abstracto

Retomamos ahora el problema de Cauchy formulado antes para funciones con valores en un espacio de Banach $u : [0, \infty) \longrightarrow E$.

Definición 1.4.1 (Problema de Cauchy abstracto)**.**

(i) El problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) &= Ax, \qquad t \geq 0, \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

s llamado el problema de Cauchy abstracto (PCA) asociado a $(A, D(A))$ y x es su valor inicial.

(ii) Una función $u : [0, \infty) \longrightarrow E$ es llamada solución clásica del PCA si es diferenciable, $u(t) \in D(A)$ para $t \geq 0$ y el problema de valor inicial (PCA) se satisface.

(iii) Una función continua $u : [0, \infty) \longrightarrow E$ es llamada solución moderada (ó mild solution" en inglés) del PCA si $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ para $t \geq 0$, y además

$$u(t) = A\int_0^t u(s)ds + x$$

Observación. Por los resultados del teorema 1.2.3 si la condición inicial satisface $x \in D(A)$ entonces el concepto de solución clásica y solución moderada o solución "mild" coinciden.

Teorema 1.4.1. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $(T(t))$. Entonces para cada $x \in E$ la función $u : [0, \infty) \longrightarrow E$, $u(t) := T(t)x$ para $t \geq 0$ es la única solución moderada del PCA asociado a $(A, D(A))$.*

Demostración. Primero observamos que para $x = 0$ la única solución es $u = 0$. Sea u una solución moderada que satisface $u(0) = 0$ y sea $t > 0$ para $s \in (0, t)$ consideramos la siguiente función y su derivada. Utilizando los resultados del teorema 1.2.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(T(t-s)\int_0^s u(\tau)d\tau) &= T(t-s)u(s) - T(t-s)A\int_0^s u(\tau)d\tau \\ &= T(t-s)u(s) - T(t-s)u(s) = 0; \end{aligned}$$

entonces integrando en $(0, t)$ tenemos

$$\int_0^t (\frac{d}{ds}(T(t-s)\int_0^s u(\tau)d\tau))ds = \int_0^t u(\tau)d\tau = 0.$$

La integral de u existe por la hipótesis de ser solución moderada y, como estamos considerando integración de Lebesgue, entonces $u = 0$ ó a.e en $[0, t)$. Pero como t es arbitrario se debe cumplir que $u = 0$ a.e, por lo tanto la función cero es la única solución.

Para el caso general se sigue del caso anterior y la linealidad del operador A. Si $x \in E$ es la condición inicial, por ser generador infinitesimal de $(T(t))$ la función $u_1(t) = T(t)x$ es solución moderada por los resultados del teorema 1.2.3. Si $u_2(t)$ es otra solución que satisface $u_2(0) = x$ entonces $u_1 - u_2$ es también solución moderada pero con condición incial $x = 0$ y por el caso anterior $u_1 = u_2$. Por lo tanto $u(t) = T(t)x$ es la única solución moderada del PCA con condición inicial x.

□

Observación. Para el caso cuando $x \in D(A)$ la solución $u(t) = T(t)x$ es de hecho una solución clásica; por lo tanto si A es generador infinitesimal el PCA tiene solución clásica única.

El teorema anterior muestra la importancia de que el operador A sea generador infinitesimal de un C_0 semigrupo, pues esto nos permite resolver el problema de existencia y unicidad para las soluciones del PCA. A partir de ahora por solución del PCA se entenderá una solución clásica del PCA.

El siguiente teorema será uno de los resultados más importantes de la teoría de semigrupos para este trabajo, ya que demuestra la relación entre el problema abstracto de Cauchy y un semigrupo. Asimismo, nos permite transformar un problema de ecuaciones diferenciales parciales en un problema de semigrupos.

Teorema 1.4.2. *Sea A un operador lineal densamente definido con dominio $D(A) \subseteq E$ y $\rho(A) \neq \emptyset$. El PCA asociado a $(A, D(A))$ tiene solución única $u(t)$, continuamente diferenciable en $(0, \infty)$ para cada valor de $x \in D(A)$ si y sólo si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.*

Demostración.

$\Longleftarrow$]

Si A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ y $x \in D(A)$, por el teorema 1.2.3, $u(t) := T(t)x$ es solución clásica del PCA; además por el teorema anterior tal solución es única.

$\Longrightarrow$]

Supongamos que el PCA tiene solución única para cada $x \in D(A)$. Queremos construir un semigrupo que tenga como generador infinitesimal al operador A.

Sea $x \in D(A)$. Denotamos por $u(t : x)$ la solución del PCA con condición inicial x, es decir, $u'(t : x) = Au(t : x)$ y $u(0 : x) = x$.

Por hipótesis se cumple que $\rho(A) \neq \emptyset$; por lo tanto existe $\lambda_0 \in \rho(A)$. Entonces por la demostración y la observación del teorema 1.3.5 se cumple que A es un operador cerrado. Utilizando el teorema de la gráfica cerrada y el hecho de que todo subconjunto cerrado de un espacio de Banach es completo obtenemos que $(D(A), |\cdot|)$ es un espacio de Banach, en donde $|x| := \|x\| + \|Ax\|$ es la norma de la gráfica y $\|\cdot\|$ denota la norma de E.

Sea $T > 0$, denotamos por $C_{D(A)} := C([0, T] : D(A))$ a las funciones continuas con dominio en $[0, T]$ e imagen en $D(A)$. Y definimos también el siguiente mapeo,

$$\begin{aligned} S : D(A) &\longrightarrow C_{D(A)} \\ x &\mapsto u(t, x), \end{aligned}$$

el cual asigna, a cada condición inicial, la solución correspondiente del PCA. Por las hipótesis que estamos considerando en el teorema, el mapeo S está bien definido y por la linealidad del problema de Cauchy el mapeo resulta ser lineal e inyectivo.

Al espacio $C_{D(A)}$ lo dotamos con la norma infinito correspondiente para que tenga estructura de espacio de Banach. Definimos su norma infinito

$$\|v\|_\infty := \sup \{|v(t : x)| : t \in [0, T]\}.$$

Demostraremos que el operador lineal S es cerrado en la norma infinito.

Al trabajar con el operador A en el espacio de Banach $D(A)$ debemos restringir el dominio del operador para que tenga sentido $A : D(A) \longrightarrow D(A)$ como operador lineal bien definido. Su nuevo dominio resulta ser

$$D(A^2) := \{x \in D(A) | A(x) \in D(A)\}.$$

Usando el hecho de que $R_{\lambda_0}(A)$ es biyectivo, continuo y que la imagen de $D(A)$ bajo el mapeo $R_{\lambda_0}(A)$ está contenido en $D(A^2)$, se deduce que $D(A^2)$ es denso en E.

Sea $(x_n) \in D(S)$ una sucesión tal que $x_n \to x$ en $D(A)$ y $S(x_n) \to v$ en $C_{D(A)}$. Como $D(A) = D(S)$ y $D(A)$ es espacio de Banach tenemos inmediatamente que $x \in D(S)$. Resta demostrar que $S(x) = v$.

Por ser solución podemos escribir

$$S(x_n) = u(t : x_n) = x_n + \int_0^t Au(s : x_n)ds,$$

y utilizando la convergencia de las sucesiones $x_n \to x$ y $s(x_n) \to v$ y el hecho de que A es operador cerrado tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n)(t) = x + \int_0^t Av(s)ds = v(t) \quad \text{para} \ \ t \in [0, T].$$

Claramente se cumple $v'(t) = Av(t)$ y $v(0) = x$; por lo tanto $v(t)$ es solución del PCA con condición inicial igual a x. Por la unicidad de las soluciones tenemos que $v(t) = u(t : x)$ y con esto concluimos que S es operador lineal cerrado. Como el dominio de S es el espacio $D(A)$ completo, entonces usando el teorema de la gráfica cerrada concluimos que S es operador acotado. Por esta razón existe $C_1 > 0$ tal que $\|u(t : x)\|_\infty \leq C_1|x|$.

Definimos para $t \geq 0$ el mapeo

$$\begin{aligned} T(t) : D(A) &\longrightarrow D(A) \\ x &\mapsto u(t : x). \end{aligned}$$

Este mapeo asigna a cada condición inicial x el valor de la solución del problema de Cauchy evaluada en el tiempo t.

Por la linealidad del problema de Cauchy, la combinación lineal de soluciones es solución. Por lo tanto se cumple que $T(t)$ es operador lineal:

$$T(t)(\alpha x + y) = u(t : \alpha x + y) = \alpha u(t : x) + u(t : y) = \alpha T(t)x + T(t)y.$$

Además $T(0) = I$ y se satisface

$$T(t)T(s)x = T(t)u(s : x) = u(t : u(s : x)) = u(t + s : x) = T(t + s)x,$$

en virtud de que se cumplen $\frac{d}{dt}u(t + s) = Au(t + s : x)$ y $u(0 + s : x) = u(s : x)$. Por lo tanto hemos demostrado que se satisface la propiedad de semigrupo,

$$T(t)T(s) = T(t + s).$$

Además, como $u(t : x)$ es continua en t, entonces $T(t)$ es fuertemente continuo, es decir, $\lim\limits_{t\to 0+} T(t)x = x$.

Si fijamos $t_0 > 0$ se cumple que

$$|T(t)x| = |u(t : x)| \leq \|u(\cdot : x)\|_\infty \leq C_1|x|, \quad \text{para } t \in [0, t_0]$$

y esto implica que $\|T(t)\| \leq C_1$. Así, $T(t)$ es uniformemente acotado para $t \in [0, t_0]$. Utilizando el mismo argumento empleado en la demostración del teorema 1.2.1 obtenemos que existen constantes $M > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tales que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para $t \geq 0$. Por lo tanto $(T(t))_{t\geq 0}$ es un C_0 semigrupo en $D(A)$.

Sea $y \in D(A^2)$. Definimos la función v como sigue:

$$v(t) := y + \int_0^t u(s : Ay)ds.$$

Por teorema fundamental del cálculo, usando la forma de las soluciones del PCA y además utilizando que A es un operador lineal cerrado resulta que la función v satisface la siguiente igualdad

$$v'(t) = u(t, Ay) = Ay + \textstyle\int_0^t Au(s : Ay)ds = A(y + \int_0^t u(s : Ay)ds) = Av(t),$$

es decir, v es la solución del problema de Cauchy y satisface la condición inicial $v(0) = y$. Por lo tanto $v(t) = u(t : y)$. Con esto observamos que

$$T(t)Ay = u(t : Ay) = Au(t : y) = AT(t)y.$$

Así, $AT(t) = T(t)A$ para $t \geq 0$ en $D(A^2)$.

Sea $y \in D(A^2)$ y definimos $x := (\lambda_0 I - A)y \in D(A)$. Utilizando las desigualdades anteriores tenemos la siguiente desigualdad

$$\|T(t)x\| = \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \leq \|\lambda_0 T(t)y\| + \|AT(t)y\| \leq C_2|T(t)y| \leq C_2 Me^{\omega t}|y|.$$

Dado que $y = R_{\lambda_0}(A)x$ obtenemos que $\|y\| \leq \|R_{\lambda_0}(A)\|\|x\|$.

Por otra parte

$$\|Ay\| = \|\lambda_0 y - x\| \leq |\lambda_0|\|y\| + \|x\| \leq (|\lambda_0|\|R_{\lambda_0}(A)\| + 1)\|x\|,$$

y, por lo tanto $|y| \leq C_3\|x\|$. Por la desigualdad anterior tenemos $\|T(t)x\| \leq C_4 e^{\omega t}\|x\|$ para todo $x \in D(A)$. Por lo tanto $(T(t))$ forman un C_0 semigrupo de operadores acotados en $D(A)$.

Por densidad de $D(A)$ podemos extender por continuidad de forma única los operadores $T(t)$ a todo E. Preservando la propiedad de ser C_0 semigrupo.

Únicamente falta demostrar que, en efecto, el generador infinitesimal de $(T(t))$ es el operador lineal A. Sea $(B, D(B))$ el generador infinitesimal de $(T(t))$; sabemos por teorema 1.2.4 que B es operador cerrado y $D(B)$ es denso en E.

Si tomamos $x \in D(A)$ entonces tenemos que $T(t)x = u(t : x)$ y por lo tanto se cumple

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x.$$

En particular se satisface la siguiente igualdad:

$$Bx = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} = T'(0)x = Ax.$$

Por lo tanto $D(A) \subseteq D(B)$ y $B|_{D(A)} \equiv A$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisface $\lambda > \omega$ y $y \in D(A^2)$. Como $T(t)$ y A conmutan, para cada y se cumple la siguiente igualdad:

$$e^{-\lambda t}AT(t)y = e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)By.$$

Integrando ambos lados de la igualdad tenemos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t) y d\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) By d\lambda.$$

Por el argumento presentado en la demostración del teorema de Hille-Yosida (teorema 1.3.3), por la igualdad anterior, y utilizando que A es operador cerrado, tenemos que

$$AR_\lambda(B)y = R_\lambda(B)By = BR_\lambda(B)y,$$

para todo $y \in D(A^2)$.

También sabemos que $BR_\lambda(B) = \lambda R_\lambda(B) - I$ es un operador acotado. Por ser $D(A^2)$ denso, si tomamos $x \in E$ entonces existe una sucesión $(x_n) \subset D(A^2)$ tal que $x_n \to x$. Por la igualdad ya demostrada se cumple que $AR_\lambda(B)x_n = BR_\lambda(B)x_n$. Tomando límite de ambos lados y usando que A es cerrado tenemos la siguiente igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} AR_\lambda(B)x_n = AR_\lambda(B)x = \lim_{n\to\infty} BR_\lambda(B)x_n = BR_\lambda(B)x.$$

Así concluimos que $AR_\lambda(B)y = BR_\lambda(B)y$ para todo $y \in E$.

Sea $z \in D(B)$; como $R_\lambda(B)$ es biyectivo existe $w \in E$ tal que $z = R_\lambda(B)w$. Entonces se cumple

$$Bz = BR_\lambda(B)w = AR_\lambda(B)w = Az.$$

De esta forma $D(B) \subseteq D(A)$ y $A \equiv B$, $D(A) = D(B)$. Así concluimos que A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo. Con esto terminamos la demostración del teorema. $\square$

Observación. En la demostración anterior observamos que el funcional S es acotado para $t_0 > 0$ fijo. También observamos que la norma de la gráfica es equivalente a la norma de E en $D(A)$ y por lo tanto se cumple que

$$\|u(t:x)\| \leq \|u(\cdot:x)\|_\infty \leq C\|x\|, \quad \text{en } [0, t_0].$$

Por la linealidad del problema de Cauchy se cumple la siguiente desigualdad

$$\|u(t:x) - u(t:x_0)\| \leq \|u(\cdot:x) - u(\cdot:x_0)\|_\infty \leq C\|x - x_0\| \quad \text{para } t \in [0, t_0],$$

es decir, se cumple que las soluciones dependen continuamente de los datos iniciales en cierto sentido. Las soluciones convergen uniformemente en intervalos compactos, $[0, T]$, pues la convergencia en $\|\cdot\|_\infty$ es la convergencia uniforme.

Cuando el problema de Cauchy abstracto satisface además de la existencia y unicidad de soluciones esta condición de dependencia continua de los datos iniciales, algunos autores, por ejemplo Engel y Nagel [9], le llaman *problema de Cauchy bien planteado*. Por lo tanto la demostración del teorema 1.4.2 muestra que si A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo entonces el PCA está bien planteado en este sentido.

Corolario 1.4.2.1. *Sea A un operador lineal densamente definido con dominio $D(A) \subseteq E$ y $\rho(A) \neq \emptyset$. El PCA asociado a $(A, D(A))$ está bien planteado si y sólo si A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.*

1.5 Teorema de perturbación

Si A es un operador en E y es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo, entonces a partir de este podemos generar otros semigrupos sumando algún operador lineal, es decir, perturbando el operador inicial.

El siguiente teorema muestra el caso cuando el operador A es perturbado por un operador acotado.

Teorema 1.5.1. *Sea A un operador lineal en E y el generador infinitesimal del un C_0 semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ que satisface $\|T(t)\| \leq M\exp(\omega t)$ para todo $t \geq 0$ y para algún $\omega \in \mathbb{R}$ y $M \geq 1$. Si B es un operador acotado en E entonces el operador $C := A + B$ con $D(C) = D(A)$ es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo que satisface*

$$\|S(t)\| \leq M\exp((\omega + M\|B\|)t) \quad \text{para todo } t \geq 0$$

Demostración. Sea A el generador infinitesimal del C_0 semigrupo $(T(t))$ que satisface $\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}$. Y sea B un operador lineal acotado de E en E.

Por el teorema 1.3.8 y la observación del teorema 1.3.8 sabemos que existe una norma $|\cdot|$ equivalente a $\|\cdot\|$, la cual satisface $|T(t)| \leq e^{t\omega}$, $|R_\lambda(A)| \leq 1/(\lambda-\omega)$ para $\lambda > \omega$. Asimismo, se cumple también que $|B| \leq M\|B\|$.

Para concluir que $A + B$ es generador infinitesimal del semigrupo $(S(t))$ que satisface las condiciones del teorema 1.5.1 basta aplicar el teorema general de generación de C_0 semigrupos (teorema 1.3.9.).

Por ser A el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo entonces A es cerrado y con dominio denso. Por ser B un operador acotado, entonces es también cerrado y por lo tanto $A + B$ es operador cerrado. Además $D(A + B) = D(A)$ es denso. Falta analizar lo que que ocurre con el resolvente de $A + B$ y calcular las estimaciones de los operadores resolventes.

