



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SOBRE CRITERIOS DE ADMISIBILIDAD DE SOLUCIONES AL  
MODELO DE TRÁFICO DE LIGHTHILL-WHITHAM**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A**

**JUAN FRANCISCO LEYVA BONILLA**

**DIRECTOR DE LA TESINA: DR. RAMÓN G. PLAZA VILLEGAS**

**MÉXICO, D.F.**

**AGOSTO, 2010**

SOBRE CRITERIOS DE ADMISIBILIDAD DE  
SOLUCIONES AL MODELO DE TRÁFICO DE  
LIDTHILL-WHIHTAM

Juan Francisco Leyva Bonilla

Agosto, 2010



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>1 Modelos de tráfico</b>	<b>1</b>
1.1. Ley de conservación escalar y derivación del modelo . . . . .	1
1.2. Problema de Riemann . . . . .	5
1.3. Función de flujo general . . . . .	8
<b>2 Soluciones no entrópicas.</b>	<b>11</b>
2.1. Alternativa de Gasser. . . . .	11
2.2. Ejemplos . . . . .	13
<b>3 Entropía y condiciones de admisibilidad</b>	<b>19</b>
3.1. Producción de entropía y condiciones de admisibilidad . . . . .	19
<b>4 Conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>



# Agradecimientos

A mi familia, principalmente a mis padres por todo el apoyo y respaldo que siempre me han brindado, pero sobre todo por su cariño.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

A todos los investigadores y profesores que contribuyeron a mi formación durante el periodo de la maestría. En especial al Dr. Minzoni por ser mi tutor académico.

A mi asesor y director de tesina, el Dr. Ramón Plaza, por su dedicación, conocimientos, entusiasmo y apoyo que contribuyeron en gran medida al desarrollo de este trabajo.

A mis amigos de toda la vida. De la misma manera a mis compañeros, amigos y a todas las personas que de manera directa o indirecta contribuyeron a mi formación personal y académica.

Por ultimo pero no menos importante, quiero agradecer de manera especial a Susana. Por todo el apoyo, paciencia y cariño.



# Introducción

La sociedad actual enfrenta grandes problemas; uno de los más importantes es el tráfico automovilístico. Debido a la exorbitante población en las metrópolis, el tráfico no sólo ocasiona congestionamientos viales, que se traducen en instancias muy largas para llegar de un sitio a otro, sino también es un factor en accidentes y contaminación.

El problema del tráfico es demasiado complicado como para encontrar una solución final y práctica; por eso el hombre se ha preocupado por estudiar problemas en una escala más pequeña como lo son: el control y ubicación de semáforos, dónde y cómo construir accesos o salidas, incorporar nuevas formas de transporte, etc. En particular, la meta es entender el fenómeno del tráfico para tomar decisiones que eviten accidentes, disminuyan congestiones, maximicen el flujo del tráfico, minimicen la contaminación de los autos, entre otras cuestiones.

En la década de 1950 Lighthill y Whitham [L-W] e independientemente Richards [Ri], propusieron un modelo que permiten estudiar de manera cualitativa el flujo de tráfico tomando en cuenta solamente la densidad de tráfico y el campo de velocidades. Este modelo fue el primero en utilizar la teoría de las leyes de conservación, que en aquel entonces apenas empezaba a desarrollarse. El modelo del tipo L-W no se enfoca en el comportamiento individual de los autos, más bien se centra en situaciones donde es observable la evolución del tráfico como un “flujo” de autos.

El objetivo de este trabajo no es resolver los problemas antes mencionados, sino estudiar el fenómeno del tráfico únicamente considerando modelos determinísticos y dejaremos a un lado un posible estudio estadístico o probabilístico. En particular, el objeto de este trabajo es entender la dinámica que exhibe el flujo del tráfico en un camino unidireccional, analizando un modelo del tipo L-W que en su turno es una ley de conservación escalar.

En el primer capítulo se deriva una ley de conservación escalar para modelar el flujo de tráfico. Además se verá que las soluciones admitidas al modelo están sujetas a un criterio de admisibilidad.



Se estudian algunas situaciones del tráfico real, para una función de flujo cóncava, como son: un congestionamiento y el cambio de luz roja a verde en un semáforo.

A manera de resumen se expone el problema de Riemann para el caso de una función de flujo sin cambio de convexidad y también en caso de que tenga un punto de inflexión.

En el capítulo dos se discute una condición, propuesta por Gasser [Gas], que selecciona soluciones alternativas al problema de Riemann del modelo de L-W y que muestran un comportamiento más acorde con la realidad del tráfico. El criterio de Gasser es aplicado a dos ejemplos clásicos en el estudio de la dinámica del tráfico, el “bump” y el “cluster”.

En el capítulo tres se discute otro criterio de admisibilidad de soluciones que fue propuesto por Knowles [Kn] con el objetivo de analizar el criterio de Gasser desde otro punto de vista. El criterio está motivado por el hecho de que las leyes de conservación tienen su origen en la dinámica de gases y hace mímica de la segunda ley de la termodinámica. Durante el trabajo nos referimos a este criterio como la “segunda ley”. Este nuevo criterio es comparado con criterios de admisibilidad ya conocidos en la teoría de las leyes de conservación, el criterio de Lax [Lax1] y el de Oleinik [Oln] y por supuesto con el criterio de Gasser.

# Capítulo 1

## Modelos de tráfico

### 1.1. Ley de conservación escalar y derivación del modelo

Antes de poder estudiar la evolución del tráfico debemos caracterizar las variables fundamentales del problema, que son la velocidad, la densidad de autos y el flujo de tráfico. Después veremos qué relaciones hay entre las variables, y así plantearémos de manera concreta un modelo que describa situaciones de tráfico reales. Aclaremos que la palabra “auto” se usa de manera imprecisa para referirnos a cualquier vehículo que transite por la carretera.

Imaginemos cierto número de autos, digamos  $N$ , moviéndose por la carretera. Denotemos la posición de cada uno por  $x_i(t)$  y su velocidad  $v_i(t) = \frac{dx_i}{dt}$ . Hay varias maneras de medir la velocidad y la más común es fijarnos en la velocidad de cada auto; sin embargo esta forma es poco práctica cuando  $N$  es muy grande. Otra manera de medir la velocidad es designar a cada punto en la carretera (en cada tiempo) una única velocidad  $v(x, t)$  a la cual llamaremos *campo de velocidades*. Esta velocidad es la que un observador mide a tiempo  $t$  y en una posición fija  $x$ , es decir, es la velocidad del auto  $x_i$  a tiempo  $t$ :  $v(x_i(t), t) = v_i(t)$ .