Sea $\lambda > \omega + |B|$; entonces se cumple que $|B|/(\lambda - \omega) < 1$ y, por lo tanto, $|BR_\lambda(A)| \leq |B|/(\lambda-\omega) < 1$. Entonces el operador acotado $I - BR_\lambda(A)$ es invertible y su inversa se puede escribir en forma de serie de potencias:

$$(I - BR_\lambda(A))^{-1} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(BR_\lambda(A))^k, \qquad \text{para } \lambda > \omega + |B|.$$

Definimos el operador $C := R_\lambda(A)(I - BR_\lambda(A))^{-1}$ (que resulta ser acotado) y observamos que es inversa derecha del operador $(\lambda I - (A + B))$. En efecto, desarrollando tenemos

$$(\lambda I - (A + B))C = ((\lambda I - A)R_\lambda(A) - BR_\lambda(A))(I - BR_\lambda(A))^{-1}$$

$$= (I - BR_\lambda)(I - BR_\lambda(A))^{-1} = I.$$

Por lo tanto, el operador C es inversa derecha de $(\lambda I - (A + B))$. Se cumple también que C es su inversa izquierda. Desarrollamos de forma similar a la anterior y obtenemos

$$C(\lambda I - (A + B)) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} R_\lambda(A)(BR_\lambda(A))^k(\lambda I - (A + B))$$

$$= R_\lambda(A)(\lambda I - (A + B)) + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} R_\lambda(A)(BR_\lambda(A))^k(\lambda I - (A + B))$$

$$I - R_\lambda(A)B + R_\lambda(A)[BR_\lambda(A) + (BR_\lambda(A)BR_\lambda(A)) + (BR_\lambda(A)BR_\lambda(A)BR_\lambda(A)) + \cdots](\lambda I - (A + B))$$

$$= I - R_\lambda(A)B + R_\lambda B[I + R_\lambda(A)B + (R_\lambda(A)B)^2 + \cdots]R_\lambda(A)(\lambda I - (A + B))$$

$$= I - R_\lambda(A)B + R_\lambda(A)B(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(R_\lambda(A)B)^k)R_\lambda(A)(\lambda I - (A+B))$$

$$= I - R_\lambda(A)B + R_\lambda(A)B(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(R_\lambda(A)B)^k) - R_\lambda(A)B(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(R_\lambda(A)B)^k)R_\lambda(A)B$$

$$= I - R_\lambda(A)B + R_\lambda(A)B(\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}(R_\lambda(A)B)^k) - R_\lambda(A)B(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(R_\lambda(A)B)^k)$$

$$= I - R_\lambda(A)B + R_\lambda(A)B = I.$$

Por lo tanto $C = (\lambda I - (A+B))^{-1} = R_\lambda(A+B)$ es un operador acotado y esto implica que $\lambda \in \rho(A+B)$ para $\lambda > \omega + |B|$. Esto implica, a su vez, que $(\omega + |B|, +\infty) \subseteq \rho(A+B)$.

Calculamos ahora las estimaciones de los resolventes:

$$|R_\lambda(A+B)| = |\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} R_\lambda(A)(BR_\lambda(A))^k| \leq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} |R_\lambda(A)||(BR_\lambda(A))|^k$$

$$= |R_\lambda(A)| \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} |(BR_\lambda(A))|^k \leq \frac{1}{(\lambda-\omega)} \frac{1}{1-|BR_\lambda(A)|};$$

y como $|BR_\lambda(A)| \leq |B|/(\lambda - \omega)$ entonces se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{1-|BR_\lambda(A)|} \leq \frac{\lambda-\omega}{\lambda-\omega-|B|}.$$

Con esto obtenemos la estimación siguiente

$$|R_\lambda(A+B)| \leq \frac{1}{\lambda-\omega-|B|},$$

y por lo tanto se cumplen también las estimaciones

$$|R_\lambda^n(A+B)| \leq \frac{1}{(\lambda-\omega-|B|)^n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Utilizando el resultado del teorema 1.3.9 concluimos que $A + B$ genera un C_0 semigrupo $(S(t))$ en $(E, |\cdot|)$ que satisface $|S(t)| \leq e^{t(\omega+|B|)}$. Si regresamos a la norma original $\|\cdot\|$ tenemos $\|S(t)\| \leq Me^{t(\omega+\|B\|)}$ para todo $t \geq 0$.

□

Observación. 1 El tipo de series utilizadas en la demostración del teorema anterior son series en el espacio de operadores de E en E, convergentes en la norma fuerte de operadores. Por ser E un espacio de Banach se cumple que $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge si $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ es convergente. Por lo tanto podemos utilizar las fórmulas usuales de funciones analíticas y aplicárselas a elementos de un espacio de Banach, siempre y cuando su norma sea menor que el radio de convergencia de la serie.

Observación. 2 Un caso particular pero importante es lo que ocurre para semigrupos contractivos. Si A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $(T(t))$ que satisface $\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}$ y si $A + B$ genera un C_0 semigrupo contractivo $(S(t))$, entonces $M = 1$ y $\omega + M\|B\| \leq 0$; por lo tanto el semigrupo $(T(t))$ es también contractivo.

Teorema 1.5.2. *Si A es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo y B un operador acotado y disipativo, entonces $A + B$ genera un C_0 semigrupo contractivo.*

Demostración. El teorema se obtiene directamente de las identidades demostradas en la prueba del teorema anterior y el teorema de Lumer-Phillips, en virtud de que A y B son operadores cerrados y $D(A+B) = D(A)$ es denso. Además por teorema de Lumer-Phillips (teorema 1.3.6) A es disipativo y la suma de operadores disipativos es un operador disipativo. Por lo observado en la demostración del teorema anterior si $\lambda > \|B\| \geq |B| \geq 0$ entonces $\lambda \in \rho(A+B)$ entonces $\Im(\lambda I - (A+B)) = E$. Aplicando el teorema de Lumer-Phillips concluimos que $A+B$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo.

□

1.6 Ecuaciones semilineales de evolución

En esta sección se muestran algunos resultados básicos sobre los sistemas de ecuaciones semilineales. En particular, queremos estudiar la siguiente generalización de PCA, llamada problema de Cauchy semilineal (PCAS):

$$(PCAS) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) = f(t,u(t)) & t > 0 \\ u(0) = x, \end{cases}$$

donde $-A$ es generador infinitesimal del C_0 semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ en el espacio de Banach E y la función $f : [0,L] \times E \longrightarrow E$ es continua en t y Lipschitz en u.

Definición 1.6.1 (Solución clásica PCAS)**.**
Una función $u : [0,L] \longrightarrow E$ es solución clásica, o simplemente solución del PCAS si u es continuamente diferenciable en $(0,T)$, $u(t) \in D(A)$ para $t \geq 0$ y satisface el PCAS en $[0,L]$.

Si $u(t)$ es solución del PCAS y consideramos la función $g(s) := T(t-s)u(s)$ notamos fácilmente que se cumplen las siguientes igualdades para $s \in [0,t]$ y $L \geq t > 0$:

$$\frac{d}{ds}g(s) = -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s,u(s)) = T(t-s)f(s,u(s)).$$

Si f es integrable entonces tenemos que

$$u(t) - T(t)u(0) = g(t) - g(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}g(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds,$$

$$\text{y} \quad u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds. \tag{1.17}$$

Esto muestra que toda solución satisface la ecuación integral (1.16) y con base en esto definimos la solución moderada o solución “mild” para el PCAS.

Definición 1.6.2 (Solución “mild”)**.**
Una solución continua $u(t)$ de la ecuación integral (1.16) será llamada solución “mild” o solución moderada del PCAS.

El siguiente teorema muestra existencia y unicidad de la solución moderada del PCAS cuando f es Lipschitz continua.

Teorema 1.6.1. *Sea $f : [0, L] \times E \longrightarrow E$ continua en $t \in [0, L]$ y uniformemente Lipschitz continua en E. Si $-A$ es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo en E, para $x \in E$ el PCAS tiene una única solución moderada $u \in C([0, L] : E)$. El mapeo $x \mapsto u$ es Lipschitz continuo de E en $C([0, L] : E)$.*

Demostración. Tomamos un elemento $x \in E$ fijo. Definimos el mapeo

$$F : C([0, L] : E) \longrightarrow C([0, L] : E),$$

$$Fu(t) := T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \text{para } 0 \leq t \leq L.$$

Dotamos a $C([0, L] : E)$ con la norma infinito correspondiente $\|u\|_\infty := \sup \{\|u(t)\| : t \in [0, L]\}$.

Como $f(t, \cdot)$ es uniformemente Lipschitz, su constante no depende de t. Entonces existe $K > 0$ tal que $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq K\|u - v\|$ para todo $u, v \in E$. Y por el teorema 1.2.1 existe $M > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para $t \in [0, L]$.

Por definición de F se cumple

$$Fu(t) - Fv(t) = \int_0^t T(t-s)[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]ds,$$

y de esta igualdad se deduce

$$\|Fu(t) - Fv(t)\| = \| \int_0^t T(t-s)[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]ds\|$$

$$\leq \int_0^t \|T(t-s)[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]\|ds \leq MK \int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds$$

$$\leq MK\|u - v\|_\infty \int_0^t ds = tMK\|u - v\|_\infty.$$

En resumen, se cumple la desigualdad

$$\|Fu(t) - Fv(t)\| \leq tMK\|u - v\|_\infty.$$

Además, por la definición de F se cumple que

$$F^2u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s, Fu(s))ds.$$

Análogamente obtenemos una desigualdad para F^2:

$$\|F^2u(t) - F^2v(t)\| = \| \int_0^t T(t-s)[f(s, Fu(s)) - f(s, Fv(s))]ds\|$$

$$\leq MK \int_0^t \|Fu(s) - Fv(s)\|ds \leq (MK)^2\|u - v\|_\infty \int_0^t sds$$

$$\leq \frac{1}{2}(tMK)^2\|u - v\|_\infty,$$

es decir,

$$\|F^2u(t) - F^2v(t)\| \leq \tfrac{1}{2}(tMK)^2\|u - v\|_\infty.$$

Usando un argumento de inducción demostraremos que

$$\|F^n u(t) - F^n v(t)\| \leq \frac{1}{n!}\,(tMK)^n\|u - v\|_\infty \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Nótese que ya lo demostramos para $n = 1$. Entonces si suponemos válida la fórmula para $n > 1$ tenemos que, por definición,

$$F^{n+1}u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t - s)f(s, F^n u(s))ds.$$

Así,

$$\|F^{n+1}u(t) - F^{n+1}v(t)\| = \|\int_0^t T(t - s)[f(s, F^n u(s)) - f(s, F^n v(s))]ds\|$$

$$\leq ML\int_0^t \|F^n u(s) - F^n v(s)\|ds \leq \frac{1}{n!}(MK)^{n+1}\|u - v\|_\infty \int_0^t s^n ds$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}(tMK)^{n+1}\|u - v\|_\infty,$$

y con esto demostramos que la fórmula es válida para todo n.

Con esto concluimos también que $\|F^n u - F^n v\|_\infty \leq \dfrac{1}{n!}\,(tMK)^n\|u - v\|_\infty$ y como $\dfrac{1}{n!}$ $(tMK)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ (ya que son términos de una serie convergente) entonces a partir de alguna $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se cumple que $\dfrac{1}{n!}\,(tMK)^n < 1$ si $n \geq N$, es decir, F^n es una contracción si $n > N$. Como $C([0, L] : E)$ es espacio de Banach entonces por el teorema del punto fijo de Banach F^n tiene un único punto fijo; esto quiere decir que existe $u \in C([0, L] : E)$ tal que

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t - s)f(s, u(s))ds,$$

la cual resulta ser una solución moderada del PCAS. Esto resuelve el problema de existencia y unicidad de soluciones moderadas.

Para demostrar que el mapeo G definido como sigue es Lipschitz

$$G : E \longrightarrow C([0, L] : E),$$

$$G(x) = T(t)x + \int_0^t T(t - s)f(s, u(s))ds \quad \text{para } t \in [0, L],$$

basta calcular la siguiente desigualdad. Sean $x, y \in E$ y $u = G(x)$, $v = G(y)$; entonces

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|T(t)(x - y)\| + \int_0^t \|T(t - s)\|\|[f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|ds$$

$$\leq M\|x - y\| + \int_0^t MK\|u(s) - v(s)\|ds.$$

Utilizando desigualdad de Gronwall en forma integral tenemos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq M\|x - y\|e^{MKt} \leq M\|x - y\|_\infty e^{MKt},$$

por lo tanto se sigue la desigualdad

$$\|u - v\|_\infty = \|G(x) - G(y)\|_\infty \leq Me^{MKT}\|x - y\|_\infty,$$

y con esto demostramos que el mapeo G es Lipschitz.

Como el mapeo G a cada $x \in E$ asocia la solución "mild" del PCAS con condición inicial x, el hecho de que G sea Lipschitz, con la norma infinito, quiere decir que las soluciones "mild" del PCAS dependen continuamente de las condiciones iniciales. Por lo tanto el problema de Cauchy semilineal está bien planteado cuando f es uniformemente Lipschitz continua.

□

Observación. Si $-A$ y f satisfacen las hipótesis del teorema anterior por el argumento del teorema de punto fijo utilizado en la demostración anterior es fácil ver que la ecuación integral

$$v(t) = g(t) + \int_0^t T(t - s)f(s, v(s))ds,$$

tiene una única solución continua $v \in C([0, L] : E)$ para cualquier $g \in C([0, L] : E)$.

En el siguiente teorema se muestra que si para f se piden condiciones mas fuertes que ser uniformemente Lipschitz continua entonces la solución mild es de hecho solución clásica del PCAS.

Teorema 1.6.2. *Sea $-A$ generador infinitesimal de un C_0 semigrupo en E. Si $f : [0, L] \times E \longrightarrow E$ es continuamente diferenciable en $[0, L] \times E$, entonces la solución mild del PCAS con condición inicial $x \in D(A)$ es solución clásica del problema.*

Demostración. Como f es continuamente diferenciable en $[0, L] \times E$ tenemos que f es continua en $[0, L]$ y uniformemente Lipschitz continua en E; entonces podemos aplicar el teorema 1.6.1 que nos garantiza la existencia y unicidad de la solución "mild" del PCAS.

Resta demostrar que si $x \in D(A)$ entonces su solución "mild" asociada es diferenciable en $[0, L]$.

Definimos $B(s) := \frac{\partial}{\partial u}f(s, u)$, es decir, la derivada de Fréchet respecto de u, la cual es una transformación lineal acotada. Definimos también

$$g(t) = T(t)f(0, x) + AT(t)x + \int_0^t T(t - s)\frac{\partial}{\partial s}f(s, u(s))ds.$$

Por las hipótesis del teorema resulta que $g(t)$ y $s \mapsto B(s)u$ son continuas. Por ser un operador lineal acotado $B(s)$ es Lipschitz. Por lo tanto, en virtud de la observación del teorema 1.6.1, existe una solución $w(t)$ de la siguiente ecuación integral:

$$w(t) = g(t) + \int_0^t T(t - s)B(s)w(s)ds.$$

Además, por la diferenciabilidad de f tenemos que

$$f(s, u(s + h)) - f(s, u(s)) = B(s)(u(s + h) - u(s)) + \omega_1(s, h),$$

$$f(s + h, u(s + h)) - f(s, u(s + h)) = \frac{\partial}{\partial s}f(s, u(s + h))h + \omega_2(s, h),$$

donde $h^{-1}\|\omega_i(s, h)\| \to 0$ cuando $h \to 0+$ uniformemente en $[0, L]$.

Definimos también

$$w_h(t) := h^{-1}(u(t+h) - u(t)) - w(t).$$

Como $u(t)$ es solución "mild" y por la definición anterior de $w(t)$ tenemos que

$$w_h(t) = h^{-1}[T(t+h)x + \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t)x - \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds]$$

$$-T(t)f(0,x) - AT(t)x - \int_0^t T(t-s)\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s))ds - \int_0^t T(t-s)B(s)w(s)ds.$$

Reagrupando, utilizando cambio de variable en la integral y sumando un cero adecuado obtenemos

$$w_h(t) = h^{-1}[T(t+h)x - T(t)x - AT(t)x] + [h^{-1}\int_0^h T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t)f(0,x)]$$

$$-\int_0^t T(t-s)\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s))ds - \int_0^t T(t-s)B(s)w(s)ds + h^{-1}\int_0^t T(t-s)B(s)(u(s+h)-u(s))ds$$

$$-h^{-1}\int_0^t T(t-s)B(s)(u(s+h)-u(s))ds = h^{-1}[T(t+h)x - T(t)x - AT(t)x] +$$

$$[h^{-1}\int_0^h T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t)f(0,x)] + h^{-1}\int_0^t T(t-s)[f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))]ds$$

$$-\int_0^t T(t-s)\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s))ds + h^{-1}\int_0^t T(t-s)\omega_1(s,h)ds$$

$$-h^{-1}\int_0^t T(t-s)(f(s,u(s+h)) - f(s,u(s)))ds + \int_0^t T(t-s)B(s)w_h(s)ds =$$

$$h^{-1}[T(t+h)x - T(t)x - AT(t)x] + [h^{-1}\int_0^h T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t)f(0,x)] +$$

$$\int_0^t T(t-s)[\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s+h)) - \frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s))]ds +$$

$$h^{-1}\int_0^t T(t-s)[\omega_1(s,h) + \omega_2(s,h)]ds + \int_0^t T(t-s)B(s)w_h(s)ds.$$

Como $x \in D(A)$, f es continua y $\|\omega_i(s,h)\| \to 0$ uniformemente cuando $h \to 0+$ se cumple que los primeros cuatro términos tienden a cero en norma si $h \to 0+$. Así, tenemos la estimación

$$\|w_h(t)\| \leq \epsilon(h) + M\int_0^h \|w_h(s)\|ds$$

donde $\epsilon(h) \to 0$ cuando $h \to 0+$ y $M = \max\{\|T(t-s)\|\|B(s)\| : s \in [0,L]\}$. Utilizando desigualdad de Gronwall tenemos que

$$\|w_h(t)\| \leq \epsilon(h)e^{Mt}.$$

Por lo tanto $\|w_h(t)\| \to 0$ cuando $h \to 0+$. Esto implica que

$$\frac{d}{dt}u(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) = w(t).$$

Así, u es diferenciable para $t > 0$ y su derivada es continua.

La función

$$v(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds$$

es solución "mild" del PCAS con condición inicial $v(0) = x$. Por hipótesis del teorema $s \mapsto f(s, u(s))$ es continuamente diferenciable y derivando la formula de variación de parámetros que define a la solución "mild" tenemos que $v(t)$ es continuamente diferenciable para $t > 0$. Con esto se demuestra que $v(t)$ es, de hecho, solución clásica del PCAS. Pero por hipótesis del teorema u es solución "mild" del problema con condición inicial $u(0) = x$, entonces por unicidad de las soluciones "mild" tenemos que $u(t) = v(t)$ para $t \in [0, L]$. Así concluimos que u es solución clásica del PCAS.