La existencia del campo de velocidades  $v(x, t)$  significa que a cada punto  $(x, t)$  le corresponde una única velocidad y por lo tanto no consideramos que los autos se puedan rebasar, ya que habría dos velocidades distintas en un punto.

Por otra parte, un observador en una posición fija en la carretera puede medir la cantidad de autos que pasan en un tiempo determinado y podría calcular el promedio de autos que pasan por hora. Dicha cantidad se llama *flujo de tráfico* y la denotaremos por  $f$ . Otra cantidad que puede ser medida (en un tiempo fijo) es el número de autos que se encuentran en un intervalo de la carretera. El número de autos por kilómetro es la *densidad de autos* y es denotada por  $\rho$ .

Es claro que tanto el flujo como la densidad son funciones que dependen de la posición  $x$  y el tiempo  $t$ , y que podrían tener comportamientos distintos a lo

largo de la carretera o en situaciones fuera de lo normal, como por ejemplo: que la carretera tenga baches, secciones angostas del camino o con muchas curvas, etc. Por esta noción, consideraremos una carretera homogénea. Las situaciones que nos interesan son las de un gran número de autos y nos centraremos en estudiar el comportamiento colectivo de gran cantidad de vehículos (teoría macroscópica), por lo que descartaremos variaciones súbitas en las variables y consideraremos únicamente las variables promedio del tráfico, es decir, que sean funciones suaves en tiempo y espacio.

Ahora mostraremos la relación que conecta a las variables fundamentales del tráfico.

Pensemos en una situación simple de tráfico. Supongamos que en la carretera el tráfico se mueve a una velocidad constante  $v_0$  con densidad constante  $\rho_0$ . Cada auto se mueve con la misma velocidad, entonces la distancia entre los autos no cambia por lo que la densidad no cambia. Con estas suposiciones, queremos saber cual es el flujo. Un observador mide el número de autos que lo pasan en un tiempo de  $\tau$  horas. En dicho tiempo cada auto se ha movido una distancia de  $v_0\tau$ , entonces el número de autos que ha pasado al observador en un tiempo  $\tau$  es el número de autos en la distancia  $v_0\tau$ . Recordemos que el número de autos por kilómetro es  $\rho_0$ , esto quiere decir que el número de autos que ha pasado al observador en  $\tau$  horas es  $\rho_0 v_0 \tau$ . Por lo tanto el número de autos por hora, el flujo de tráfico, es  $f = \rho_0 v_0$ . Aunque en este caso hemos considerado un modelo simplificado, la relación que se cumple es:

$$f(x, t) = \rho(x, t)v(x, t).$$

En un intervalo del camino  $I = [a, b]$  el número total de autos es

$$N = \int_a^b \rho(x, t) dx. \quad (1.1)$$

Supongamos que no hay accesos ni salidas en la carretera y que los autos no se destruyen (no hay colisiones). La cantidad de autos en  $I$  puede cambiar con el tiempo; de hecho, el cambio resulta del cruce de autos en las fronteras del intervalo. La cantidad de autos en  $I$  decrece con los que salen en  $x = b$  y aumenta con los que entran en  $x = a$ . Entonces el cambio en el tiempo del número de autos es:

$$\frac{dN}{dt} = f(a, t) - f(b, t). \quad (1.2)$$

Combinando las ecuaciones (1.1) y (1.2) tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t).$$

Es claro que

$$f(a, t) - f(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx$$

Combinando las ecuaciones anteriores tenemos

$$\int_a^b \left( \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right) dx = 0$$

La ecuación anterior nos dice que la integral es cero para cualesquiera límites de integración lo cual implica que el integrando es cero, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Recordemos que  $f = \rho v$ , entonces la ley de conservación del número de autos es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0.$$

Si conociéramos la velocidad  $v$  entonces la ecuación anterior se reduce a una ecuación diferencial parcial para la densidad. En general la velocidad es desconocida y se podrían llevar a cabo experimentos para determinarla.

Si el tráfico es lo suficientemente ligero un conductor tiene una gran libertad para conducir con la única restricción, tal vez, del límite de velocidad de la carretera. En una situación de tráfico más denso un conductor se podría encontrar con autos que tengan una velocidad menor y por lo tanto disminuir su velocidad, pero aun así el conductor podría pasarlos sin problema. Cuando la densidad es mucho más densa, el cambio de carril se vuelve casi imposible y la velocidad promedio en la carretera decrece, a veces hasta el punto de un embotellamiento o lo que se conoce como velocidad “a vuelta de rueda”.

A partir de estas observaciones, hacemos una simplificación crucial de que en cualquier punto de la carretera la velocidad de un auto depende únicamente de la densidad de autos,

$$v = v(\rho).$$

Este modelo fue uno de los primeros en su tipo y fue propuesto por Lighthill-Whitham [L-W] e independientemente por Richards [Ri] a mediados de la década de 1950.

Analicemos lo que nos dice el modelo. Si no hubiera autos en la carretera, es decir  $\rho = 0$ , un auto puede viajar a velocidad máxima  $v_m$ ,

$$v(0) = v_m.$$

Pero conforme la densidad aumenta la velocidad de un auto decrece, entonces

$$\frac{dv}{d\rho} \leq 0$$

Y si sigue aumentando la densidad llega un momento en que los autos ya no pueden avanzar, este nivel corresponde a la densidad máxima  $\rho_m$ ,

$$v(\rho_m) = 0.$$

Hay que notar que el modelo no toma en cuenta ciertos factores intrínsecos del fenómeno real y está restringido en ciertos sentidos. Por ejemplo, no toma en cuenta tiempos de reacciones del conductor o del auto y, más importante, supone que todos los autos viajan a la misma velocidad, entre otros aspectos. A sabiendas de que el modelo es simplificado investigaremos que implicaciones tiene como un primer acercamiento matemático al flujo de tráfico.

El flujo de autos, como habíamos visto antes, es  $f = \rho v$  y en consecuencia al modelo, el flujo solo depende de la densidad

$$f(\rho) = \rho v(\rho).$$

El flujo tiene algunas características generales. El flujo es cero si no hay tráfico ( $\rho = 0$ ) y cuando el tráfico no se mueve ( $\rho = \rho_m$ ). Para otros valores de la densidad ( $0 < \rho < \rho_m$ ) el flujo es positivo y además el flujo decrece cuando la densidad aumenta, lo que quiere decir que el flujo es una función cóncava

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} < 0.$$

Para hacer un estudio cualitativo de las situaciones de tráfico escogemos una función lineal que exprese la relación entre la densidad y la velocidad,

$$v(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right).$$

Es claro que esta función de velocidad tiene todas las propiedades deseadas y fácilmente obtenemos el flujo

$$f(\rho) = \rho v(\rho) = v_m \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right). \quad (1.3)$$

El flujo máximo ocurre cuando la densidad es la mitad de la densidad máxima,  $\rho_m/2$  y la velocidad es  $v(\rho_m/2) = v_m/2$ . Entonces el flujo de tráfico máximo es

$$f\left(\frac{\rho_m}{2}\right) = \frac{\rho_m v_m}{4}.$$

Esto nos conduce a una ley hiperbólica escalar de conservación de la forma

$$\rho_t(x, t) + v_m \left(\rho(x, t) \left(1 - \frac{\rho(x, t)}{\rho_m}\right)\right)_x = 0$$

con función de flujo cóncava, cuyas soluciones son soluciones débiles en el sentido distribucional [Lax1]. Para probar el modelo antes propuesto y ver si describe de manera acertada situaciones reales de tráfico estudiaremos ciertos problemas de Riemann que describiremos en la siguiente sección.

## 1.2. Problema de Riemann

En esta sección expondremos, de manera breve, las generalidades de los problemas de Riemann. Para un análisis más detallado se puede consultar [Lax1] y [LeF].

El problema de Cauchy con condiciones iniciales que son constantes por pedazos y con una discontinuidad se conoce como *problema de Riemann* y tiene la siguiente forma

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.4)$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_L, & x < 0 \\ \rho_R, & x > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Las soluciones débiles en algunos casos son discontinuas, y de hecho, las soluciones que nos importan son soluciones de clase  $C^1$  por pedazos, es decir, soluciones con un número finito de discontinuidades. Sin embargo no todas las discontinuidades son admisibles y las que lo son deben de cumplir las condiciones de salto de *Rankine-Hugoniot*. Definimos *el salto* para cualquier función  $g(\rho)$  como

$$[g(\rho)] := g(\rho_R) - g(\rho_L)$$

y la condición de salto en nuestro caso (ley de conservación escalar) es:

$$s := \frac{[f(\rho)]}{[\rho]} \quad (1.6)$$

donde  $s$  es la velocidad de la discontinuidad.

Para asegurar la unicidad de las soluciones es necesario tomar en cuenta una condición de entropía. La siguiente condición de entropía se debe a Lax [Lax1]: una discontinuidad viajando a una velocidad  $s$  que satisface la condición de Rankine-Hugoniot se dice que satisface la condición de entropía de Lax si

$$f'(\rho_R) \leq s \leq f'(\rho_L). \quad (1.7)$$

En nuestro modelo la función de flujo es cóncava y la condición de entropía de Lax se reduce a

$$\rho_L \leq \rho_R. \quad (1.8)$$

Cabe mencionar que la solución entrópica se recupera al tomar el límite de la solución de la ecuación viscosa (regularización parabólica) y en muchas aplicaciones el problema viscoso modela de manera más acertada el fenómeno en cuestión, sin embargo, para el flujo de tráfico no hay una manera obvia de regularizar la ecuación.

Para una función de flujo  $f$  estrictamente cóncava ( $f'' < 0$ ) y  $\rho_L \neq \rho_R$ , podemos distinguir dos casos.

$\rho_R > \rho_L$ : La única solución entrópica al problema de Riemann (1.4) es

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L, & x < st \\ \rho_R, & x > st \end{cases} \quad (1.9)$$

donde  $s$  está definida en (1.6). La solución representa una discontinuidad que viaja con velocidad  $s$  y se conoce como *onda de choque*.

$\rho_R < \rho_L$ : La única solución entrópica de (1.4) está dada por

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L, & x < a(\rho_L)t \\ g(\frac{x}{t}), & a(\rho_L)t < x < a(\rho_R)t \\ \rho_R, & x > a(\rho_R)t \end{cases} \quad (1.10)$$

donde  $a(\rho) = f'(\rho)$  y  $g(\xi)$  satisface  $a(g(\xi)) = \xi$ . La solución se denomina *onda de rarefacción*; notemos que la solución es continua aunque las condiciones iniciales no lo sean. La onda de rarefacción representa un abanico de características que conecta a los dos estados iniciales constantes  $\rho_L$  y  $\rho_R$ .

Los ejemplos típicos son la formación de congestionamientos y la evolución del tráfico en el cambio de luz roja a verde en un semáforo. En el cambio de luz roja a verde en el semáforo el problema de Riemann está determinado por la ecuación

$$\rho_t + v_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right) \rho_x = 0 \quad (1.11)$$

con condición inicial en  $t = 0$

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_m & , x < 0 \\ 0 & , x \geq 0 \end{cases}$$

En este ejemplo las condiciones iniciales son  $\rho_L = \rho_m > 0 = \rho_R$ , por lo tanto la solución es la onda de rarefacción (figura 1.1):

$$\rho(x, t) = \rho(x_0, 0) = \begin{cases} \rho_m & x < -v_m t \\ \frac{\rho_m}{2} \left(1 - \frac{x}{v_m t}\right) & -v_m t \leq x < v_m t \\ 0 & x \geq v_m t \end{cases}$$

El siguiente ejemplo es la situación del embotellamiento que está representado por los datos iniciales del problema de Riemann, es decir la ecuación (1.11) junto con la condición inicial

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \frac{\rho_m}{2} & x \leq 0 \\ \rho_m & x > 0 \end{cases}$$

En este ejemplo las condiciones iniciales son  $\rho_L = \frac{\rho_m}{2} < \rho_m = \rho_R$ . Por lo tanto la solución es una onda de choque (Fig. 1.2) con velocidad

$$s = \frac{[f(\rho)]}{[\rho]} = \frac{f(\rho_R) - f(\rho_L)}{\rho_R - \rho_L} = -\frac{v_m}{2}.$$