$\square$

Capitulo 2

Generación de C_0 semigrupos para sistemas Hamiltonianos

En este capitulo se presenta el problema de Cauchy con valores en la frontera para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales hamiltonianos, también llamados sistemas hamiltonianos o sistemas port-hamiltonianos. Se utilizan los resultados de la teoría de C_0 semigrupos presentados el capitulo anterior para estudiar las condiciones en que estos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales resultan ser problemas bien planteados.

Definición 2.0.3 (Sistema port-hamiltoniano)**.** Sean $P_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz invertible y autoadjunta, $P_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz antiadjunta, es decir, $-P_0 = P_0^*$, y $H \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{n\times n})$ que satisface $H^*(\zeta) = H(\zeta)$ y $mI \leq H(\zeta) \leq MI$ a.e. $\zeta \in [a,b]$ y $m, M > 0$ independientes de ζ. Si dotamos el espacio $L^2([a,b];\mathbb{C}^{n\times n})$ con el producto interior

$$\langle f, g\rangle_H := \frac{1}{2}\int_a^b g^*(\zeta)H(\zeta)f(\zeta)d\zeta,$$

entonces la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\zeta,t) = P_1\frac{\partial}{\partial \zeta}(H(\zeta)x(\zeta,t)) + P_0(H(\zeta)x(\zeta,t)) \tag{2.1}$$

es llamada sistema hamiltoniano lineal de primer orden y se asocia el funcional de energía o hamiltoniano, $E : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, definido por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_a^b x^*(\zeta,t)H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta. \tag{2.2}$$

Al espacio $(L^2([a,b];\mathbb{C}^n), \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ lo denotaremos como espacio de energía.

Observación. Debido a la desigualdad $mI \leq H(\zeta) \leq MI$ y la definición del producto interior, la norma resulta ser equivalente a la norma usual de $L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$

Observación. Como $x : [a,b] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ si fijamos $t \in [0,\infty)$ entonces $x(\cdot,t)$ representa una función vectorial en $\mathbb{C}^n$ y podemos representar $x(\zeta,t)$ como el vector columna $(x_1(\zeta,t),\cdots,x_n(\zeta,t))$ donde $x_i(\cdot,t) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Entonces $x^*(\zeta,t) = (\overline{x_1(\zeta,t)},\cdots,\overline{x_n(\zeta,t)})^\top$, donde $\overline{x_i(\zeta,t)}$ es el conjugado complejo de $x_i(\zeta,t)$.

Si denotamos la matriz $H(\zeta) = \{h_{i,j}(\zeta)\}$ entonces la función que aparece dentro del funcional de energía es una forma cuadrática

$$x^*(\zeta,t)H(\zeta)x(\zeta,t) = \textstyle\sum_i\sum_j h_{i,j}(\zeta)x_i(\zeta,t)\overline{x_j(\zeta,t)},$$

la cual resulta definida positivamente debido a las condiciones que se piden para la matriz $H(\zeta)$.

2.1 Propiedades básicas

Teorema 2.1.1 (Ecuación de balance)**.** *Si $x(\zeta,t)$ es solución clásica del sistema hamiltoniano (2.1), con hamiltoniano asociado (2.2), entonces se cumple la ecuación:*

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}[(H(\zeta)x(\zeta,t))^*P_1H(\zeta)x(\zeta,t)]|_a^b. \tag{2.3}$$

Demostración. Calculando directamente obtenemos

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b x^*(\zeta,t)H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}(x^*(\zeta,t)H(\zeta)x(\zeta,t))d\zeta$$

$$= \int_a^b \sum_i\sum_j h_{i,j}(\zeta)\frac{\partial}{\partial t}(x_i(\zeta,t)\overline{x_j(\zeta,t)})d\zeta$$

$$= \int_a^b \sum_i\sum_j h_{i,j}(\zeta)[(\frac{\partial}{\partial t}(x_i(\zeta,t))\overline{x_j(\zeta,t)} + x_i(\zeta,t)(\frac{\partial}{\partial t}\overline{x_j(\zeta,t)})]d\zeta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b [(\frac{\partial}{\partial t}x(\zeta,t))^*H(\zeta)x(\zeta,t) + x^*(\zeta,t)H(\zeta)\frac{\partial}{\partial t}x(\zeta,t)]d\zeta.$$

Como $x(\zeta,t)$ es solución de la ecuación (2.1) se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\zeta,t) = (P_1\frac{\partial}{\partial \zeta} + P_0)H(\zeta)x(\zeta,t).$$

Sustituyendo esta igualdad en la igualdad anterior y utilizando las propiedades de las matrices P_1 y P_0 obtenemos la siguiente identidad

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b [((P_1\frac{\partial}{\partial \zeta} + P_0)H(\zeta)x(\zeta,t))^*H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta +$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b [(x(\zeta,t))^*H(\zeta)((P_1\frac{\partial}{\partial \zeta} + P_0)H(\zeta)x(\zeta,t))d\zeta =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b [(\frac{\partial}{\partial \zeta}H(\zeta)x(\zeta,t))^*P_1H(\zeta)x(\zeta,t) - (x(\zeta,t))^*H(\zeta)P_0H(\zeta)x(\zeta,t)]+$$

$$[(x(\zeta,t))^*H(\zeta)P_1\frac{\partial}{\partial \zeta}H(\zeta)x(\zeta,t) + (x(\zeta,t))^*H(\zeta)P_0H(\zeta)x(\zeta,t)]d\zeta =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b (\frac{\partial}{\partial\zeta}H(\zeta)x(\zeta,t))^* P_1 H(\zeta)x(\zeta,t) + (x(\zeta,t))^* H(\zeta) P_1 \frac{\partial}{\partial\zeta}H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b \frac{\partial}{\partial\zeta}((H(\zeta)x(\zeta,t))^* P_1 H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2}[(H(\zeta)x(\zeta,t))^* P_1 H(\zeta)x(\zeta,t)]|_a^b.$$

Así obtenemos el resultado buscado.

□

El objetivo de este capítulo (y en general de este trabajo) es utilizar la teoría de C_0 semigrupos para estudiar la ecuación (2.1). Para ello debemos formular el sistema de ecuaciones (2.1) como un problema de Cauchy abstracto y definir un operador lineal en un espacio adecuado.

Primero escribimos la ecuación diferencial parcial (2.1) como

$$\frac{d}{dt}x(t) = P_1\frac{d}{d\zeta}(Hx(t)) + P_0(Hx(t)). \tag{2.4}$$

Entonces consideramos el operador A_0 definido como sigue:

$$A_0 x := P_1\frac{d}{d\zeta}(Hx) + P_0(Hx), \tag{2.5}$$

con dominio

$$D(A_0) := \left\{x \in L^2([a,b];\mathbb{C}^n) : Hx \in H^1([a,b];\mathbb{C}^n)\right\}. \tag{2.6}$$

El dominio se elige de esa forma para que tenga sentido la expresión $\frac{d}{d\zeta}(Hx)$, y para que su imagen caiga dentro del mismo espacio de energía.

Para poder garantizar que la ecuación (2.1) tiene una solución única es necesario añadir condiciones de frontera. Para simplificar la notación a lo largo de las próximas páginas definimos los siguientes términos:

$$e_\partial := \frac{1}{\sqrt{2}}((Hx)(b) + (Hx)(a)),$$

$$f_\partial := \frac{1}{\sqrt{2}}(P_1(Hx)(b) - P_1(Hx)(a)).$$

Con estos términos, e_∂ y f_∂, vamos a definir las condiciones de frontera necesarias para nuestro problema de valor inicial.

Teorema 2.1.2. *Sea A_0 el operador definido en (2.4) y (2.5) asociado al sistema hamiltoniano (2.1). Entonces se cumplen los siguientes resultados:*

(i) $\mathrm{Re}\langle A_0 x, x\rangle_H = \frac{1}{4}(f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial)$,

(ii) Para $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$ *existe un* $x_0 \in D(A_0)$ *tal que* $\begin{pmatrix} Hx_0(b) \\ Hx_0(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Demostración. (i) Sabemos que en general se cumple la igualdad

$$\text{Re}\langle A_0x,x\rangle_H=\tfrac{1}{2}(\langle A_0x,x\rangle_H+\overline{\langle A_0x,x\rangle_H})=\tfrac{1}{2}(\langle A_0x,x\rangle_H+\langle x,A_0x\rangle_H).$$

Calculamos primero

$$\langle A_0x,x\rangle_H=\frac{1}{2}\int_a^b(x(\zeta,t))^*H(\zeta)A_0x(\zeta,t)d\zeta=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b(x(\zeta,t))^*H(\zeta)(P_1\frac{d}{d\zeta}(H(\zeta)x(\zeta,t))+P_0(H(\zeta)x(\zeta,t))d\zeta$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b(H(\zeta)x(\zeta,t))^*(P_1\frac{d}{d\zeta}(H(\zeta)x))+(H(\zeta)x(\zeta,t))^*P_0(H(\zeta)x(\zeta,t))d\zeta.$$

Por otra parte calculamos

$$\langle x,A_0x\rangle_H=\frac{1}{2}\int_a^b(A_0x(\zeta,t))^*H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b(P_1\frac{d}{d\zeta}(H(\zeta)x(\zeta,t))+P_0H(\zeta)x(\zeta,t))^*H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta=$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b(\frac{d}{d\zeta}(H(\zeta)x(\zeta,t)))^*P_1H(\zeta)x(\zeta,t)-(Hx(\zeta,t))^*P_0H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta.$$

Sumamos ambas expresiones y usamos algunos de los cálculos realizados en el teorema anterior para obtener la siguiente igualdad

$$2\text{Re}\langle A_0x,x\rangle_H=\frac{1}{2}\int_a^b(H(\zeta)x(\zeta,t))^*(P_1\frac{d}{d\zeta}(H(\zeta)x))$$

$$+(\frac{d}{d\zeta}(H(\zeta)x(\zeta,t)))^*P_1H(\zeta)x(\zeta,t)d\zeta=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d}{d\zeta}((H(\zeta)x(\zeta,t))^*P_1H(\zeta)x(\zeta,t))d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}[(H(\zeta)x(\zeta,t))^*P_1H(\zeta)x(\zeta,t)]|_a^b=\frac{d}{dt}E(t).$$

Por lo tanto se cumple que

$$\text{Re}\langle A_0x,x\rangle_H=\frac{1}{4}(x^*(b,t)H(b)P_1H(b)x(b,t)-x^*(a,t)H(a)P_1H(a)x(a,t)).$$

Por la definición de e_∂ y f_∂, al realizar el cálculo de las expresiones $f_\partial^*e_\partial$ y $e_\partial^*f_\partial$, tenemos las identidades siguientes

$$f_\partial^*e_\partial=\frac{1}{2}(x^*(b,t)H(b)P_1H(b)x(b,t)-x^*(a,t)H(a)P_1H(b)x(b,t)$$

$$+x^*(b,t)H(b)P_1H(a)x(a,t)-x^*(a,t)H(a)P_1H(a)x(a,t)).$$

Además tenemos que

$$e_\partial^*f_\partial=\frac{1}{2}(x^*(b,t)H(b)P_1H(b)x(b,t)+x^*(a,t)H(a)P_1H(b)x(b,t))$$

$$-x^*(b,t)H(b)P_1H(a)x(a,t) - x^*(a,t)H(a)P_1H(a)x(a,t).$$

Sumamos ambas expresiones y obtenemos

$$f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial = x^*(b,t)H(b)P_1H(b)x(b,t) - x^*(a,t)H(a)P_1H(a)x(a,t).$$

Así llegamos a la identidad buscada

$$\mathrm{Re}\langle A_0 x, x\rangle_H = \frac{1}{4}(f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial).$$

Por lo tanto se cumple la afirmación del inciso (i).

ii) Sean $u, v \in \mathbb{C}^n$. Consideramos $x_0 \in L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$ definido como:

$$x_0(\zeta) := H^{-1}(\zeta)(v + \frac{\zeta - a}{b - a}(u - v)).$$

Por hipótesis tenemos que la matriz H satisface la condición $mI \leq H \leq MI$. En virtud de esto ocurre que $\frac{1}{M}I \leq H^{-1} \leq \frac{1}{m}$ y por lo tanto H resulta ser un operador lineal acotado e invertible en $L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$. Por esta razón resulta que $x_0 \in L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$.

Por definición $x_0 \in D(A_0)$ si y sólo si, $Hx_0 \in H^1([a,b];\mathbb{C}^n)$. Además se cumple que

$$Hx_0 = v + \tfrac{\zeta - a}{b-a}(u - v),$$

y como $v \in L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$ y $\frac{\zeta-a}{b-a}(u-v) \in L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$, entonces $Hx_0 \in L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{d\zeta}Hx_0(\zeta) = \frac{1}{b-a}(u - v),$$

la cual existe como derivada clásica y, por lo tanto coincide con su derivada débil. Además es una función de cuadrado integrable. Por lo tanto $Hx_0 \in H^1([a,b];\mathbb{C}^n)$ y así $x_0 \in D(A)$. Asimismo se satisfacen las condiciones $Hx_0(b) = u$ y $Hx_0(a) = v$. Como se deseaba demostrar.

□

Como consideraremos problemas en dominios espaciales acotados del tipo $[a,b]$, necesitamos agregar condiciones de frontera al problema para asegurar que éste tenga un solución única.

Estas condiciones de frontera se puede expresar en términos de x o la variable Hx que aparece naturalmente en el operador A_0 y su dominio $D(A_0)$. Como $x \in \mathbb{C}^n$ y necesitamos fijar condiciones para $(Hx)(a)$ y $(Hx)(b)$, entonces necesitamos establecer $2n$ valores.

A lo largo de este trabajo consideraremos problemas con condiciones de frontera de la forma

$$\widehat{W_B}\begin{pmatrix} (Hx)(b) \\ (Hx)(a) \end{pmatrix} = \overline{0}, \qquad \text{para } t \geq 0,$$

donde $\widehat{W_B} \in \mathbb{C}^{n\times 2n}$ y $\overline{0}$ es el vector cero.

Dichas condiciones iniciales se pueden escribir también en términos de e_∂ y f_∂ por medio de la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} (Hx)(b) \\ (Hx)(a) \end{pmatrix},$$

donde

$$R_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P_1 & -P_1 \\ I & I \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}.$$

La igualdad anterior se puede verificar por un cálculo directo de la parte derecha de la igualdad, tomando en cuenta las definiciones de e_∂ y f_∂.

Una propiedad importante de la transformación lineal definida arriba se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.3. *Si $P_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz autoadjunta e invertible, entonces se cumple que la matriz $R_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P_1 & -P_1 \\ I & I \end{pmatrix}$ es invertible y satisface la siguiente identidad:*

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{pmatrix} = R_0^* \Sigma R_0 \qquad (*)$$

donde $\Sigma := \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Además se cumple que todas las matrices R que satisfacen (*) son de la forma $R = UR_0$ donde U satisface la identidad $U^*\Sigma U = \Sigma$. I representa la matriz identidad de dimensión n.

Demostración. Por la definición de R_0 tenemos que

$$R_0^* = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P_1 & I \\ -P_1 & I \end{pmatrix},$$

por ser P_1 una matriz autoadjunta.

Si calculamos el producto de la identidad (*) obtenemos

$$R_0^*\Sigma R_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P_1 & I \\ -P_1 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & -P_1 \\ I & I \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P_1 & I \\ -P_1 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ P_1 & -P_1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2P_1 & 0 \\ 0 & -2P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos la siguiente identidad conocida de álgebra lineal,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C),$$

para calcular el siguiente determinante

$$\det(R_0^*\Sigma R_0) = \det(R_0^*)\det(\Sigma)det(R_0) = \det(\Sigma)|\det(R_0)|^2 = -\det(P_1)^2 \neq 0.$$

Así concluimos que $\det(R_0) \neq 0$ y por lo tanto R_0 es invertible.

La otra parte de la afirmación de obtiene directo de la igualdad (*), pues si R matriz que satisface la igualdad (*), entonces también se satisface la igualdad siguiente

$$R_0^*\Sigma R_0 = R^*\Sigma R,$$

y como R_0 es invertible, se cumple $\Sigma = (R_0^*)^{-1}R^*\Sigma R R_0^{-1}$. Definimos la matriz U como sigue:

$$U := RR_0^{-1}$$

y es claro que esta matriz así definida satisface el resultado buscado.

□

Ya observamos que R_0 es invertible, por lo tanto podemos reescribir las condiciones de frontera de la siguiente manera

$$W_B \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = \overline{0} \qquad t \geq 0,$$

donde $W_B = \widehat{W_B} R_0^{-1}$ resulta ser también matriz $n \times 2n$.

Definimos el siguiente operador

$$Ax := P_1 \frac{d}{d\zeta}(\mathcal{H}x) + P_0(\mathcal{H}x), \tag{2.7}$$

$$D(A) := \left\{ x \in L^2([a,b];\mathbb{C}^n) : \mathcal{H}x \in H^1([a,b];\mathbb{C}^n),\ W_B \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = 0 \right\}. \tag{2.8}$$

Utilizaremos este operador de ahora en adelante, para la demoestración de los resultados de generación de semigrupos.

2.2 Generación de C_0 semigrupos

En el operador definido en (2.7) y (2.8) aparecen las condiciones de frontera necesarias para el estudio de la ecuación (2.1). Por lo tanto nos enfocaremos en estudiar este operador y en aplicar la teoría de C_0 semigrupos para encontrar las condiciones de frontera adecuadas con las cuales A resulte ser generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.

Para esto será necesario presentar algunos resultados técnicos sobre representación de matrices. Estos resultados, junto con el teorema de Lumer-Phillips, nos llevarán al resultado principal de este capítulo.

El uso de teoría de semigrupos para estudiar sistemas port-hamiltonianos como los descritos aquí se puede encontrar en los trabajos de Augner y Jacob [2] , Jacob, Morris y Zwart [14], y Jacob y Zwart [15].

Lema 2.2.0.1. *Sea W una matriz de dimensión $n \times 2n$ y sea Σ la matriz definida en el teorema 2.1.3. Entonces W tiene rango n y $W\Sigma W^* \geq 0$, si y sólo si, existe una matriz $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz invertible $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$W = S[I + V \ \ I - V],$$

donde V satisface $VV^* \leq I$ ó $V^*V \leq I$.

Demostración.

$\Leftarrow]$

Suponemos que $W = S[I + V \ \ I - V]$, S es invertible y que V satisface $VV^* \leq I$ ó $V^*V \leq I$.

Si

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} W\Sigma W^* &= S[I+V\ I-V] \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I+V^* \\ I-V^* \end{bmatrix} S^* \\ &= S[I+V\ I-V] \begin{bmatrix} I-V^* \\ I+V^* \end{bmatrix} S^* \\ &= S([I+V][I-V^*]+[I-V][I+V^*])S^* \\ &= S[2I-2VV^*]S^*. \end{aligned}$$

Por hipótesis $VV^* \leq I$; entonces $I - VV^* \geq 0$ y por lo tanto $W\Sigma W^* \geq 0$.

Para demostrar que el rango de W es n, procedemos por contradicción y suponemos que $\text{rango}(W) < n$. Esto es equivalente a encontrar una combinación lineal no trivial de las filas de la matriz W que resulte igual a cero, es decir, podemos encontrar un vector $x^* \neq 0$ tal que $x^*W = \overline{0}$.

Por la forma que tiene W, esto es equivalente a

$$x^*S[I+V\ I-V] = y^*[I+V\ I-V] = 0,$$

donde $y = S^*x$. Esto implica que

$$y^*[I+V] = 0 = y^*[I-V],$$

y por lo tanto $y^*V = -y^*V$. A partir de esta última igualdad se sigue que $y^* = 0$ y también que $x^* = 0$. Lo cual es una contradicción con la hipótesis supuesta para x. Por lo tanto $\text{rango}(W) = n$.

$\Rightarrow$]

Ahora suponemos que $W\Sigma W^* \geq 0$ y $\text{rango}(W) = n$. Escribamos la matriz W de la forma

$$W = [W_1\ W_2].$$

con W_2, W_1 matrices cuadradas. La desigualdad $W\Sigma W^* \geq 0$ implica que

$$W_1W_2^* + W_2W_1^* \geq 0.$$

De esta desigualdad y recordando que, para toda matriz se cumple que $AA^* \geq 0$, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$(W_1+W_2)(W_1+W_2)^* \geq (W_1-W_2)(W_1-W_2)^* \geq 0 \qquad (*)$$

Por definición, $x^*AA^*x = \|A^*x\| \geq 0$. Entonces si tomamos $x \in \ker((W_1+W_2)^*)$, por las desigualdades anteriores tenemos también que $x \in \ker((W_1-W_2)^*)$. Por lo tanto

$$W_1^*x + W_2^*x = W_1^*x - W_2^*x$$

lo cual implica que $x \in \ker(W_2^*)$ y $x \in Ker(W_1^*)$, por lo cual $W^*x = \overline{0}$ y $x^*W = \overline{0}$.

Como $\text{rango}(W) = n$ se cumple que, $x^* = 0 = x$. Así concluimos que

$$\ker((W_1 + W_2)^*) = \overline{0}.$$

En virtud de este hecho, resulta que tanto $(W_1 + W_2)^*$ como $(W_1 + W_2)$ tienen rango n. Por lo tanto son matrices invertibles.

Utilizando la desigualdad (*) tenemos

$$(W_1 + W_2)^{-1}(W_1 - W_2)(W_1 - W_2)^*((W_1 + W_2)^*)^{-1} \leq I.$$

Entonces si definimos $V := (W_1 + W_2)^{-1}(W_1 - W_2)$, se cumple la condición $VV^* \leq I$. Como $W_1 + W_2$ es invertible podemos utilizarla para obtener la representación buscada de W. Realizando el cálculo directo observamos lo siguiente:

$$W_1 + W_2[I + V\ I - V] = [W_1 + W_2 + W_1 - W_2\ W_1 + W_2 - W_1 + W_2] = [2W_1\ 2W_2] = 2W.$$

Por lo tanto si definimos la matriz S como sigue

$$S := \frac{1}{2}(W_1 + W_2),$$

obtenemos el resultado buscado.

□

Observación. El rango de una matriz $T \in M_{n\times m}(F)$ con entradas en un campo F, denotado como rango(T), se define como la dimensión de la imagen de la transformación asociada a la matriz T, es decir,

$$\text{rango}(T) = \dim(\Im(T)).$$

El conocido teorema de la dimensión de algebra lineal, afirma que

$$m = \dim(\ker(T)) + \dim(\Im(T)),$$

por lo tanto siempre se cumple la ecuación

$$\text{rango}(T) = m - \dim(\ker(T)),$$

donde m es la dimensión del dominio de la transformación T, o bien, el número de columnas de la matriz que representa la transformación lineal.

Lema 2.2.0.2. *Sea W una matriz de dimensión $n \times 2n$ que se puede escribir de la forma $S[I + V\ I - V]$ con S, V matrices cuadradas $n \times n$ y S invertible. Entonces el núcleo de W es igual a la imagen de la siguiente matriz*

$$\begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix}.$$

La dimensión de esta matriz es $2n \times n$.

Demostración. Sea

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \Im(\begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix}) \qquad \text{con } y_i \in \mathbb{C},$$

es decir, existe

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix} x = y.$$

Por el teorema anterior se cumple que

$$\begin{aligned} Wy = S[I + V \ I - V]y = S[I + V \ I - V] \begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix} x \\ = S[(I + V)(I - V) - (I - V)(I + V)]x = 0, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $y \in \ker(W)$. Además obtenemos que

$$\ker(W) \leq \Im(\begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix}).$$

Por el teorema anterior se cumple que $\operatorname{rango}(W) = n$, y por la definición del rango de una matriz, comentada en la observación anterior, tenemos que $\operatorname{rango}(W) = \dim(\Im(W))$. Utilizando el teorema de la dimensión tenemos que

$$\dim(\ker(W)) + \dim(\Im(W)) = 2n$$

Por lo tanto concluimos la igualdad $\dim(\ker(W)) = n$.

Además tenemos la desigualdad

$$\dim(\Im(\begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix})) \leq n,$$

pero, por la contención antes demostrada la dimensión de la imagen debe ser igual a n. Por lo tanto los espacios

$$\Im\begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix} \text{ y } \ker(W)$$

son iguales, como espacios vectoriales.

□

A continuación se presenta el teorema más importante de este capítulo, en el cual se muestra la relación entre la matriz de condiciones de frontera W_B y la propiedad de ser generador infinitesimal para el operador A definido en (2.7) y (2.8).

Teorema 2.2.1. *Consideramos el operador lineal A, definido en (2.7) y (2.8), asociado a un sistema port-hamiltoniano, que satisface la definición 2.0.3. Suponemos también que la matriz de las condiciones de frontera W_B tiene rango n. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo en $L^2([a, b]; \mathbb{C}^n)$,
(ii) $\operatorname{Re}(\langle x, Ax\rangle_H) \leq 0$ *para* $x \in D(A)$,
(iii) $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$.

Demostración. El hecho que la afirmación (i) implica (ii) se cumple por el teorema de Lumer-Phillips, teorema 1.3.6.

Para demostrar que (ii) implica (iii) suponemos que $\mathrm{Re}(\langle x, Ax\rangle_H) \leq 0$.

Como A es restricción del operador A_0 se cumple $(f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial) \leq 0$ para todo $x \in D(A)$, por el teorema 2.1.2 inciso (i). Por el resultado del inciso (ii) del mismo teorema 2.1.2, para cada elemento

$$\begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} \in \ker(W_B),$$

existe un $x_0 \in D(A_0)$ tal que $e = e_\partial$ y $f = f_\partial$. Entonces $f^*e + e^*f \leq 0$ para cada elemento de $\ker(W_B)$. Escribimos $W_B = [W_1\ W_2]$. Si $y \in \ker(W_1 + W_2)$ entonces el vector

$$\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$$

es un elemento de $\ker(W_B)$ que por el mencionado inciso (ii) del teorema 2.1.2, satisface la desigualdad

$$2\|y\|^2 = y^*y + y^*y \leq 0. \qquad (*)$$

Por lo tanto $y = 0$ y esto implica que $\ker(W_1 + W_2) = \overline{0}$. Por esta razón $W_1 + W_2$ es matriz invertible.

Definimos las matrices

$$S := \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

$$V := (W_1 + W_2)^{-1}(W_1 - W_2).$$

Entonces se cumple que $W_B = S[I + V\ I - V]$. Falta demostrar que $V^*V \leq I$ ó bien que $VV^* \leq I$, para poder aplicar el resultado del lema 2.2.0.1.

Sea $\begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix} \in \ker(W_B)$. Por el lema 2.2.0.2, existe un x tal que

$$\begin{pmatrix} I - V \\ -I - V \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix}.$$

Entonces se cumple

$$0 \geq f^*e + e^*f = x^*[I - V^*\ \ -I - V^*] \begin{pmatrix} -I - V \\ I - V \end{pmatrix} x = x^*[-2I + 2V^*V]x.$$

Pero, por hipótesis, rango $(W_B) = n$, lo que implica $\dim(\ker(W_B)) = n$. Entonces $\ker(W_B) \cong \mathbb{C}^n$. El elemento $\begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix}$ fue elegido arbitrariamente, por lo tanto x es un elemento arbitrario de $\mathbb{C}^n$. Así se cumple que $V^*V \leq I$. Aplicando el resultado lema 2.2.0.1 a la matriz W_B tenemos que $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$.

Para demostrar (iii) implica (i) suponemos que $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$. Por hipótesis general tenemos que rango $(W_B) = n$; entonces podemos escribir

$$W_B = S[I + V \ I - V],$$

con V y S matrices cuadradas. S una matriz invertible y V satisface además la condición $V^*V \leq I$.

El operador H que aparece en el operador A definido en (2.7) y (2.8) es operador autoadjunto y coercivo, por la definición de sistema port-hamiltoniano.

Por la definición del producto interior del espacio de energía bastaría demostrar que A genera un C_0 semigrupo en $L^2([a,b] : \mathbb{C}^n)$ con el producto interior usual cuando la matriz $H = I$ y después aplicar el teorema 1.3.7 para obtener el resultado buscado para una matriz H arbitraria.

Por esta razón demostraremos el resultado para $H = I$. En este caso el operador A tiene la forma

$$Ax = P_1 \frac{d}{d\zeta} x + P_0 x, \qquad x \in D(A).$$

Por el teorema 2.1.2 tenemos que

$$\langle Ax, x\rangle + \langle x, Ax\rangle = \frac{1}{2}(f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial),$$

y como $x \in D(A)$ entonces el vector $\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} \in \ker(W_B)$. Entonces por lema 2.2.0.2 y lo observado en la demostración de la implicación anterior tenemos que

$$f_\partial^* e_\partial + e_\partial^* f_\partial = z^*[-2I + 2V^*V]z \leq 0 \qquad \text{para } \ z \in \mathbb{C}^n$$

pues $V^*V \leq I$. Por lo tanto se cumple que $\mathrm{Re}(\langle x, Ax\rangle) \leq 0$, es decir, A es un operador disipativo. Resta demostrar que $\Im(I - A) = L^2([a,b] : \mathbb{C}^n)$ y después aplicar teorema de Lumer-Phillips para concluir el resultado buscado.

Sea $y \in L^2([a,b] : \mathbb{C}^n)$. Queremos encontrar $x \in D(A)$ tal que $(I - A)x = y$, lo que es equivalente a

$$P_1^{-1}(I - P_0)x - P_1^{-1}y = \frac{d}{d\zeta}x.$$

Por ser una ecuación diferencial lineal de primer orden, esta tiene solución para toda y. Sabemos además que la solución es de la forma

$$x(\zeta) = \exp(C(\zeta - a))x(a) - \exp(C(\zeta - a)) \int_a^\zeta \exp(-C(\tau - a))P_1^{-1}y(\tau)d\tau,$$

donde $C := P_1^{-1}(I - P_0)$.

La integral del lado derecho existe pues por ser $[a,b]$ de medida finita y $y \in L^2([a,b] : \mathbb{C}^n)$. Por desigualdad de Hölder, $y \in L^1([a,b] : \mathbb{C}^n)$. Además, se cumple la desigualdad

$$\|y\|_1 \leq (b - a)\|y\|_2,$$

y el operador $\exp(C(\tau - a))$ es acotado. Utilizando desigualdad del triángulo y el hecho de que la exponencial es acotada, observamos que la solución $x \in L^2([a,b] : \mathbb{C}^n)$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|x(\zeta)\| \leq e^{\|c\|(b-a)}\|x(a)\| + e^{2\|c\|(b-a)}\|P_1^{-1}\|\|y\|_1,$$

y como el lado derecho es función acotada en $[a,b]$, entonces $\|x(\zeta)\|^2$ también es acotada en $[a,b]$, por lo tanto $x \in L^2([a,b]:\mathbb{C}^n)$.

Además $x \in H^1([a,b]:\mathbb{C}^n)$, ya que $\exp(C(\zeta-a))x(a)$ es función analítica y acotada, por lo tanto tiene derivada fuerte (y por, ende débil) en $L^2([a,b]:\mathbb{C}^n)$. También se cumple

$$\int_a^\zeta \exp(C(\zeta-\tau))P_1^{-1}y(\tau)d\tau \in H^1([a,b]:\mathbb{C}^n),$$

pues es la integral de una función de cuadrado integrable. Como $H^1([a,b]:\mathbb{C}^n)$ es espacio de Banach entonces $x \in H^1([a,b]:\mathbb{C}^n)$.

Para concluir que $x \in D(A)$ falta demostrar que

$$W_B R_0 \begin{pmatrix} x(b) \\ x(a) \end{pmatrix} = \overline{0}. \tag{2.9}$$

Por la forma de la función $x(\zeta)$ tenemos la siguiente igualdad

$$x(b) = \exp(C(b-a))x(a) - \int_a^b \exp(C(b-\tau))P_1^{-1}y(\tau)d\tau.$$

Si definimos

$$P := \exp(C(b-a)),$$

y

$$Q := \int_a^b \exp(C(b-\tau))P_1^{-1}y(\tau)d\tau,$$

entonces $x \in D(A)$ si se cumple

$$W_B R_0 \begin{pmatrix} Px(a)+Q \\ x(a) \end{pmatrix} = \overline{0},$$

o, lo que es equivalente,

$$W_B R_0 \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} x(a) = -W_B R_0 \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $W_B R_0 \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión $n \times n$.

Esta matriz resulta invertible pues si existiera un vector $z_0 \in \mathbb{C}^n$, con $z_0 \neq 0$, tal que

$$W_0 R_0 \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} z_0 = \overline{0}, \qquad (**)$$

al considerar el problema para $y = 0$, con la condición de frontera $x(a) = z_0$, y por lo observado anteriormente, tendríamos que la solución es de la forma

$$x(\zeta) = \exp(C(\zeta-a))z_0,$$

la cual estaría en $D(A)$, en virtud de las hipótesis supuestas para z_0, y resolvería también el problema $(I-A)x=0$, es decir, x es función característica del operador A, asociada al valor característico uno.

Sin embargo, la hipótesis de que $\mathrm{Re}(\langle w, Aw\rangle) \leq 0$ para todo $w \in D(A)$, implica que

$$\langle x, Ax\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \leq 0,$$

lo que es equivalente a $x=0$, lo cual implica, a su vez, que $z_0 = 0$ y esto es una contradicción. Por lo tanto z_0 debe ser cero para que se satisfaga la igualdad (**) y así se cumpla que

$$\ker(W_0 R_0 \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}) = \overline{0}.$$

La matriz resulta ser invertible y, por ende, el sistema (**) tiene solución única. El sistema (**) es equivalente al sistema de ecuaciones (2.9), por lo tanto siempre podemos encontrar un valor para $x(a)$ de tal forma que $x \in D(A)$. El elemento y fue una función arbitraria, por lo tanto se cumple que $\Im(I-A) = L^2([a,b]:\mathbb{C}^n)$.

Por ser A un operador disipativo y $\Im(I-A) = L^2([a,b]:\mathbb{C}^n)$, aplicando el teorema de Lumer-Phillips concluimos que A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo. $\square$

Este teorema nos permitirá responder, de una manera relativamente sencilla, a la pregunta de si un sistema port-hamiltoniano está bien planteado como problema de Cauchy, pues por el teorema anterior únicamente bastaría demoestrar si se cumple o no la condición

$$W_B \Sigma W_B^* \geq 0.$$

Esta última condición es equivalente a demostrar si una matriz es definida positiva o no y esto, en última instancia se puede probar incluso numéricamente. Sin embargo, las condiciones del teorema son bastante restrictivas pues el rango de W_B debe ser n y además la matriz P_0 debe ser antihermitiana.

Para extender la teoría para el caso cuando $P_0^* \neq -P_0$ es necesario hacer uso del teorema de perturbación, teorema 1.5.1 del capítulo 1, y del siguiente lema.

Lema 2.2.1.1. *Sea A operador asociado a un sistema port-hamiltoniano, $A = P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(H) + P_0 H$. Si $Re(\langle \cdot, P_0 \cdot\rangle) = 0$ y A no es disipativo, entonces existe una sucesión (x_n) en $D(A)$ tal que*

$$\mathrm{Re}(\langle x_n, Ax_n\rangle_H) = 1, \qquad y \;\; x_n \to 0$$

Demostración. Supongamos que el operador A no es disipativo y $\mathrm{Re}(\langle \cdot, P_0 \cdot\rangle) = 0$.

Entonces existe un elemento $x_0 \in D(A)$ tal que $\mathrm{Re}(\langle x_0, Ax_0\rangle_H) > 0$, el cual se puede normalizar multiplicando por un escalar de manera que satisface

$$\mathrm{Re}(\langle x_0, Ax_0\rangle_H) = 1. \qquad (*)$$

Para $m \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión (y_m) en $H^1([a,b]:\mathbb{C}^n)$ que satisface la siguiente condición:

$$y_m(\zeta) = \begin{cases} Hx_0(\zeta) & , \ \zeta \in [a, a+\frac{1}{2m}] \cup [b-\frac{1}{2m}, b] \\ 0 & , \ \zeta \in [a+\frac{1}{m}, b-\frac{1}{m}]. \end{cases}$$

Siempre se puede construir una sucesión que satisfaga las condiciones mencionadas arriba pues $Hx_0 \in H^1([a,b] : \mathbb{C}^n)$ y, si escribimos las partes imaginaria y real de la función

$$Hx_0 = (u_1, \cdots, u_n) + i(v_1, \cdots, v_n),$$

sabemos que se cumple que $u_i, v_j \in H^1([a,b] : \mathbb{R})$ para toda $i, j = 1, \cdots, n$.