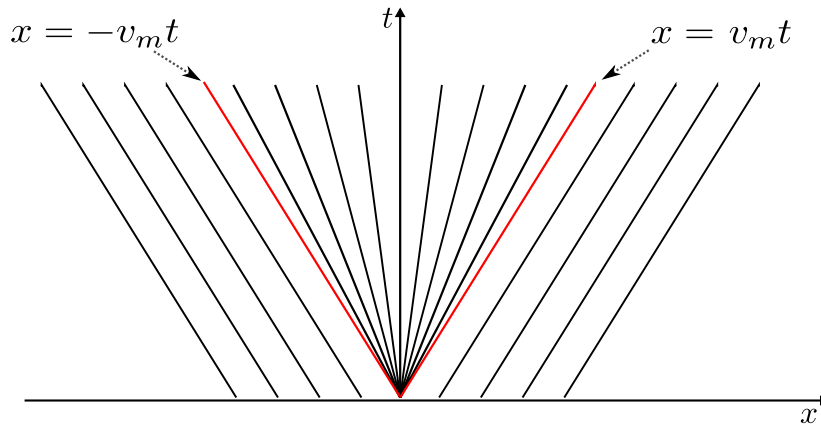


Figura 1.1: Onda de rarefaccion

Entonces una solución débil admisible es

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{\rho_m}{2} & x \leq -\frac{v_m}{2}t \\ \rho_m & x > -\frac{v_m}{2}t \end{cases}$$

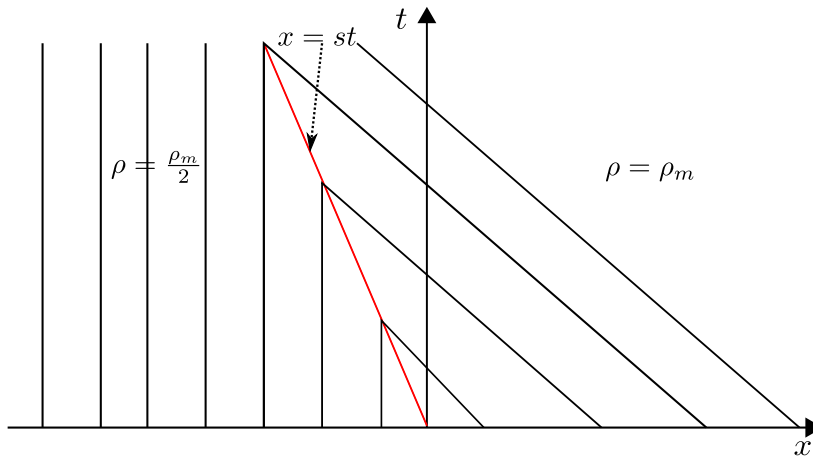


Figura 1.2: Onda de choque

La condición de entropía (1.8) Ansorge [Ans] la llama *driver's ride impulse* y tiene una interpretación razonable en el contexto del flujo de tráfico. Dice que los conductores transitan hacia el tráfico más denso sin suavizar la discontinuidad y los conductores manejan hacia tráfico menos denso suavizando el cambio de tráfico denso a menos denso.



Este comportamiento lo podemos reconocer en el flujo real de tráfico; un conductor que ve tráfico más adelante en el camino no se detiene, sino que maneja hacia el congestionamiento lo que produce un aumento en la densidad.

Como vimos en los ejemplos el modelo (1.11) junto con la condición (1.8) describe de manera adecuada situaciones reales de tráfico. Aun más, observamos que la condición (1.8) selecciona las soluciones físicamente relevantes. Desafortunadamente modelos simplificados como (1.11) no son capaces de predecir situaciones más complicadas.

### 1.3. Función de flujo general

Una manera de mejorar el modelo (1.11) es considerar funciones de flujo que no son cóncavas ni convexas, sino que poseen un punto de inflexión. Dichas funciones consisten de una parte cóncava en el régimen de baja densidad y una parte convexa en el régimen de alta densidad. Podemos observar un ejemplo en la figura 1.3.

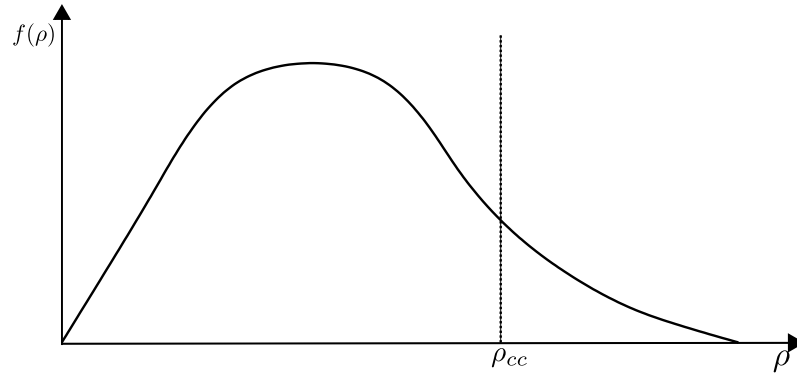


Figura 1.3: Función de flujo general, en el caso más realista.

Denotemos por  $\rho_{cc}$  al punto de inflexión de la función de flujo. En el caso de las leyes de conservación escalares con un flujo general, las soluciones de los problemas de Riemann se pueden construir explícitamente.

Recordemos que en el caso cóncavo la solución del problema de Riemann es una onda de choque o una onda de rarefacción únicamente. En el caso general, la solución es una combinación de onda de choque y de rarefacción [LeF].

Para condiciones iniciales en el régimen convexo la condición de entropía se reduce a

$$\rho_R \leq \rho_L.$$

Si consideramos problemas de Riemann con datos iniciales  $\rho_L, \rho_R \leq \rho_{cc}$  las soluciones entrópicas satisfacen la condición de “driver’s ride impulse” y son físicamente relevantes.

Ahora supongamos que los datos iniciales están en la parte convexa del flujo, es decir,  $\rho_L, \rho_R \geq \rho_{cc}$ . Entonces si  $\rho_L < \rho_R$ , la solución entrópica de la ecuación (1.11) es la onda de rarefacción, esto quiere decir que los conductores suavizan el paso hacia una densidad mayor de tráfico. Si  $\rho_L > \rho_R$ , la solución entrópica esta dada por una onda de choque. En ambos casos vemos que la solución entrópica está en contradicción con el movimiento real del flujo de tráfico.

Nos interesa describir la solución al problema de Riemann con función de flujo que tenga cambios de convexidad, en nuestro caso, con un punto de inflexión  $\rho_{cc}$ . Supongamos que la condición inicial está determinada por los estados constantes  $\rho_L$  y  $\rho_R$ . Entonces podemos observar diferentes casos:

**i)**: Observemos que si  $\rho_L, \rho_R < \rho_{cc}$  entonces nos encontramos en el régimen cóncavo de la función de flujo; o si  $\rho_L, \rho_R > \rho_{cc}$  entonces nos encontramos en el régimen convexo de función de flujo. Como antes expusimos, en ambos casos la solución entrópica al problema de Riemann consta de una onda simple, ya sea una onda de choque (1.9) o una onda de rarefacción (1.10).

**ii)**: Si  $\rho_L < \rho_{cc} < \rho_R$  o si  $\rho_L > \rho_{cc} > \rho_R$  la solución no se obtiene de manera directa como en los casos anteriores. La onda de rarefacción definida por la ecuación  $a(g(\xi)) = \xi$  deja de ser una función univaluada. A continuación describiremos la solución en el caso  $\rho_L < \rho_{cc} < \rho_R$ , la construcción de la solución en el otro caso es análoga.

Consideremos la gráfica del flujo  $f$  en el plano  $(\rho, f)$ . Para cualquier  $\rho \neq \rho_{cc}$  existe una única línea que pasa por el punto  $(\rho, f(\rho))$  y es tangente a la gráfica en un punto  $(\rho_*(\rho), f(\rho_*(\rho)))$ , tal que  $\rho_*(\rho) \neq \rho$ . La propiedad de tangencia nos dice que

$$f'(\rho_*) = \frac{f(\rho) - f(\rho_*)}{\rho - \rho_*} \quad (1.12)$$

que es la pendiente de la recta que une dichos puntos.

Supongamos que  $\rho_L < \rho_{cc}$ , entonces existe  $\rho_*(\rho_L)$ . Dependiendo del valor de  $\rho_R$  observamos los siguientes casos:

- Si  $\rho_R \in (\rho_L, \rho_*(\rho_L)]$  entonces la solución es una onda de choque clásica con velocidad definida por la relación de Rankine-Hugoniot y que conecta los estados constantes  $\rho_L$  y  $\rho_R$ . En la literatura una onda de choque se denomina clásica cuando cumple la desigualdad de Lax (1.7) estricta.
- Si  $\rho_R > \rho_*(\rho_L)$  la solución está compuesta por un choque, con velocidad definida en (1.12), que conecta  $\rho_L$  con  $\rho_*$  seguida por una rarefacción que a su vez conecta con  $\rho_R$ . El choque es una *discontinuidad de contacto derecha* ya que la velocidad del choque coincide con la velocidad de la característica a la derecha, y literalmente el choque se “pega” a la rarefacción.

En el siguiente capítulo estudiaremos una alternativa que selecciona soluciones al problema Riemann que tienen una mayor relevancia en el contexto del tráfico.

## Capítulo 2

# Soluciones no entrópicas.

### 2.1. Alternativa de Gasser.

Si nos olvidamos de la condición de entropía podemos construir soluciones alternativas, que tengan relevancia física.

Para  $\rho_{cc} < \rho_L < \rho_R$  la solución entrópica es una onda de rarefacción. Una onda de choque es una alternativa y además satisface la condición de “driver’s ride impulse”. El paso a un nivel tráfico más denso no se suaviza.

Para  $\rho_{cc} < \rho_R < \rho_L$  la solución entrópica es una onda de choque. En este caso la solución discontinua no se puede sustituir por una onda de rarefacción, ya que si pensamos en que esta situación se da en el régimen de alta densidad, entonces los conductores no suavizan el paso de densidad muy alta a densidad alta.

Antes de seguir adelante introduzcamos una condición de entropía propuesta por Oleinik [Oln] y la llamamos condición de entropía de Oleinik o la condición de entropía generalizada:

$$\operatorname{sgn}[\rho](\alpha f(\rho_L) + (1 - \alpha)f(\rho_R) - f(\alpha\rho_L + (1 - \alpha)\rho_R)) \leq 0 \quad (2.1)$$

para toda  $\alpha \in [0, 1]$ . Entonces una discontinuidad es aceptable si cumple (2.1). La condición anterior depende del signo del salto en  $\rho$ , entonces:

- si  $[\rho] > 0$  entonces (2.1) toma la forma

$$\alpha f(\rho_L) + (1 - \alpha)f(\rho_R) \leq f(\alpha\rho_L + (1 - \alpha)\rho_R)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Luego, una discontinuidad es admisible si y sólo si la gráfica de  $f$  restringida a  $(\rho_L, \rho_R)$  está por encima de la cuerda que une a los puntos  $(\rho_L, f(\rho_L))$  y  $(\rho_R, f(\rho_R))$ .

- si  $[\rho] < 0$  entonces (2.1) toma la forma

$$\alpha f(\rho_L) + (1 - \alpha)f(\rho_R) \geq f(\alpha\rho_L + (1 - \alpha)\rho_R)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Una discontinuidad es admisible si y sólo si la gráfica de  $f$  restringida a  $(\rho_L, \rho_R)$  está por debajo de la cuerda correspondiente.

La condición de entropía generalizada es un criterio geométrico que nos sirve para determinar cuando una discontinuidad es admisible y por lo tanto la solución será única [Lax2].

Por lo tanto Gasser [Gas] formula una condición a nivel de problemas de Riemann con la intención de seleccionar una solución que sea más razonable en el contexto del flujo de tráfico. El *criterio de Gasser* nos dice:

- Se selecciona choque simple y puro cuando  $\rho_L < \rho_R$ .
- Se selecciona la solución entrópica para  $\rho_R < \rho_L$

La primera opción evita cualquier tipo de suavizado cuando se maneja hacia tráfico más denso; la solución es una onda simple porque no contiene ninguna otra onda y es un choque puro porque su velocidad está definida por la relación de Rankine-Hugoniot. La segunda opción nos da una onda de rarefacción en la parte cóncava del flujo, una combinación de choque-rarefacción o un choque simple en la parte convexa del flujo.

Analicemos más detalladamente el criterio de Gasser. El criterio está formulado para cualquier función de flujo que posea un punto de inflexión.

En la primera opción,  $\rho_L < \rho_R$ , sabemos como es la solución entrópica al problema de Riemann, que depende de como se comparen los valores de la condición inicial con  $\rho_{cc}$  y la condición de entropía generalizada es que la gráfica esté por encima de la cuerda. Podemos observar 3 casos:

**a)**  $\rho_L < \rho_R < \rho_{cc}$ : la solución entrópica es una onda de choque clásica, pues satisface la desigualdad de Lax estricta. En este caso la solución alternativa coincide con la solución entrópica y por lo tanto el criterio de entropía es el mismo que el de la condición de entropía generalizada.

**b)**  $\rho_{cc} < \rho_L < \rho_R$ : la solución entrópica es una onda de rarefacción. En este caso se sustituye la rarefacción por un choque puro y la condición (2.1) nos dice que la discontinuidad no es admisible, sin embargo el criterio de Gasser nos sugiere tomar el choque no entrópico.