Por propiedades de espacios de Sobolev de una dimensión real, toda función que perteneciente a este espacio tiene un representante continuo y además este representante continuo se puede escribir como integral de una función en $L^2([a,b] : \mathbb{R})$. Por tanto podemos pensar a las funciones u_i, v_j como funciones continuas y con esto Hx_0 es también continua. Por lo tanto, tiene sentido evaluar puntualmente la función.

Si escribimos

$$y_m = (z_1^m, \cdots, z_n^m) + i(w_1^m, \cdots, w_n^m),$$

entonces las funciones de la parte real las definimos como

$$z_i^m(\zeta) = \begin{cases} u_i(\zeta) & , \ \zeta \in [a, a + \frac{1}{2m}] \cup [b - \frac{1}{2m}, b] \\ 0 & , \ \zeta \in [a + \frac{1}{m}, b - \frac{1}{m}]. \end{cases}$$

Para los intervalos $[a+\frac{1}{2m}, a+\frac{1}{m}]$ y $[b-\frac{1}{m}, b-\frac{1}{2m}]$ podemos extender la función z_i^m de forma adecuada utilizando las funciones alisadoras, con lo cual aseguramos que $z_i^m \in H^1([a,b] : \mathbb{R})$ y por lo tanto, que $y_m \in H^1([a,b] : \mathbb{C}^n)$. Análogamente, para las funciones de la parte imaginaria de y_m realicemos el mismo procedimiento. Con esta construcción se cumple que $\|y_m\|_\infty \leq \|Hx_0\|_\infty$.

Definimos la sucesión

$$x_m := H^{-1} y_m, \qquad \text{para toda } m \geq 1.$$

Por las propiedades de la matriz H se cumple que $x_m \in L^2([a,b]; \mathbb{C}^n)$ y, además,

$$Hx_m = y_m \in H^1([a,b] : \mathbb{C}^n).$$

Como se cumple que $Hx_m(b) = Hx_0(b)$ y $Hx_m(a) = Hx_0(a)$ entonces también Hx_m satisface las condiciones de frontera, es decir, las variables e_∂ y f_∂ coinciden con las de Hx_0. Por lo tanto $x_m \in D(A)$.

Evaluamos $\mathrm{Re}(\langle Ax_m, x_m \rangle_H)$. Por hipótesis $\mathrm{Re} P_0 = 0$ entonces se cumple que

$$\mathrm{Re}(\langle Ax_m, x_m \rangle_H) = \mathrm{Re}(\left\langle P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(Hx_m), x_m \right\rangle_H) + \mathrm{Re}(\langle P_0 Hx_m, x_m \rangle_H)$$

$$= \mathrm{Re}(\left\langle P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(Hx_m), x_m \right\rangle_H) = \frac{1}{4}(Hx_m)^* P_1 (Hx_m) \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{4}(Hx_0)^* P_1 (Hx_0) \Big|_a^b = \mathrm{Re}(\langle x_0, Ax_0 \rangle_H) = 1, \qquad \text{para } m \geq 1.$$

Resta observar que en efecto $x_m \to 0$ en el espacio de energía asociado a H. Por las condiciones que satisface la matriz H la norma del espacio de energía es equivalente a la norma de $L^2([a,b]; \mathbb{C}^n)$ por tanto es suficiente demostrar que $x_m \to 0$ en L^2.

Por construcción tenemos que $y_m \to 0$ puntualmente a.e en $[a,b]$. Por la construcción de y_m se cumple que $|y_m(\zeta)| \leq |Hx_0(\zeta)|$; esto implica $|y_m(\zeta)|^2 \leq |Hx_0(\zeta)|^2$ para $m \geq 1$. Como

$Hx_0 \in L^2$ entonces aplicando el teorema de convergencia dominada tenemos que $y_m \to 0$ en L^2.

Por propiedades de la norma se cumple $\|x_m\| = \|H^{-1}y_m\| \leq \|H^{-1}\|_\infty \|y_m\|$ y entonces $x_m \to 0$ cuando $m \to \infty$.

$\square$

A partir de ahora modificamos la definición de un sistema hamiltoniano eliminando la restricción sobre P_0, es decir, dejamos de suponer que se cumple $P_0 = -P_0^*$.

Definición 2.2.1 (Sistema port-hamiltoniano)**.** Sea $P_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertible y autoadjunta, $P_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $H \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^{n\times n})$ que satisface $H^*(\zeta) = H(\zeta)$ y $mI \leq H(\zeta) \leq MI$ a.e $\zeta \in [a,b]$. Las constantes $m, M > 0$ son independientes de ζ y H. Además $H^{-1} \in L^\infty([a,b];\mathbb{C}^n)$. Entonces la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\zeta,t) = P_1\frac{\partial}{\partial \zeta}(H(\zeta)x(\zeta,t)) + P_0(H(\zeta)x(\zeta,t)) \tag{2.10}$$

es llamada un sistema port-hamiltoniano. Junto con las condiciones de frontera

$$W_B\begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = 0 \tag{2.11}$$

Seguiremos trabajando con el operador $(A, D(A))$ definidos de la misma forma que en (2.7) y (2.8).

En el siguiente teorema se generalizan los resultados obtenidos en el teorema 2.2.1 para el sistema hamiltoniano de la definición 2.2.1

Teorema 2.2.2. *Sea A el operador definido en (2.7) y (2.8) asociado a un sistema hamiltoniano que satisface la definición 2.2.1 y la matriz de las condiciones de frontera W_B tiene rango n. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo contractivo en $L^2([a,b];\mathbb{C}^n)$,
(ii) $\mathrm{Re}(\langle Ax, x\rangle_H) \leq 0$ para $x \in D(A)$,
(iii) $W_B\Sigma W_B^* \geq 0$ y $\mathrm{re}(\langle P_0\cdot,\cdot\rangle) \leq 0$.

Demostración. Para el caso $P_0 = -P_0^*$ notamos que $\mathrm{Re}(\langle P_0\cdot,\cdot\rangle_H) = 0$ y entonces las equivalencias se cumplen por teorema 2.2.1.

Pasamos al caso $P_0 \neq -P_0^*$. Entonces podemos definir la matriz $G_0 := -\frac{1}{2}(P_0 + P_0^*)$ la cual es distinta de la matriz cero.

La implicación $(i) \implies (ii)$ se tiene por el teorema de Lumer-Phillips.

Para demostrar la implicación $(ii) \implies (i)$ definimos el operador

$$A_1 := A + G_0H.$$

Entonces por la definición del operador A tenemos la siguiente identidad

$$A_1 = P_1\frac{\partial}{\partial\zeta}(H\cdot) + \frac{1}{2}(P_0 - P_0^*)H\cdot$$

Además $D(A_1) = D(A)$ es denso. A_1 es suma de operadores cerrados, por lo tanto es también un operador cerrado. Notamos que $\frac{1}{2}(P_0 - P_0^*)$ es antihermitiana. Demostraremos primero que A_1 es operador disipativo.

Si, por el contrario, suponemos que A_1 no es disipativo podemos utilizar el lema 2.2.1.1. Este resultado garantiza que existe una sucesión, (x_n), en $D(A_1) = D(A)$ tal que

$$0 \geq \mathrm{Re}(\langle Ax_n, x_n \cdot \rangle_H) = \mathrm{Re}(\langle A_1 x_n, x_n \rangle_H) - \mathrm{Re}(\langle G_0 H x_n, x_n \rangle_H) = 1 - \mathrm{Re}(\langle G_0 H x_n, x_n \rangle_H).$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ tenemos $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción; por lo tanto A_1 es un operador disipativo. Por el teorema 2.2.1, A_1 genera un C_0 semigrupo contractivo y por la observación 2 del teorema de perturbación (teorema 1.5.1 del capitulo 1), esto implica que el operador A genera un C_0 semigrupo contractivo. Con esto concluimos que las afirmaciones (i) y (ii) son equivalentes.

Si suponemos cierta la afirmación (i) ó (ii), por el argumento anterior cualquiera de las dos implica que A_1 es disipativo y, por el teorema 2.2.1, esto implica que $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$. Nótese que por definición, el operador A_1 tiene las mismas condiciones de frontera que el operador A.

Por suponer cierto (i) ó (ii) tenemos que A es disipativo; por lo tanto se cumple que, para todo $x \in C_c^\infty([a,b]; \mathbb{C}^n) \subseteq D(A)$,

$$0 \geq \mathrm{Re}(\langle Ax, x \rangle_H) = \mathrm{Re}(\left\langle P_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}(H(\zeta)x(\zeta)), x \right\rangle_H) + \mathrm{Re}(\langle P_0 H x, x \rangle_H)$$

$$= \frac{1}{2}[(Hx)^* P_1 (Hx)]|_a^b + \mathrm{Re}(\langle P_0 Hx, Hx \rangle) = \mathrm{Re}(\langle P_0 Hx, Hx \rangle).$$

Para cada $y \in \mathbb{C}^n$ tenemos que $\phi y \in C_c^\infty([a,b]; \mathbb{C}^n)$ con $\phi \in C_c^\infty([a,b]; \mathbb{R})$. Entonces

$$0 \geq \mathrm{Re}(\langle P_0 \phi y, \phi y \rangle) = |\phi|^2 \mathrm{Re}(\langle P_0 y, y \rangle).$$

Esta última desigualdad se cumple sólo si $\mathrm{Re}(\langle P_0 y, y \rangle) \leq 0$, y como y fue arbitrario, se cumple que $\mathrm{Re}(\langle P_0 \cdot, \cdot \rangle) \leq 0$.

Así demostramos la implicación buscada.

$(iii) \implies (i)$]

Suponemos cierto (iii) entonces por el teorema 2.2.1, A_1 genera un C_0 semigrupo contractivo.

Por la definición de G_0 y utilizando $\mathrm{Re} P_0 \leq 0$ tenemos que

$$\mathrm{Re}(\langle -G_0 Hx, x \rangle_H) = -\mathrm{Re}(\langle G_0 Hx, Hx \rangle) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\langle P_0 Hx, Hx \rangle + \langle Hx, P_0 Hx \rangle)$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\langle P_0 Hx, Hx \rangle) \leq 0 \quad \text{para} \quad x \in D(A).$$

Por lo tanto $-G_0 H$ es disipativo. Por el teorema 1.5.2 del capitulo 1, concluimos que el operador $A = A_1 - G_0 H$ genera un C_0 semigrupo contractivo.

Con esto obtenemos la equivalencia entre las tres afirmaciones.

□

El siguiente teorema es una generalización del teorema anterior. Se muestran las condiciones sobre la matriz W_B que garantizan la generación de un C_0 semigrupo contractivo. Se debilita una de las hipótesis del teorema 2.2.2 y se demuestra una cuarta equivalencia no considerada en el teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.3. *Para el operador A definido en (2.7) y (2.8) asociado a un sistema port-hamiltoniano que satisface la definición 2.2.1 las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) A genera un C_0 semigrupo contractivo en $(L^2([a,b] : \mathbb{C}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$,

(ii) $\mathrm{Re}(\langle Ax, x\rangle_H) \leq 0$ *para* $x \in D(A)$,

(iii) $\mathrm{Re}(\langle P_0\cdot, \cdot\rangle) \leq 0$, $u^*P_1u - v^*P_1v \leq 0$ *para* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \ker(\widehat{W_B})$,

(iv) $\mathrm{Re}(\langle P_0\cdot, \cdot\rangle) \leq 0$, $W_B\Sigma W_B^* \geq 0$ *y rango*$(W_B) = n$.

Demostración. Por el teorema 1.3.7 del capítulo 1, basta demostrar que A genera un C_0 semigrupo para $H = I$.

$(i) \implies (ii)$] Esta implicación es cierta aplicando el teorema de Lumer-Phillips (teorema 1.3.6 del capitulo 1).

$(ii) \implies (iii)$] Suponemos que A es un operador disipativo. Por cálculos realizados en las demostraciones anteriores tenemos que

$$0 \geq \mathrm{Re}(\langle Ax, x\rangle) = x^*(b)P_1x(b) - x^*(a)P_1x(a) + \mathrm{Re}\int_a^b x^*P_0xd\zeta.$$

Usando un argumento similar al que se utilizó en la demostración anterior, tomamos $\phi \in C_c^\infty([a,b];\mathbb{R})$ y $z \in \mathbb{C}^n$, entonces $\phi z \in C_c^\infty([a,b];\mathbb{C}^n)$. Por lo tanto tenemos que

$$0 \geq \mathrm{Re}\int_a^b (\phi z)^*P_0(\phi z)d\zeta = \mathrm{Re}\int_a^b |\phi|^2 z^*P_0zd\zeta.$$

Pero la desigualdad anterior se cumple si sólo si

$$\mathrm{Re}\int_a^b z^*P_0zd\zeta,$$

para $z \in \mathbb{C}^n$. Por lo tanto se cumple que $\mathrm{Re}P_0 \leq 0$.

Si $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \ker(\widehat{W_B})$ por teorema 2.1.2 (ii), existe una función $x_0 \in D(A)$ tal que $x_0(b) = u$ y $x_0(a) = v$. Tomando tal función x_0, podemos construir una sucesión de funciones $(x_n) \in D(A)$ tales que $x_n(b) = u$, $x_n(a) = v$ y $x_n \to 0$ si $n \to \infty$. Usando la disipatividad del operador A obtenemos

$$\mathrm{Re}(\langle Ax_n, x_n\rangle) = u^*P_1u - v^*P_1v - \mathrm{Re}(\langle P_0x_n, x_n\rangle) \leq 0, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene la desigualdad $u^*P_1u - v^*P_1v \leq 0$.

Tal sucesión (x_n) se puede construir utilizando exactamente la misma técnica del lema 2.2.1.1, pero utilizando la función x_0 que existe por el teorema 2.1.2 (ii).

Por lo tanto se cumple que $u^*P_1u - v^*P_1v \leq 0$.

$(iii) \implies (iv)$] Suponemos $\mathrm{Re}P_0 \leq 0$ y $u^*P_1u - y^*P_1y \leq 0$ para $\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \ker(\widehat{W_B})$.

Por lo tanto, la primera parte de la afirmación (iv), $\mathrm{Re}P_0 \leq 0$, se cumple inmediatamente por hipótesis.

La condición $u^*P_1u - y^*P_1y \leq 0$ se puede reescribir como

$$(u^*\ y^*)\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \in \ker(\widehat{W_B}).$$

Denotamos

$$T := \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{pmatrix}.$$

Como P_1 es invertible y hermitiana por hipótesis, entonces T resulta ser invertible y hermitiana por la forma en que está definida. Además los valores propios de P_1 y $-P_1$ son los mismos pero con signos contrarios. Por invertibilidad, P_1 no puede tener valor propio igual a cero. Por construcción de T sus valores propios son los valores propios de P_1 y $-P_1$. Por tanto T tiene *n* valores propios negativos y *n* positivos.

La condición

$$v^*Tv \leq 0,$$

sólo se puede satisfacer para v en el espacio generado por los vectores propios asociados a valores propios negativos que es un espacio de dimensión *n* y, por hipótesis, esto se cumple para todo $v \in \ker(\widehat{W_B})$. Por lo tanto $\dim(\ker(\widehat{W_B})) \leq n$.

Como $\widehat{W_B} \in \mathbb{C}^{n\times 2n}$, por el teorema de la dimensión tenemos la igualdad

$$2n = \dim(\ker(\widehat{W_B})) + \dim(\text{ rango}(\widehat{W_B})).$$

Sin embargo, por propiedades del rango se cumple que rango$(\widehat{W_B}) \leq n$ y esto, en conjunción con el teorema de la dimensión, implica que $\dim(\ker(\widehat{W_B})) \geq n$. Entonces tenemos que $\dim(\ker(\widehat{W_B})) = n$ y, utilizando de nueva cuenta el teorema de la dimensión, tenemos que rango$(\widehat{W_B}) = n$.

Para concluir que $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$, definimos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \in \ker(\widehat{W_B}).$$

Por teorema 2.1.3 la matriz R_0 es invertible y por definición de W_B, $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \in Ker(\widehat{W_B})$ si y sólo si $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \ker(W_B)$.

Un cálculo directo nos muestra que $y_1^* y_0 + y_0^* y_1 = u_1^* P_1 u_1 - u_0^* P_1 u_0 \leq 0$, es decir, la desigualdad se cumple por hipótesis.

Si escribimos $W_B = [W_1 \; W_0]$ con $W_1, W_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, utilizando los lemas 2.2.0.1, 2.2.0.2 y usando una construcción idéntica a la utilizada en la demostración de que la afirmación (ii) implica (iii) del teorema 2.2.1, concluimos que $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$. Y por lo tanto se demuestra la afirmación (iv).

$(iv) \implies (i)$] Esta implicación se tiene aplicando directamente el teorema 2.2.2.

Por lo tanto queda demostrada la equivalencia entre las cuatro afirmaciones.

$\square$

Capitulo 3

Aplicaciones

A continuación se presentan algunos ejemplos para mostrar la aplicación de los teoremas y conceptos introducidos en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

3.1 Ecuación de transporte con valores en la frontera

Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\zeta,t) = \frac{\partial}{\partial \zeta}(h(\zeta)w(\zeta,t)) \qquad t \geq 0, \zeta \in [a,b] \ y \ w(\zeta,0) = w_0(\zeta) \tag{3.1}$$

Donde $h \in C^1([a,b] : \mathbb{R})$ y $h(\zeta) > 0$ para $\zeta \in [a,b]$.

En este caso la dimensión es $n = 1$, por lo tanto el sistema consta únicamente de una ecuación que se puede escribir en forma de un sistema hamiltoniano con $P_1 = 1$, $P_0 = 0$. Por hipótesis, $h(\zeta)$ es función real, positiva y continua; entonces satisface las hipótesis de la defınción de sistema hamiltoniano.