**c)**  $\rho_L < \rho_{cc} < \rho_R$ : la solución entrópica es un choque simple si  $\rho_R \leq \rho_*(\rho_L)$  y es un choque seguido de una rarefacción si  $\rho_*(\rho_L) < \rho_R$ . En la primera situación, la solución entrópica coincide con la solución alternativa, y por lo tanto el criterio es el mismo que la condición (2.1). En la segunda situación se descarta la solución que consta de dos ondas, y tomamos el choque clásico que une  $\rho_L$  y  $\rho_R$ .

En la segunda opción del criterio de Gasser se toma la solución entrópica, la cual ya se expuso antes, y no hay ningún cambio en la condición de entropía generalizada.

En la siguiente sección discutiremos dos ejemplos donde usamos el criterio de Gasser . En ambos casos se comparan las soluciones alternativas con las entrópicas. Veremos que el criterio alternativo nos permite escoger soluciones que tienen un comportamiento más realista.

## 2.2. Ejemplos

En esta sección analizaremos dos ejemplos que modelan situaciones reales de tráfico. En la literatura son conocidos como el “bump” y el “cluster”.

Por cuestiones prácticas y para hacer los cálculos mas explícitos tomaremos en los ejemplos como función de flujo

$$f(\rho) = \rho(\rho - 3)^2 \quad (2.2)$$

restringida al intervalo  $[0, 3]$ . En dicho intervalo  $f$  tiene un máximo en  $\rho = 1$ , un punto de inflexión en  $\rho = 2$  y  $f(0) = f(3) = 0$ . Siguiendo con la notación anterior al punto de inflexión lo denotamos por  $\rho_{cc}$ , es decir,  $\rho_{cc} = 2$ .

### El “Bump”

En este ejemplo consideramos el problema de Riemann con condición inicial (Fig.2.1).

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_{min}, & x \leq 0, 1 < x \\ \rho_{max}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $0 < \rho_{min} < \rho_{max} < 3$ .

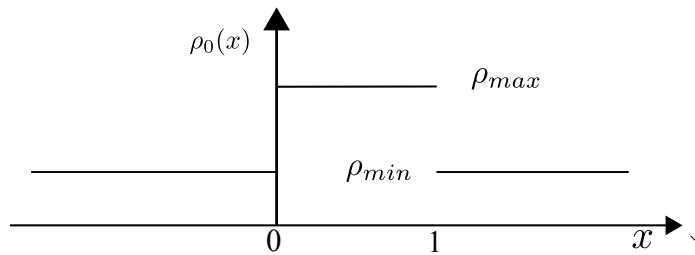


Figura 2.1: Condición inicial  $\rho_0(x)$  para el “bump”.

Supongamos que  $\rho_{min} \geq \rho_{cc}$  y tomemos valores específicos para la condición inicial,  $\rho_{min} = 2.2$  y  $\rho_{max} = 2.7$ . La condición inicial  $\rho_0(x)$  se encuentra en el régimen convexo, es decir, la solución entrópica debe satisfacer  $\rho_R < \rho_L$ . Podemos observar que la condición inicial tiene dos discontinuidades, cada una la tratamos como un problema de Riemann independiente.

Primero en  $x = 0$ , tenemos  $\rho_L = 2.2$  y  $\rho_R = 2.7$ , esto nos da como solución entrópica una onda de rarefacción  $g(\frac{x}{t})$ , centrada en  $0$ , donde  $g$  satisface

$f'(g(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t}$ . Afortunadamente para la función de flujo (2.2) la ecuación anterior puede ser resuelta explícitamente y obtenemos

$$g\left(\frac{x}{t}\right) = 2 + \sqrt{\frac{x}{3t} + 1}. \quad (2.3)$$

Luego en  $x = 1$ , tenemos  $\rho_L = 2.7$  y  $\rho_R = 2.2$ , por lo tanto la solución entrópica es una onda de choque  $\hat{x}(t)$  que satisface

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{[f(\rho)]}{[\rho]} = -2.33, \quad \hat{x}(0) = 1.$$

Luego, la onda de choque tiene la forma  $\hat{x}(t) = -2.33t + 1$ .

Después de un cierto tiempo las dos ondas interactúan y el “bump” desaparece (Fig. 2.2).

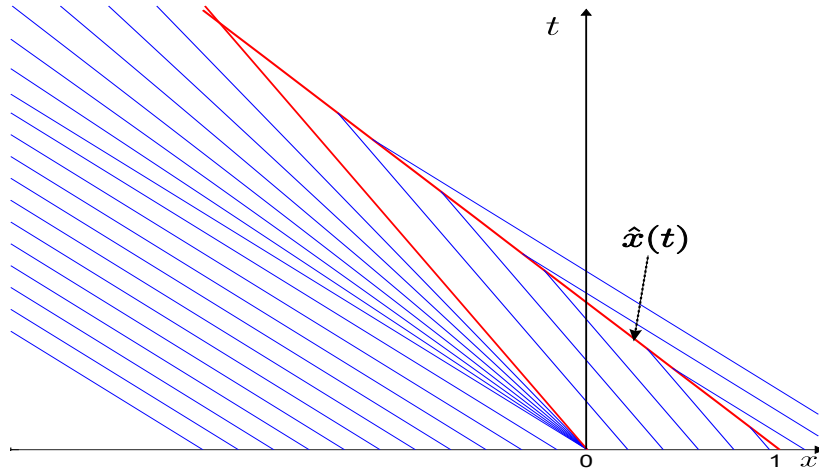


Figura 2.2: La onda de choque  $\hat{x}(t)$  interactúa con la rarefacción centrada en 0 y la estructura del bump desaparece.

La solución alternativa usando el criterio de Gasser consta de dos ondas de choque. Estas ondas tienen la misma velocidad  $s = \frac{[f(\rho)]}{[\rho]} = -2.33$  por lo que la estructura inicial del “bump” es persistente en el tiempo y desde el punto de vista del conductor tienen un efecto de parar y avanzar. Si tomamos una condición inicial con más de un “bump” obtenemos de nuevo una solución persistente en el tiempo. En este sentido podemos decir que el bump es estable.