Su espacio de energía asociado resultaría ser el espacio $L^2([a,b] : \mathbb{C})$ con el producto interior

$$\langle f, g\rangle_h = \int_a^b \overline{g(\zeta)}h(\zeta)f(\zeta)d\zeta.$$

En este caso escribimos

$$Ax = \frac{\partial}{\partial \zeta}(h(\zeta)x(\zeta,t)).$$

Pasamos a calcular el funcional de energía asociado a la ecuación de transporte

$$E(t) = \int_a^b h(\zeta)|w(\zeta,t)|^2 d\zeta,$$

por lo que su ecuación de balance correspondiente resulta ser

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}((h(b))^2|w(b,t)|^2 - (h(a))^2|w(a,t)|^2).$$

Entonces tenemos que

$$\mathrm{Re}(\langle x, Ax\rangle_h) = \frac{1}{4}(((h(b))^2|w(b,t)|^2 - (h(a))^2|w(a,t)|^2)).$$

En este caso la matriz para las condiciones de frontera $W_B \in \mathbb{C}^{1\times 2}$ y se puede escribir como

$$W_B = \left(\begin{array}{cc} w_b & w_b \end{array} \right),$$

donde w_a y w_b son números complejos.

Para demostrar que el operador A genera un C_0 semigrupo podemos usar inciso (ii) del teorema 2.2.1.

Suponemos que la desigualdad siguiente

$$\text{Re}(\langle x, Ax\rangle_h) = \tfrac{1}{4}(((h(b))^2|w(b,t)|^2 - (h(a))^2|w(a,t)|^2)) \leq 0,$$

se cumple para todo elemento

$$x \in D(A) := \left\{ x \in L^2([a,b] : \mathbb{C}) : hx \in H^1([a,b] : \mathbb{C}), W_B \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

La desigualdad anterior es equivalente a

$$(h(b))^2|w(b,t)|^2 \leq (h(a))^2|w(a,t)|^2.$$

Entonces si esta condición se cumple el operador A genera un C_0 semigrupo en el espacio de energía asociado a la ecuación de transporte.

Para utilizar el inciso (iii) del mismo teorema calculamos

$$W_B \Sigma W_B^* = (w_b \quad w_a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_b} \\ \overline{w_a} \end{pmatrix} = w_b\overline{w_a} + w_a\overline{w_b}.$$

Entonces por el inciso (iii) del teorema, A genera un C_0 semigrupo en el espacio de energía si y sólo si $w_b\overline{w_a} + w_a\overline{w_b} \geq 0$. Asimismo, si w_a y w_b son reales entonces tenemos que A es el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo si $w_b w_a \geq 0$.

Observamos que utilizando el teorema 2.2.1 del capitulo 2, obtenemos condiciones sencillas sobre los valores de frontera de $w(\zeta,t)$ que caracterizan la generación de un C_0 semigrupo. Lo cual implicaría que la ecuación está bien planteada como problema de Cauchy. Por ende hemos demostrado el siguiente

Teorema 3.1.1. *Consideremos la ecuación de transporte en una dimensión*

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\zeta,t) = \frac{\partial}{\partial \zeta}(h(\zeta)w(\zeta,t)) \qquad t \geq 0, \zeta \in [a,b]$$

Con condiciones iniciales

$$w(\zeta,0) = w_0(\zeta)$$

Donde $h \in C^1([a,b] : \mathbb{R})$ *y* $h(\zeta) > 0$ *para* $\zeta \in [a,b]$. *Si las funciones* h *y* w *satisfacen la siguiente desigualdad*

$$(h(b))^2|w(b,t)|^2 \leq (h(a))^2|w(a,t)|^2$$

entonces el problema de valores en la frontera para la ecuación de transporte está bien planteado como problema de Cauchy, por lo tanto tiene solución única.

3.2 Ecuación de la cuerda vibrante

A continuación se presenta el ejemplo clásico de la ecuación de la cuerda vibrante. Esta ecuación es ampliamente conocida y se sabe que está bien planteada como problema de Cauchy. La siguiente ecuación es conocida como la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(\zeta,t) = \frac{1}{\rho(\zeta)}\frac{\partial}{\partial \zeta}(T(\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta}w(\zeta,t)) \qquad t \geq 0, \zeta \in (0,l),\ w(\zeta,0) = w_0(\zeta), \tag{3.2}$$

donde l es la longitud de la cuerda, $\zeta \in [0,l]$ es la variable que representa la posición espacial, $w(\zeta,t)$ es la posición vertical de la cuerda en el punto ζ al tiempo t, $\rho(\zeta)$ es la densidad de masa por unidad de longitud de la cuerda, y $T(\zeta) > 0$ es el modulo de Young de la cuerda (Ver Capítulo 5 de Salsa [24]) .

A continuación se presenta un un esbozo de la deducción de la ecuación de la cuerda vibrante. Esta ecuación modela el comportamiento de una cuerda ideal que se mueve bajo determinadas condiciones, como las cuerdas de un violín u otros instrumentos de cuerdas. En la deducción de la ecuación (3.2) se asumen las siguientes hipótesis:

1. La vibración de la cuerda tiene amplitud pequeña.
2. En cada punto de la cuerda ocurre únicamente desplazamiento vertical, es decir, el desplazamiento horizontal es nulo.
3. La cuerda es perfectamente flexible, es decir, no presenta resistencia a doblarse y la tensión actúa de forma tangencial en cada punto.
4. Los efectos de la fricción son despreciables.

Bajo las hipótesis expuestas se deduce que el movimiento de la cuerda se lleva a cabo en un plano. Por lo tanto, la tensión que actúa en cada punto la representamos con un fuerza $\mathbf{T}$ representado por un vector de magnitud T.

La ecuación se deduce de las hipótesis enumeradas arriba, de la conservación de la masa durante el movimiento, y de la segunda ley de Newton (Véase Salsa [24]).

En el momento incial $t = 0$ suponemos que la cuerda está en posición horizontal y $w(\zeta,t)$ es el desplazamiento vertical en el tiempo $t > 0$ en la posición ζ.

Consideramos el segmento de la cuerda entre los puntos $[\zeta, \zeta + \Delta\zeta]$ en ambos extremos actúa la tensión que es un vector de fuerzas con dos componentes, el cual podemos escribir como

$$\mathbf{T} = (T(\zeta,t)\cos(\alpha(\zeta,t)), T(\zeta,t)\sin(\alpha(\zeta,t))),$$

donde $T(\zeta,t)$ es la magnitud de la tensión en el punto (ζ,t) y $\alpha(\zeta,t)$ es el ángulo del vector director de $\mathbf{T}$ en el punto (ζ,t) con respecto al eje horizontal. Analizaremos primero las componentes horizontales de la fuerza actuando en el segmento de cuerda.

De acuerdo con las hipótesis expuestas antes el desplazamiento horizontal de la cuerda es cero por lo tanto al sumar los componentes horizontales de la tensión estos deben anularse pues no hay otra fuerza actuando horizontalmente. Como las tensiones horizontales actúan en sentidos contrarios en los extremos del segmento de cuerda, obtenemos

$$T(\zeta+\Delta\zeta,t)\cos(\alpha(\zeta+\Delta\zeta,t) - T(\zeta,t)\cos(\alpha(\zeta,t) = 0.$$

Dividiendo esta igualdad entre $\Delta\zeta$ y tomando límite cuando $\Delta\zeta \to 0$ de ambos lados obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}T(\zeta,t)\cos(\alpha(\zeta,t)) = 0,$$

y esto implica que $T(\zeta,t)\cos(\alpha(\zeta,t) = T_0(t)$ es únicamente función del tiempo.

Para la componente vertical de la fuerza que actúa sobre el segmento de cuerda, debemos considerar la componente vertical de la tensión (es decir, alguna fuerza externa actuando sobre la cuerda, como la gravedad), y utilizar la ley de Newton:

$$T_{vert}(\zeta,t) = T(\zeta,t)\sin(\alpha(\zeta,t)) = T_0(t)\tan(\alpha(\zeta,t)) = T_0(t)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t).$$

Si consideramos alguna fuerza externa actuando en la cuerda en dirección vertical, y denotamos por $F(\zeta,t)$ a la magnitud de tal fuerza, suponiendo la continuidad de $F(\zeta,t)$ y utilizando el teorema integral del valor medio tenemos que la magnitud de la fuerza externa en el segmento $[\zeta,\zeta+\Delta\zeta]$ esta dada por

$$F(\zeta_1,t)\Delta\zeta \quad \text{con} \quad \zeta_1 \in [\zeta,\zeta+\Delta\zeta].$$

La magnitud total de la fuerza que actúa en el segmento $[\zeta,\zeta+\Delta\zeta]$ está dada por la suma de las tensiones en los extremos actuando en direcciones contrarias hacia afuera del segmento, más la fuerza externa que actúa en el segmento. Aplicando la ley de Newton tenemos

$$T_0(t)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta+\Delta\zeta,t) - T_0(t)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t) + F(\zeta_1,t)\Delta\zeta = \int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta}\rho(y)w_{tt}(y,t)dy.$$

Utilizando también el teorema integral del valor medio, tenemos la siguiente igualdad

$$T_0(t)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta+\Delta\zeta,t) - T_0(t)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t) + F(\zeta_1,t)\Delta\zeta = \rho(\zeta_2)w_{tt}(\zeta_2,t)\Delta\zeta,$$

donde $\zeta_1,\zeta_2 \in [\zeta,+\Delta\zeta]$.

Dividiendo entre $\Delta\zeta$ y tomando límite cuando $\Delta\zeta \to 0$ tenemos

$$T_0(t)\lim_{\Delta\zeta\to 0}\frac{1}{\Delta\zeta}(\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta+\Delta\zeta,t) - \frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t)) + \lim_{\Delta\zeta\to 0}F(\zeta_1,t)$$

$$= \lim_{\Delta\zeta\to 0}\rho(\zeta_2)w_{tt}(\zeta_2,t) = T_0(t)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}w(\zeta,t) + F(\zeta,t) = \rho(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(\zeta,t).$$

Cuando $F \equiv 0$ tenemos la ecuación de cuerda vibrante homogénea o de vibración libre. Para el caso $F \neq 0$ se obtiene la ecuación no homogénea o ecuación de vibraciones forzadas.

Para el caso cuando la cuerda es homogénea, cuando $\rho(\zeta)$ es constante, y perfectamente elástica, siendo $T_0(t)$ es constante, entonces obtenemos la conocida ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(\zeta,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}w(\zeta,t) = f(\zeta,t),$$

donde $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ y la función $f(\zeta,t) = F(\zeta,t)/\rho$, la función de densidad de la fuerza, tiene unidades de fuerza sobre unidad de masa.

Si hubiéramos supuesto que la tensión es tangencial pero no es constante en cada punto, como puede ocurrir cuando la cuerda no es de un material homogéneo, la magnitud de la tensión estaría dada de la forma $T(\zeta,t) = \tau(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t)$. Utilizando la ley de Newton y el teorema integral del valor medio de la misma forma de arriba obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(\zeta,t) = \frac{1}{\rho(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta}(T(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t)) + f(\zeta,t).$$

Cuando $f(\zeta,t) = 0$ obtenemos la ecuación (3.2). La construcción y el estudio de esta ecuación se puede encontrar en los libros clásicos de ecuaciones diferenciales parciales tales como Tijonov y Samarskii [26] o Salsa [24].

Podemos reescribir la ecuación de la cuerda vibrante como un sistema hamiltoniano de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden utilizando el siguiente cambio de variable:

$$u_1 = \rho\frac{\partial}{\partial t}w, u_2 = \frac{\partial}{\partial\zeta}w,$$

y considerando las matrices

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H(\zeta) = \begin{pmatrix} 1/\rho(\zeta) & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\zeta}\begin{pmatrix} 1/\rho(\zeta) & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Este sistema de ecuaciones satisface todas las hipótesis del sistema hamiltoniano de ecuaciones (2.1), si consideramos P_0 como la matriz cero.

Denotamos por $U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ al vector cuyas componentes son las funciones definidas en el cambio de variable. Entonces tenemos que $U^* = U^T$ y por lo tanto la energía correspondiente a U es de la forma

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^l [U^T(\zeta,t)\begin{pmatrix} 1/\rho(\zeta) & 0 \\ 0 & T(\zeta) \end{pmatrix}U(\zeta,t)]d\zeta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho(\zeta)(\frac{\partial}{\partial t}w(\zeta,t))^2 + T(\zeta)(\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t))^2 d\zeta, \end{aligned}$$

es decir, se cumple la ecuación

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(\zeta)(\frac{\partial}{\partial t}w(\zeta,t))^2 + T(\zeta)(\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t))^2 d\zeta. \tag{3.3}$$

La ecuación (3.3) resulta ser el funcional de energía usual asociado a la ecuación de la cuerda vibrante. Por otra parte la ecuación de balance se expresa como

$$\frac{d}{dt}E(t) = T(l)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(l,t)\frac{\partial}{\partial t}w(l,t) - T(0)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(0,t)\frac{\partial}{\partial t}w(0,t). \tag{3.4}$$

Las expresiones para f_∂ y e_∂ son

$$e_\partial = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}w(l,t) + \frac{\partial}{\partial t}w(0,t) \\ T(l)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(l,t) + T(0)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(0,t) \end{pmatrix},$$

$$f_\partial = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T(l)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(l,t) - T(0)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(0,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}w(l,t) - \frac{\partial}{\partial t}w(0,t) \end{pmatrix}.$$

Para ejemplificar la manera de introducir la condiciones de frontera en este sistema de ecuaciones, consideramos el caso particular cuando los extremos de la cuerda están fijos, como sucede en instrumentos musicales de cuerdas como la guitarra o violín, es decir, tenemos las siguientes condiciones de frontera

$$\tfrac{\partial}{\partial t}w(0,t) = 0 = \tfrac{\partial}{\partial t}w(l,t).$$

Utilizando la ecuación (3.4) junto con las condiciones de frontera tenemos que $\frac{d}{dt}E(t) = 0$. Entonces por el inciso (i) del teorema 2.1.2 se cumple la siguiente igualdad

$$\mathrm{Re}(\langle x, Ax\rangle_h) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

Por el inciso (ii) del teorema 2.2.1 tenemos que el operador $A = P_1\frac{\partial}{\partial\zeta}(H(\zeta)\cdot)$ es generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.

Utilizando el inciso (iii), si $U \in D(A)$ entonces se debe satisfacer la igualdad

$$W_B \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si utilizamos

$$W_B = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces resulta que

$$W_B \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}w(b,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}w(a,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz W_B captura las condiciones de frontera deseadas además de satisfacer la condición rango $(W_B) = 2$.

Para verificar que cumple la desigualdad del inciso (iii) del teorema debemos calcular $W_B\Sigma W_B^*$, donde la matriz Σ está dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizando el calculo directo obtenemos

$$W_B\Sigma W_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Por lo tanto el operador A genera un C_0 semigrupo y esto implica que el problema de valor inicial está bien planteado como problema de Cauchy. Así hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 3.2.1. *Consideremos la ecuación de la cuerda vibrante*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(\zeta,t) = \frac{1}{\rho(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta}(T(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}w(\zeta,t)) \qquad t \geq 0, \zeta \in (0,l),$$

Con condiciones iniciales

$$w(\zeta,0) = w_0(\zeta)$$

y con los extremos fijos, es decir, con las condiciones de frontera

$$\tfrac{\partial}{\partial t}w(0,t) = 0 = \tfrac{\partial}{\partial t}w(l,t).$$

entonces el problema de valores en la frontera para la ecuación de la cuerda vibrante está bien planteado como problema de Cauchy, por lo tanto tiene solución única.

3.3 Modelo hiperbólico de difusión de calor

La ecuación de transporte de calor propuesta por Fourier [12], mejor conocida como ecuación del calor, y presentada en los ejemplos de la sección 1.2.1, es

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = k\Delta\theta, \tag{3.5}$$

donde $\theta(x,t)$ denota la densidad de calor de un cuerpo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en la posición $x \in \Omega$ a tiempo $t > 0$. La constante $k > 0$ es conocida como conductividad térmica del medio.

La ecuación (3.5) se deriva de dos principios. El primero de ellos es un principio de conservación. Como $\theta(x,t)$ representa la densidad de calor entonces la cantidad total de calor en el cuerpo se obtiene como la integral sobre Ω. El cambio de la cantidad de calor de Ω es igual al flujo negativo a través del cuerpo por lo tanto se cumple que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta(x,t)dt = -\int_{\partial\Omega}\mathbf{J}(\mathbf{x},\mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS, \tag{3.6}$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ es el flujo de la temperatura y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario en cada punto de la frontera de Ω, denotada como $\partial\Omega$. Utilizando el teorema de la divergencia obtenemos una equivalencia en forma diferencial de la ecuación (3.6) que resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta + \operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0 \tag{3.7}$$

A esto nos referimos al decir que éste es un principio de conservación. La cantidad de calor que se crea dentro de la región es la misma que sale. Por lo tanto la cantidad de calor en la región Ω es siempre constante (en ausencia de fuentes externas de calor, por supuesto).

La segunda hipótesis de la cual se deriva la ecuación es la ley de transferencia de calor conocida como ley de Fourier, la cual dice que el calor fluye de regiones de alta temperatura a regiones de baja temperatura con magnitud proporcional al gradiente de la temperatura, es decir se cumple

$$\mathbf{J} = -k\nabla\theta. \tag{3.8}$$

Si sustituimos (3.8) en (3.7) obtenemos la ecuación (3.5).

Es un hecho ampliamente sabido de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, que la ecuación (3.5) tiene solución única sólo cuando se cumplen ciertas restricciones para las condiciones iniciales (ver [16]) o cuando se consideran una clase especial de soluciones, las llamadas soluciones distribucionales.

Otro hecho conocido es que para la ecuación (3.5) las perturbaciones iniciales se propagan con velocidad infinita. Por ejemplo cuando se considera la ecuación (3.5) en una dimensión y $\Omega = \mathbb{R}$, el problema conocido como transferencia de calor en una barra infinita

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},$$

con una perturbación inicial localizada en $x = 0$, representada mediante la llamada función delta de Dirac, es decir, satisface la condición inicial $\theta(x,0) = \delta(x)$, evoluciona de acuerdo con el núcleo del calor, es decir, la solución está dada por la función

$$\theta(x,t) = \frac{\exp(-|x|^2/4kt)}{\sqrt{4\pi kt}}.$$

Por la forma que tiene la solución se cumple que para $t > 0$ y para cualquier $x \in \mathbb{R}$ $\theta(x,t) > 0$. Esto quiere decir que en todo momento a partir del tiempo cero y en cual quiero posición de la barra, sin importar lo cerca o lo lejos que se encuentre del punto $x = 0$, la temperatura ya es positiva. En este sentido se dice que la velocidad de propagación de la perturbación inicial es infinita.

Para solucionar este problema, en 1867 J. C. Maxwell [18] propuso modificar la ley de transferencia de calor incorporando una derivada temporal para el flujo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J} + \mathbf{J} = -k\nabla\theta, \tag{3.9}$$

y de este modo propuso que el flujo de calor no se adapta instantaneamente al gradiente de la temperatura, sino que es necesario cierto tiempo, llamado tiempo de relajación (ver [19] , [20]). Sin embargo Maxwell desechó su ley de transferencia de calor y no fue hasta 1944 que se obtuvo evidencia experimental de que la conducción de calor dentro de la materia ocurre con velocidad finita [22]. Entonces Cattaneo [5] retomó la idea de Maxwell y propuso que el flujo se adapta al gradiente de la temperatura en un tiempo pequeño de relajación $\tau > 0$. De este modo la ley de transferencia toma la forma

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J} + \mathbf{J} = -k\nabla\theta. \tag{3.10}$$

Esta última ecuación es conocida como ley de transferencia de Maxwell-Cattaneo. Las ecuaciónes (3.7) y (3.10) constituyen un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales que modelan la difusión de calor en un medio y que además tienen velocidad finita de propagación de perturbaciónes. Esto en virtud de que a partir de las ecuaciones (3.7) y (3.10) podemos deducir una ecuación de onda para $\theta(x,t)$ y la ecuación de onda tiene velocidad finita de propagación.

Consideramos el sistema de Maxwell-Cattaneo, ecuaciones (3.7) y (3.10) en una dimensión espacial para $x \in [0,1]$ y $t \in [0,\infty)$. La divergencia se sustituye por la derivada parcial respecto de la variable espacial. Obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}J(x,t) \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}J(x,t) = -\frac{1}{\tau}J(x,t) - \frac{k}{\tau}\frac{\partial}{\partial x}\theta(x,t) \tag{3.12}$$

junto con las condiciones iniciales $\theta(x,0) = \theta_0(x)$ y $J(x,0) = J_0(x)$ para $x \in [0,1]$. Para las condiciones de frontera fijaremos condiciones homogéneas para la temperatura ,es decir , $\theta(1,t) = 0 = \theta(0,t)$ para $t > 0$. Las condiciones iniciales propuestas deben ser compatibles con las condiciones de frontera.

El sistema compuesto por las ecuaciones (3.11) y (3.12) se puede escribir en forma matricial como

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \theta \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{k}{\tau} & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \theta \\ J \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ J \end{pmatrix}.$$

Como la matriz de las derivadas parciales respecto a x tiene los eigenvalores reales $\sqrt{\frac{k}{\tau}}$ y $-\sqrt{\frac{k}{\tau}}$, entonces el sistema es hiperbólico.

Consideramos el siguiente cambio de variable:

$$\hat{\theta} := -\frac{k}{\tau}\,\theta.$$

Entonces las ecuaciones (3.11) y (3.12) se pueden reescribir respectivamente como

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\theta} = \frac{k}{\tau}\frac{\partial}{\partial x}J, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}J = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\theta} - \frac{1}{\tau}J, \tag{3.14}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales equivalente, el cual se puede escribir en forma de sistema hamiltoniano como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ J \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ J \end{pmatrix}.$$

Este sistema satisface las condiciones de sistema hamiltoniano de la definición (2.2.1) si consideramos las matrices

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{\tau} \end{pmatrix}.$$

El operador asociado al sistema hamiltoniano es

$$A\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ J \end{pmatrix} = P_1\,\frac{\partial}{\partial x}\,H\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ J \end{pmatrix} + P_0 H\begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ J \end{pmatrix}.$$

Usando la energía asociada definida en la ecuación (2.2) obtenemos

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\theta(x,t))^2 + \frac{k}{\tau}(J(x,t))^2 dx.$$

Por la construcción del sistema de ecuaciones se cumple

$$H\begin{pmatrix}\hat\theta\\ J\end{pmatrix}(1)=\begin{pmatrix}\hat\theta(1,t)\\ \frac{k}{\tau}J(1,t)\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad H\begin{pmatrix}\hat\theta\\ J\end{pmatrix}(0)=\begin{pmatrix}\hat\theta(0,t)\\ \frac{k}{\tau}J(0,t)\end{pmatrix}.$$

Calculamos e_∂ y f_∂ para este sistema

$$e_\partial=\tfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}\hat\theta(1,t)+\hat\theta(0,t)\\ \frac{k}{\tau}J(1,t)+\frac{k}{\tau}J(0,t)\end{pmatrix},$$

$$f_\partial=\tfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}\frac{k}{\tau}J(1,t)-\frac{k}{\tau}J(0,t)\\ \hat\theta(1,t)-\hat\theta(0,t)\end{pmatrix}.$$

Entonces si definimos la matriz W_B como sigue

$$W_B:=\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12&0\\ 0&\frac{-1}{2}&\frac12&0\end{pmatrix},$$

por un cálculo directo obtenemos la siguiente igualdad

$$W_B\begin{pmatrix}f_\partial\\ e_\partial\end{pmatrix}=\tfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}\hat\theta(1,t)\\ \hat\theta(0,t)\end{pmatrix}.$$

Por la definición del dominio del operador A en (2.8), la definición de H y de la matriz W_B, el dominio del operador A es de la forma

$$D(A):=\left\{\begin{pmatrix}\hat\theta\\ J\end{pmatrix}\in H^1([a,b];\mathbb{C}^2):\begin{pmatrix}\hat\theta(1,t)\\ \hat\theta(0,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Además es claro que $\hat\theta(1,t)=0=\hat\theta(0,t)$ si y sólo si $\theta(1,t)=0=\theta(0,t)$.

Podemos usar la afirmación (iv) del teorema 2.2.3 para concluir que el operador A genera un C_0 semigrupo en $L^2([a,b];\mathbb{C}^2)$.

Por la definición de P_0 se cumple que $P_0\le 0$ por lo tanto; también $\mathrm{Re}P_0\le 0$. También por la definición de W_B se tiene que rango $(W_B)=2$. Resta calcular $W_B\Sigma W_B^*$:

$$W_B\Sigma W_B^*=\begin{pmatrix}0&\frac12&\frac12&0\\ 0&\frac{-1}{2}&\frac12&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\ \frac12&\frac{-1}{2}\\ \frac12&\frac12\\ 0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\ 0&0\end{pmatrix}\ge 0.$$

Con esto observamos que las tres condiciones de la afirmación (iv) se cumplen, por lo tanto por teorema 2.2.3 concluimos que el operador $(A,D(A))$ genera un C_0 semigrupo en $L^2([a,b];\mathbb{C}^2)$. Por teorema 1.4.2 tenemos que el problema abstracto de Cauchy asociado al sistema de Cattaneo-Maxwell está bien planteado. Por ende hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. *Consideremos el sistema de ecuaciones de Cattaneo-Maxwell en una dimensión espacial ecuaciones 3.11 y 3.12 en* $[0,1]\times[0,\infty)$. *Con condiciones iniciales*

$$\theta(x,0)=\theta_0(x)$$
$$J(x,0)=J_0(x)$$

Si además suponemos la condición de frontera

$$\theta(1,t)=0=\theta(0,t)$$

entonces el problema de valores en la frontera para la ecuación de Maxwell-Cattaneo está bien planteado como problema de Cauchy, por lo tanto tiene solución única.

3.4 Modelos hiperbólicos de reacción-difusión

En esta sección se presentan ejemplos de sistemas de reacción difusión donde el flujo sigue la ley de transferencia de Cattaneo-Maxwell (3.10).

Las ecuaciones de reacción difusión son de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}u = D\Delta u + f(u) \tag{3.15}$$

Se obtienen de forma análoga a la construcción de la ecuación del calor en la sección anterior. Es decir, se obtienen a partir de la ley de conservación (3.7) y el flujo (3.8). La no homogeneidad $f(t,u)$ aparece si se supone que la ley de conservación (3.7) no se cumple estrictamente y en su lugar ocurre la relación

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}(\mathbf{J}) = f(u). \tag{3.16}$$

Esto implica que la concentración u no se mantiene constante dentro de la región Ω. Por ejemplo esto es muy natural para problemas donde se modela la concentración de bacterias en una región. La concentración no es constante por el hecho de que las bacterias se pueden reproducir y morir con tasas de nacimiento y muerte distintas, lo que hace posible que en ciertos momentos la concentración de bacterias sea mayor o menor que la concentración inicial.

Igual que en la sección anterior no utilizaremos el flujo de la forma (3.8) sino flujos que siguen la ley de transferencia de Cattaneo-Maxwell (3.10). En una dimensión espacial sustituimos divergencia en (3.16) por la parcial respecto a la variable espacial. Las ecuaciones (3.10) y (3.16) forman un sistema hiperbólico no homogéneo.

Combinando una variación de la ecuación (3.10)

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}J + J = -D\nabla u \tag{3.17}$$

y la ecuación (3.16), se puede obtener la siguiente ecuación de segundo grado

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{D}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + (\frac{1}{\tau} - f'(u))\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{\tau}f(u) \tag{3.18}$$

suponemos que se cumple la siguiente desigualdad, llamada condición subcaracterística

$$0 < \tau < \frac{1}{\sup f'(u)},$$

con esta desigualdad implica que

$$\frac{1}{\tau} - f'(u) > 0$$

a la ecuación (3.18) le llamaremos ecuación hiperbólica de reacción difusión. Esta ecuación, igual que la ecuación de Cattaneo-Maxwell, la podemos escribir en forma de sistema hamiltoniano, de la siguiente manera

En forma de sistema de ecuaciones obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} J \\ u \end{pmatrix} = P_1\frac{\partial}{\partial x}H\begin{pmatrix} J \\ u \end{pmatrix} + P_0 H\begin{pmatrix} J \\ u \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} J \\ u \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Donde las matrices P_0, P_1 y H se definen como sigue

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{D}{\tau} \end{pmatrix}$$

A continuación se muestran ejemplos concretos de ecuaciones hiperbólicas de reacción difusión.

3.4.1 Ecuación Fisher-KPP

La ecuación de Fisher-KPP, conocida también como ecuación de Fisher, ecuación de Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov o ecuación KPP, es una ecuación semilineal que fue propuesta por Fisher [11] en el contexto de la genética de poblaciones para estudiar la dispersión de ciertos genes en una población. Y también propuesta por Kolmogorov, Petrovsky y Piskunov [17] .

La ecuación Fisher-KPP (3.20) es una de las llamadas ecuaciones de reacción-difusión y es una ecuación parabólica semilineal.

$$\frac{\partial}{\partial t}u = D\Delta u + u(1-u) \tag{3.20}$$

Esta ecuación es un caso especial de la ecuación general (3.15) cuando $f(u) = u(1-u)$. En este caso u se puede interpretar como la concentración de genes dentro de la población en un tiempo determinado.

Para el caso de reacción difusión hiperbólica en una dimensión espacial, utilizando la no homogeneidad tipo Fisher-KPP obtendríamos la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{D}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + (\frac{1}{\tau} - 1 + 2u)\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{\tau}u(1-u) \qquad (x,t) \in [0,1] \times (0,T) \tag{3.21}$$

$$u(x,0) = u_0 \qquad J(x,0) = J_0 \tag{3.22}$$

Para aplicar los teoremas del capitulo 2 utilizaremos el sistema de ecuaciones (3.19) con F definida como sigue

$$F\begin{pmatrix} J \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u(1-u) \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Consideramos las condiciones de frontera $J(0,t) = 0 = J(1,t)$. Es decir, no hay flujo hacia afuera de la región $[0,1]$. Como ocurre en con una población de bacterias en una caja de Petri.

En este caso los términos e_∂ y f_∂ para este sistema resultan de la forma

$$e_\partial = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{D}{\tau}[u(1,t) - u(0,t)] \end{pmatrix}$$

$$f_\partial = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{D}{\tau}[u(0,t) - u(1,t)] \\ 0 \end{pmatrix}$$

proponemos la matriz W_B de la siguiente forma

$$W_B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual satisface la condición

$$W_B \begin{pmatrix} f_\partial \\ e_\partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observamos directamente por la forma de la matriz W_B que el rango de W_B es 2. Además notamos que debido a la definición de la matriz P_0 se satisface que $\mathrm{Re}P_0 \leq 0$. Finalmente, procedemos a calcular $W_B \Sigma W_B^*$

$$W_B \Sigma W_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Por el inciso (iv) del teorema 2.2.3 se cumple que el operador A asociado al sistema hamiltoniano genera un C_0 semigrupo.

Únicamente resta demostrar que el problema semilineal (3.18) tiene solución. Para ello verificaremos las condición del teorema 1.6.2 y con esto demostrar que (3.18) tiene de hecho soluciónes clásicas.

Como $f(t,u) = u(1-u) = u - u^2$ necesitamos demostrar que es continuamente diferenciable respecto de u pues no depende de t. Primero notamos que la función está bien definida pues $D(A) \subseteq H_0^1 \times H^1$ y estos espacios forman un álgebra de Banach (Adams y Fournier [1] teorema 4.39) por tanto si $u \in H^1$ entonces $u^2 \in H^1$.

Además $f(t,u)$ es resta de funciones $u - u^2$ y la primera , la función udentidad $u \mapsto u$ es continuamente diferenciable. La función $u \mapsto u^2$ también es continuamente diferenciable con diferencial $2u$ entonces por teorema 1.6.2 el problema (3.18) tiene solución clásica cuando

$$\begin{pmatrix} J_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in D(A).$$

En resumen hemos demostrado el siguiente teorema para la ecuación Fisher-KPP.

Teorema 3.4.1. *Consideremos el sistema de ecuaciones (3.19) en una dimensión espacial en* $[0,1] \times [0,\infty)$*, con* F *definida en (3.23). Con condiciones iniciales*

$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$J(x,0) = J_0(x)$$

Si además suponemos la condición de frontera

$$J(1,t) = 0 = J(0,t)$$

entonces el problema de valores en la frontera para la ecuación de Fisher-KPP está bien planteado como problema de Cauchy, por lo tanto tiene solución única.

Si además se cumple que

$$\begin{pmatrix} J_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in D(A).$$

entonces la solución es una solución clásica.

3.4.2 Ecuación biestable

La ecuación biestable o ecuación de Nagumo o ecuación FHN (3.24) es una de las llamadas ecuaciones de reacción-difusión y es una ecuación parabólica semilineal.

$$\frac{\partial}{\partial t}u = D\Delta u + u(u-1)(\alpha - u) \tag{3.24}$$

Esta ecuación es un caso especial de la ecuación general (3.15) cuando $f(u) = u(1-u)(\alpha - u)$, donde $0 < \alpha < 1$.

Para el caso de reacción difusión hiperbólica en una dimensión espacial, utilizando la no homogeneidad tipo biestable o Nagumo obtendríamos la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{D}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + (\frac{1}{\tau} - 1 + 2u)\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{\tau}u(u-1)(\alpha - u) \qquad (x,t) \in [0,1] \times (0,T) \tag{3.25}$$

$$u(x,0) = u_0 \qquad J(x,0) = J_0 \tag{3.26}$$

Si ponemos las condiciones de frontera $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ el desarrollo para demostrar que el operador A asociado al sistema hamiltoniano de la ecuación (3.25) es completamente análogo al desarrollo realizado en la sección de la ecuación de Fisher-KPP.

Para aplicar los teoremas del capitulo 2 utilizaremos el sistema de ecuaciones (3.19) con F definida como sigue

$$F\begin{pmatrix} J \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u(u-1)(\alpha - u) \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Para aplicar el teorema 1.6.2 y concluir que (3.25) tiene solución clásica única debemos verificar que $f(t,u)$ es continuamente diferenciable pero $f(t,u) = f(u)$, resta verificar que es continuamente diferenciable en u.Esta bien definida pues $u \in H_0^1 \cap H^2$ y este espacio es álgebra de Banach por tanto los productos están bien definidos.

Desarrollando $f(u) = u(u-1)(\alpha - u) = (1+\alpha)u^2 - \alpha u - u^3$ resulta otra vez una suma de funciones donde u es continuamente diferenciable , u^2 es continuamente diferenciable y u^3 también. Entonces por teorema 1.6.2 el problema (3.19) tiene solución clásica cuando

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ J_0 \end{pmatrix} \in D(A)$$

Teorema 3.4.2. *Consideremos el sistema de ecuaciones (3.19) en una dimensión espacial en* $[0,1] \times [0,\infty)$*, con* F *definida en (3.27). Con condiciones iniciales*

$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$J(x,0) = J_0(x)$$

Si además suponemos la condición de frontera

$$u(1,t) = 0 = u(0,t)$$

entonces el problema de valores en la frontera para la ecuación de biestable está bien planteado como problema de Cauchy, por lo tanto tiene solución única.

Si además se cumple que

$$\begin{pmatrix} J_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in D(A).$$

entonces la solución es una solución clásica.

Capitulo 4

Conclusiones

En este trabajo resolvimos los problemas de existencia y unicidad para sistemas port-hamiltonianos, sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\zeta,t) = P_1\frac{\partial}{\partial \zeta}(H(\zeta)x(\zeta,t)) + P_0(H(\zeta)x(\zeta,t)) \quad x \in [a,b] \; y \; t \geq 0,$$

con condiciones iniciales y condiciones de frontera. Observamos que tales sistemas port-hamiltonianos aparecen en problemas de diversas disciplinas científicas.

Observamos que al plantear un sistema port-hamiltoniano de ecuaciones diferenciales parciales como un problema de Cauchy abstracto y utilizar los resultados de la teoría de semigrupos, resulta mas sencillo resolver el problema de existencia y unicidad de las soluciones.

Encontramos las condiciones de frontera que se deben de imponer a un sistema port-hamiltoniano para que el operador asociado al sistema sea generador infinitesimal de un C_0 semigrupo.

Con el resultado del teorema 2.2.3 observamos que, para que el operador A, definido como

$$Ax := P_1\frac{d}{d\zeta}(Hx) + P_0(Hx),$$

sea generador infinitesimal de un C_0 semigrupo, debemos verificar en las matrices P_0, W_B y Σ las siguientes condiciones:

1. rango $(W_B) = n$.
2. $W_B \Sigma W_B^* \geq 0$.
3. $\mathrm{Re}(\langle P_0, \cdot \rangle) \leq 0$.