En caso de que  $\rho_{min} < \rho_{cc}$  la situación es muy diferente, la solución entrópica es una combinación de choque/rarefacción. Supongamos que la condición inicial es

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x \leq 0, 1 < x \\ 2.9, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

entonces el problema de Riemann en  $x = 0$  esta determinado por  $\rho_L = 0.5$ ,  $\rho_R = 2.9$ . Como antes mencionamos existe  $\rho_*(\rho_L)$  tal que  $f'(\rho_*) = \frac{f(\rho_*) - f(\rho_L)}{\rho_* - \rho_L}$ . Realizando los cálculos obtenemos que  $\rho_*(0.5) = 2.75$ .

La solución entrópica en  $x = 0$  es una onda de choque  $\hat{x}_1(t)$  que conecta  $\rho_L$  con  $\rho_*$  y viaja con velocidad  $s_1 = f'(2.75) = -1.3125$ . El choque pasa por el origen, es decir, tiene la forma  $\hat{x}_1(t) = s_1 t$ . Dicha onda de choque va seguida de una onda de rarefacción  $g_1(\frac{x}{t})$  que conecta  $\rho_*$  con  $\rho_R$  y tiene la forma de la ecuación (2.3).

En  $x = 1$  el problema de Riemann es:  $\rho_L = 2.9, \rho_R = 0.5$ . En este caso  $\rho_*(2.9) = 1.55$ . La solución entrópica es una onda de choque  $\hat{x}_2(t)$  seguida de una onda de rarefacción  $g_2(\frac{x}{t})$  centrada en  $x = 1$ . El choque tiene velocidad  $s_2 = f'(1.55) = -2.3925$  y  $\hat{x}_2(0) = 1$ . Por lo tanto  $\hat{x}_2(t) = -2.3925t + 1$ . La onda de rarefacción es de la forma  $g_2(\frac{x}{t}) = g(\frac{x-1}{t})$ , donde  $g$  es como en (2.3).

Es claro que en un tiempo finito  $\hat{x}_2$  y la onda de rarefacción  $g_2$  interactúan, por lo que el “bump” desaparece.

Usando el criterio de Gasser obtenemos un choque en  $x = 0$  y un choque-rarefacción en  $x = 1$ . Veamos las soluciones con más detalle.

En  $x = 0$ , el choque  $\hat{x}_A(t)$  une a los dos estados constantes  $\rho_L = 0.5$  y  $\rho_R = 2.9$  con velocidad  $s_A = \frac{f(2.9) - f(0.5)}{2.9 - 0.5} = -1.29$ . Por lo tanto  $\hat{x}_A(t) = s_A t$ .

En  $x = 1$  la alternativa de Gasser permite tomar la solución entrópica, entonces, la solución es el choque  $\hat{x}_2(t)$  seguido de la rarefacción  $g_2(\frac{x}{t})$  que definimos en el párrafo anterior.

Como podemos observar la velocidad de  $\hat{x}_2(t)$  es menor que la de  $\hat{x}_A(t)$ , así que, los choques interactúan en un tiempo finito  $t_b = 0.9070$ . El bump se hace mas pequeño y desaparece, formando una tercera discontinuidad  $\hat{x}_3(t)$  que satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\hat{x}_3}{dt} = \frac{f(g(\frac{x-1}{t})) - f(0.5)}{g(\frac{x-1}{t}) - 0.5} = \frac{f\left(2 + \sqrt{\frac{x-1}{3t} + 1}\right) - 3.125}{1.5 + \sqrt{\frac{x-1}{3t} + 1}} \quad (2.4)$$

con condición inicial  $\hat{x}_3(0.9070) = -1.17$ . La ecuación (2.4) tiene una expresión complicada, por lo que fue más conveniente usar un método numérico para encontrar una solución aproximada. En la figura (2.3) se puede observar la interacción de los choques y la nueva discontinuidad  $\hat{x}_3$  que aparenta ser una recta pero en la figura (2.4) se muestra la pendiente de cada segmento de la solución aproximada y claramente se ve que no es constante, por lo que la  $\hat{x}_3$  no es una recta.

En resumen, el “bump” es un fenómeno que es persistente en el tiempo sólo en el régimen de alta densidad.



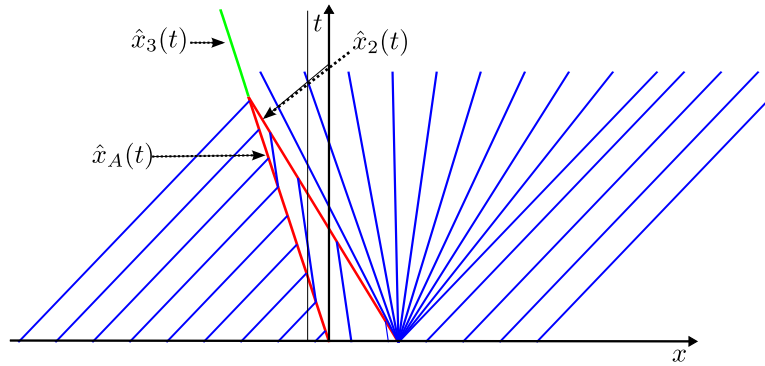


Figura 2.3: Rectas características de la solución del “bump” usando el criterio de Gasser.

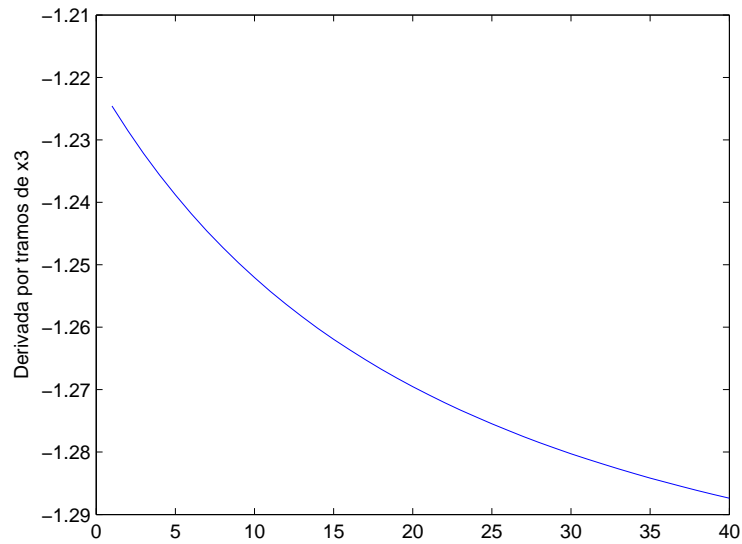


Figura 2.4: Pendiente aproximada de la discontinuidad  $\hat{x}_3$ .