Con este resultado el problema de demostrar la existencia y unicidad de soluciones de un sistema port-hamiltoniano, se reduce a realizar cálculos en matrices. Lo cual es más sencillo que otros métodos que se utilizan en la teoría clásica de ecuaciones diferenciales parciales para resolver los problemas de existencia y unicidad. Esto lo observamos en el capítulo de aplicaciones, donde resolver los problemas de existencia y unicidad de las soluciones para varios sistemas de ecuaciones resultó relativamente sencillo aplicando el teorema 2.2.3 o 2.2.4.

Únicamente debemos plasmar las condiciones de frontera dentro de la matriz W_B y las variables e_∂ y f_∂.

Además observamos que estos métodos basados en la teoría de C_0 semigrupos se pueden utilizar para estudiar también ecuaciones diferenciales parciales semilineales (Sección 3.4). Por lo tanto el teorema 2.2.3, junto con los teoremas expuestos en la sección 6 del capítulo

1, nos permiten resolver sistemas port-hamiltonianos semilineales. Verificando las mismas condiciones matriciales y suponiendo algunas condiciones de diferenciabilidad.

Otro aspecto importante es que pudimos aplicar el teorema 2.2.3 (o teorema 2.2.4) para estudiar el sistema de ecuaciones de Cattaneo-Maxwell, el cual es un sistema de ecuaciones no tan estudiado. Con este teorema pudimos resolver los problemas de existencia y unicidad para este sistema de ecuaciones en un problema de valores en la frontera.

Sin embargo un problema del método que presentamos en este trabajo, es que no ofrece respuesta sobre la forma de las soluciones del sistema port-hamiltoniano, a diferencia de otros métodos, por ejemplo el método de separación de variables, donde se construye la solución. Con los resultados presentados en este trabajo, no podemos construir una solución ni deducir otras propiedades como saber si es acotada, etcétera. Sin embargo es una buena herramienta para resolver los problemas de existencia y unicidad de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Apéndice A

Análisis Funcional

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados básicos de análisis funcional que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Todos ellos se enuncian sin demostraciones, las demostraciones de todos estos resultados se pueden encontrar en los libros clásicos de análsis funcional de Yosida [28], Hille y Phillips [13] y Brezis [4].

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, es decir, un espacio vectorial real, completo respecto a la topología inducida por la norma.

E' denota el espacio dual de E, es decir, el espacio todas las funciones lineales contínuas de E en $\mathbb{R}$. Al espacio dual se le asigna usualmente la siguiente norma, que lo convierte también en espacio de Banach:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|f(x)| : x \in E\} \ , f \in E' \tag{A.1}$$

Frecuentemente se escribe $\langle f, x \rangle$ en lugar de $f(x)$ y en ocasiones a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se le llama producto escalar de la dualidad E', E.

Se denota por B_E a la bola cerrada en el espacio E

$$B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

A.1 Teoremas fundamentales

Teorema A.1.1 (Hahn-Banach). *Sea $p : E \to \mathbb{R}$ una función que satisface:*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \forall x \in E \ y \ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{A.2}$$

$$p(x + y) = p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in E. \tag{A.3}$$

Sea $G \subset E$ un subespacio lineal de E y $g : G \to \mathbb{R}$ una funcional lineal tal que:

$$g(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in G. \tag{A.4}$$

Entonces existe un funcional $f : E \to \mathbb{R}$ que extiende a g, es decir, $f(x) = g(x) \ \forall x \in G$ y que además satisface:

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in E. \tag{A.5}$$

Cuando E es un espacio normado, la función p que aparece en el teorema se puede sustituir por la norma, pues una norma satisface las condiciones 2 y 3 lo cual en este caso implica que si g es un funcional continuo definida en un subespacio de E entonces se puede extender a un funcional continuo f definida en todo E y que, además, no cambia la norma. Además se obtiene el siguiente corolario.

Corolario A.1.1.1. *Para cada $x_0 \in E$ existe $f_0 \in E'$ tal que:*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \text{ y } \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

Definimos el llamado mapeo de dualidad en espacios de Banach .

Definición A.1.1 (Mapeo de dualidad)**.** Sea $x_0 \in E$ entonces el mapeo de dualidad se define como el siguiente conjunto:

$$F(x_0) = \{f_0 \in E' : \|f_0\| = \|x_0\| \ y \ \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2\}.$$

Observación. A partir del teorema de Hahn-Banach se deduce que el conjunto $F(x_0)$ siempre será no vacío, por tanto el mapeo de dualidad estará siempre bien definido. Sin embargo, podría contener más de un elemento, es decir, mapea elementos de E en elementos del conjunto potencia de E.

Teorema A.1.2 (Banach-Steinhaus, Teorema de acotación uniforme)**.** *Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $(T_i)_{i \in I}$ una familia de operadores lineales continuos de E en F que satisface la siguiente condición:*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty, \qquad \forall x \in E. \tag{A.6}$$

Entonces

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty. \tag{A.7}$$

Es decir, existe una constante $c > 0$ tal que $\|T_i(x)\| \leq c\|x\|$, $\forall i \in I$.

Definición A.1.2 (Gráfica de un operador)**.** Sean E y F espacios de Banach y $T : E \to F$ un operador lineal. La gráfica de T, denotada como $G(T)$, se define como:

$$G(T) = \{(x, T(x)) \in E \times F | x \in E\}.$$

Para el producto de dos espacios de Banach, $(E, \| \cdot \|_E)$ y $(F, \| \cdot \|_F)$, podemos considerar la siguiente norma

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = \|x\|_E + \|y\|_F, \qquad x \in E \ , \ y \in F.$$

Con esta norma, llamada en ocasiones *norma producto*, el producto $E \times F$ es también un espacio de Banach.

Como $G(T)$ resulta ser un subespacio lineal de $E \times F$ le asignamos esta norma producto a la gráfica de T. Con esto enunciamos el teorema de la gráfica cerrada. Este es uno de los teoremas mas importantes del análisis funcional y resultará muy útil en este trabajo.

Teorema A.1.3 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean $(E, \| \cdot \|_E)$ y $(F, \| \cdot \|_F)$ espacios de Banach. Sea $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal. Entonces $G(T)$ es cerrado si y sólo si T es contínuo.*

Observación. Para demostrar que un operador lineal $A : D(A) \subseteq E \longrightarrow F$ es cerrado se debe demostrar que la gráfica es cerrada, en el sentido topológico, en la topología de la norma y esto se puede hacer mediante sucesiones. Para ello es necesario demostrar que si $(x_n) \subset D(A)$, $x_n \to x$ y $A(x_n) \to y$, entonces $x \in D(A)$ y $A(x) = y$.

A.2 Topologías débiles

Definición A.2.1 (Topología débil)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y E^* su espacio dual se define la topología débil de E como la topología más gruesa que hace continuas a las funciones de E^*.

Como consideramos $\mathbb{R}$ con la topología usual los abiertos de la topología débil se escriben como

$$\bigcup(\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(V_i))$$

donde I es conjunto finito y $V_i \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $f_i \in E^*$. Las uniones son arbitrarias, es decir, puede ser una cantidad infinita de uniones.

Observación. Una propiedad importante es que $(x_n) \subset E$ converge en la topología débil a un elemento $x \in E$, lo cual se denota como $x_n \rightharpoonup x$, si y sólo si $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$.

Como el espacio dual $(E^*, \|\cdot\|)$ resulta ser un espacio de Banach entonces se pueden definir bien la topología fuerte y débil.

Observación. Si $x \in E$ entonces $\langle \cdot, x\rangle$ define un funcional linear acotado en E^*, es decir $\langle \cdot, x\rangle$ es un elemento de E^{**}. Esto muestra que existe una inclusión continua en $E \hookrightarrow E^{**}$.

Definición A.2.2 (Topología débil-estrella)**.** La topología débil * es la topología débil asociada a la familia $\{\langle \cdot, x\rangle\}_{x\in E}$, es decir, es la topología más gruesa que hace continuas a los funcionales $\langle \cdot, x\rangle$ asociados a elementos de E. Esta topología la denotaremos como $\sigma(E, E^*)$.

Observación. Una sucesión (f_n) en E^* converge en la topología débil * a un elemento $f \in E^*$, y se denota como $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si y sólo si $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in E$.

El siguiente resultado es uno de los teoremas relacionados con la topología débil * más importantes. Aquí se observa la importancia que tiene esta topología en el estudio del espacio dual de un espacio de Banach. Se utilizará para demostrar propiedades de los C_0 semigrupos en el capitulo 1.

Teorema A.2.1 (Teorema Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *La bola cerrada unitaria del espacio dual* $B_{E^*} := \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$ *es compacta en la topología débil-estrella.*

A.3 Integral de funciones vectoriales

Por funciones vectoriales se entenderán funciones $f : [a, b] \longrightarrow E$, donde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y E un espacio de Banach, es decir, $f(t) \in E$ $\forall t \in [a, b]$.

Como el objetivo de este trabajo es estudiar casos particulares del llamado problema de Cauchy abstracto (PCA), es decir, intentar resolver ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, es importante introducir el concepto de integral de Lebesgue en espacios de Banach, el cual es una generalización del concepto estudiado tradicionalmente en análisis real. A esta integral también se le conoce como integral de Bochner y como referencia se puede consultar además de los textos citados de anaálsis funcional, los libros de Dunford y Schwartz [7], Cazenave y Haraux [6] y Brezis [3].

Definición A.3.1. Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f : I \to E$ una función vectorial.

(i) f es una función simple si se puede representar en la forma:

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{I_k}, \tag{A.8}$$

donde $I_k \subset I$ son subconjuntos medibles ajenos dos a dos, y 1_{I_k} representa a la función característica del conjunto I_k y $x_k \in E$.

Para funciones simples y considerando λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ restringida a I, la integral de Lebesgue se define como:

$$\int_I f(s)ds := \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda(I_k). \tag{A.9}$$

(ii) Se dice que una función f es fuertemente medible si f se puede aproximar puntualmente por una sucesión de funciones simples (f_n) en I, tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \quad a.e. \text{ en } I. \tag{A.10}$$

(iii) Una función f es Bochner integrable si f es fuertemente medible y además existe una sucesión de funciones simples en I tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(s) - f_n(s)\| d(s) = 0. \tag{A.11}$$

En este caso la integral de f se define como:

$$\int_I f(s)ds := \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(s)ds. \tag{A.12}$$

A continuación se mencionan algunas de las propiedades de las funciones medibles e integrables.

Teorema A.3.1. *Sea $f : I \to E$ una función vectorial. Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles que convergen a f en el sentido de (A.10), entonces f es medible.*

Teorema A.3.2 (Teorema de Bochner)**.** *Para una función medible $f : I \to E$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(i) f es integrable,

(ii)

$$\int_I \|f(s)\|ds < \infty.$$

Algunas de las propiedades mas conocidas de la integral de Lebesgue se preservan en esta integral definida arriba. Son válidos también los teoremas de la convergencia dominada y el teorema de Fubini. Además esta integral se relaciona de forma adecuada con operadores cerrados.

Teorema A.3.3. *Sea $A : D(A) \subseteq X \to Y$ un operador cerrado entre los espacios de Banach E y F. Si $f : I \to E$ es integrable y $f(s) \in D(A)$ para casi todo $s \in I$ y además $Af : I \to F$ es integrable, entonces:*

(i)

$$\int_I f(s)ds \in D(A).$$

(ii)

$$A(\int_I f(s)ds) = \int_I Af(s)ds.$$

Una vez definida la integral de funciones vectoriales se puede definir también los espacios L^p para funciones vectoriales, o mejor dicho para clases de equivalencia de funciones vectoriales, donde se identifican funciones que difieren en un conjunto de medida cero. Esto se realiza de forma completamente análoga a la forma usual de construir los espacios L^p en análisis real.

Definición A.3.2. Si $f : I \longrightarrow E$ denota la clase de equivalencia de f definimos los espacios

$$L^p(I, E) := \left\{ f : I \longrightarrow E : f \text{ es medible } y \ \|f\|_p^p := \int_I \|f(s)\|^p ds < \infty \right\} \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

$$L^\infty(I, E) := \left\{ f : I \longrightarrow E : f \text{ es medible } \ y \ \|f\|_\infty := \sup_{s \in I} \|f(s)\| < \infty \right\}$$

A.3.1 Espacios de Sobolev de funciones vectoriales

De manera completamente análoga al caso usual para funciones de variable real, podemos definir el concepto de derivada débil y después con este concepto definimos lo espacios de Sobolev para funciones vector valuadas.

De manera análoga también $L^1_{loc}(\Omega, E)$ denota el espacio de clases de equivalencia de funciones integrables en subconjuntos compactos,$K \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}$, si Ω compacto entonces $L^1_{loc}(\Omega, E)$ coincide con $L^1(\Omega, E)$.

Definimos $C_0^\infty(\Omega)$ como la clase de funciones infinitamente diferenciables en Ω y con soporte compacto, también llamadas funciones de prueba.

Definición A.3.3 (Derivada débil)**.** Una función $f \in L^p(I, E)$ es debilmente diferenciable si existe una función $g \in L^1_{loc}(I, E)$ tal que

$$-\int_I f\phi' dt = \int_I g\phi dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I; \mathbb{R}).$$

Observación. En muchas ocasiones se utiliza la misma notación $\frac{d}{dt}$ para las derivadas débiles. La definición de derivada débil se obtiene de intentar aplicar la formula de integración por partes para intercambiar, en cierto sentido, las derivadas a las funciones de prueba. Siguiendo esta analogía podemos definir derivadas débiles de orden k como

$$(-1)^{(k)} \int_I f\phi^{(k)} dt = \int_I g\phi dt \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(I; \mathbb{R}) \text{ y } g \in L^1_{loc}(I, E)$$

Definición A.3.4 (Espacio de Sobolev). Definimos los espacios de Sobolev de funciones vectoriales como

$$W^{1,p}(I;E) := \left\{ f \in L^p(I;E) : \text{ existe } g \in L^p(I;E) \text{ tal que } \int_I f\phi' = -\int_I g\phi,\ \forall \phi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R}) \right\}.$$

El siguiente teorema muestra que la definición de espacio de Sobolev para funciones vectoriales es equivalente a la generalización de las equivalencias usuales para el caso de funciones de variable real. Por ejemplo es equivalente a la condición de continuidad absoluta. La demostración del teorema se puede encontrar en Brezis [3].

Teorema A.3.4. *Sea $f \in L^p(I;E)$ con $1 \leq p < \infty$ y $I = [a,b]$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) $f \in W^{1,p}(I;E)$.

(ii) Existe $g \in L^p(I;E)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{b-h} \|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - g(t)\| dt = 0.$$

(iii) Existe $k \in L^p(I;E)$ tal que

$$\int_I f(t)\phi'(t)dt = -\int_I k(t)\phi(t)dt,$$

en tal caso se cumple

$$\frac{d}{dt} f = g = k \quad a.e. \text{ en I.}$$

□

Referencias

[1] Adams, R.A. and Fournier, J.J., Sobolev spaces (Vol. 140). Academic press, 2003.

[2] Augner, B. and Jacob, B., Stability and stabilization of infinite-dimensional linear port-Hamiltonian systems. arXiv preprint arXiv:1312.4307, (2013).

[3] Brezis, H., Opérateurs maximaux monotones. Elsevier Science, 1973.

[4] Brezis, H., Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science and Business Media, 2010.

[5] Cattaneo, C. Sulla conduzione del calore, Atti Sem. Mat. Fis. della Universita de Modena, 3, 3(1948).

[6] Cazenave, T., Haraux, A., An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[7] Dunford, N., Schwartz, J.T., Bade, W.G. and Bartle, R.G., Linear operators. New York: Wiley-interscience, 1971.

[8] Dugundji, J., Topology. Allyn and Bacon Inc., 1966.

[9] Engel, K.J., Nagel, R., One-parameter semigroups for linear evolution equations (Vol. 194). Springer Science and Business Media, 2000.

[10] Evans, L.C., Partial differential equations. AMC, 2010.

[11] Fisher, R. A., The wave of advance of advantageous genes. Ann Eugenics, 1937,7,355-369.

[12] Fourier, J., 1998, Théorie analytique de la chaleur, Editions Jacques Gabay, Paris. Reprint of the 1822 original.

[13] Hille, E. and Phillips, R.S., Functional analysis and semi-groups. American Mathematical Soc, 1996.

[14] Jacob, B., Morris, K. and Zwart, H., C 0-semigroups for hyperbolic partial differential equations on a one-dimensional spatial domain. *Journal of Evolution Equations* **15** (2015), pp. 493-502.

[15] Jacob, B. and Zwart, H., Linear port-Hamiltonian systems on infinite-dimensional spaces. Springer Science and Business Media, 2012.

[16] John, F., Partial differential equations, Vol. 1 Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, 1982.

[17] Kolmogorov, A. N., Petrovsky, I. G., Piskunov, N. S., Investigation of the equation of diffusion combined with increasing of the substance and its application to a biology problem. Bull Moscow State University Ser A: Math and Mechanics 1937, 1(6),1-25.

[18] Maxwell, J.C., On the dynamical theory of gases, *Trans. Royal Soc. London* **157** (1867), pp. 49-88.

[19] Onsager, L., Reciprocal relations in reversible processes. I., *Phys. Rev.* **37** (1931), pp. 405-426.

[20] Onsager, L., Reciprocal relations in reversible processes. II., *Phys. Rev.* **38** (1931), pp. 2265-2279.

[21] Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential. Equations. Vol. 44 Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag., 1983.

[22] Peshkov, V., 'Second Sound' in Helium II, *J. Phys.* (Moscow) **8** (1944), p. 381.

[23] Rudin, W., Functional analysis. International series in pure and applied mathematics, 1991.

[24] Salsa, S., Partial differential equations in action: from modelling to theory. Springer Science and Business Media, 2008.

[25] Strauss, W.A., Partial differential equations: An introduction. John Wiley and Sons. New York, 1992.

[26] Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A., Equations of mathematical physics (Vol. 39). Courier Corporation, 1990.

[27] Van der Schaft A. y Jeltsema, D. Port-Hamiltonian Systems Theory: An Introductory Overview. Foundations and Trends in Systems and Control, Vol.1, no 2-3, pp 173-378, 2014.

[28] Yosida, K., Functional analysis. Springer, 1974.