### El “Cluster”

En este ejemplo consideramos la condición inicial

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_{min}, & 1 < x \leq 2 \\ \rho_{max}, & 0 < x \leq 1 \\ \rho_i, & x \leq 0, 2 < x \end{cases} \quad (2.5)$$

Esta condición representa al llamado “cluster”. Una característica de la evolución temporal del cluster es el hecho que el nivel alto de densidad ( $\rho = \rho_{max}$ ) se mantiene o inclusive se expande [Ker].

Supongamos que  $\rho_{min} < \rho_{cc} < \rho_{max}$  de tal forma que la solución que conecte a  $\rho_{min}$  y  $\rho_{max}$  es una combinación choque/rarefacción. Además supongamos que  $\rho_i$  coincide con el valor de  $\rho_*$  que corresponde al choque en la onda choque/rarefacción. La solución entrópica para esta condición inicial consiste en dos ondas choque/rarefacción y una onda de choque simple. Veamos con más detalle la solución, para ello supongamos que  $\rho_{max} = 2.9$ ,  $\rho_{min} = 0.5$  y  $\rho_i = \rho_*(\rho_{max}) = 1.55$ .

En  $x = 0$  tenemos  $\rho_L = 1.55$  y  $\rho_R = 2.9$ . La solución entrópica es una onda de choque  $\hat{y}_1(t)$  seguida de una onda de rarefacción  $h_1(\frac{x}{t})$  centrada en  $x = 0$ .

El choque  $\hat{y}_1(t)$  conecta  $\rho_L$  con  $\rho_*(1.55) = 2.225$  y satisface  $r_1 = \frac{d\hat{y}_1}{dt} = f'(2.225) = -2.848$ ,  $\hat{y}_1(0) = 0$ . Por lo tanto  $\hat{y}_1(t) = r_1 t$ . La rarefacción  $h_1(\frac{x}{t})$  tiene la forma de la ecuación (2.3).

En  $x = 1$ ,  $\rho_L = 2.9$  y  $\rho_R = 0.5$ . Al igual que en  $x = 0$  la solución entrópica tiene la estructura de choque/rarefacción y en este caso  $\rho_*(2.9) = 1.55$ . El choque  $\hat{y}_2(t)$  viaja con velocidad  $r_2 = f'(1.55) = -2.3925$  y cumple que  $\hat{y}_2(0) = 1$ . Entonces,  $\hat{y}_2(t) = r_2 t + 1$ . La rarefacción  $h_2$  satisface que  $h_2(\frac{x}{t}) = g(\frac{x-1}{t})$ , donde  $g$  es como en (2.3).

En  $x = 2$ ,  $\rho_L = 0.5$  y  $\rho_R = 1.55$ . Es este caso los datos del problema de Riemann están en el régimen cóncavo y por lo tanto la solución entrópica es una onda de choque  $\hat{y}_3(t)$  que satisface

$$r_3 = \frac{d\hat{y}_3}{dt} = \frac{f(1.55) - f(0.5)}{1.55 - 0.5} = 0.1275, \quad \hat{y}_3(0) = 2.$$

Por lo tanto  $\hat{y}_3(t) = r_3 t + 2$ .

La onda de choque  $\hat{y}_3$  interactúa (después de cierto tiempo) con la rarefacción  $h_2$  debido al tamaño del nivel de densidad bajo. Por lo tanto nos concentramos en la evolución del nivel de densidad alto.

Es claro que eventualmente la onda de rarefacción  $h_1$  interactúa con la onda de choque  $\hat{y}_2$ , por lo que el nivel de densidad alto disminuye su tamaño y desaparece. Este es el tipo de comportamiento que no nos interesa obtener.

Veamos qué soluciones alternativas obtenemos con el criterio de Gasser. En  $x = 0$ , cambiamos la combinación choque/rarefacción por un choque clásico simple  $\hat{y}_4(t)$  que tiene velocidad  $r_4 = \frac{f(2.9) - f(1.55)}{2.9 - 1.55} = -2.3925$ . Las soluciones en  $x = 1, 2$  son las mismas, no cambian usando el criterio de Gasser. Podemos observar que la velocidad  $r_4$  del choque en  $x = 0$  es igual a la velocidad del choque en  $x = 1$ ; esto nos dice que los choques  $\hat{y}_2$  y  $\hat{y}_4$  nunca interactúan. Por lo tanto la estructura inicial del “cluster” se conserva en el tiempo (Fig. 2.5).

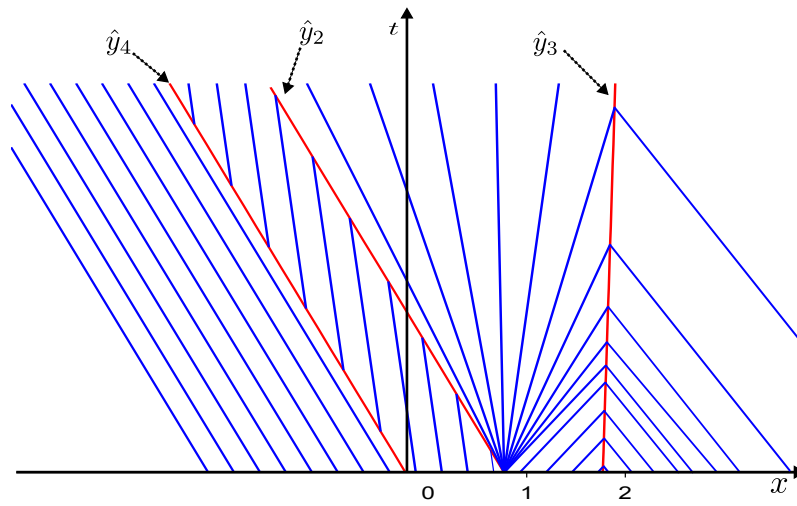


Figura 2.5: Rectas características de la solución del “cluster” usando el criterio de Gasser.

En conclusión vemos que el criterio de Gasser selecciona soluciones que reflejan un comportamiento más semejante a la realidad del tráfico, a comparación de las soluciones entrópicas.

## Capítulo 3

# Entropía y condiciones de admisibilidad

Las teorías de leyes de conservación tienen su origen en la dinámica clásica de gases. En este contexto el principio para determinar la solución físicamente relevante se basa en la segunda ley de la termodinámica, que dice, “la tasa de producción de entropía en todo proceso termo-mecánico que experimenta un gas debe ser no negativa”.

Recordemos que en el caso de una función de flujo cóncava la condición de entropía para un choque está dada por (1.8) y como vimos en los ejemplos dicha condición selecciona las soluciones que concuerdan con las observaciones reales.

En el caso de una función de flujo con un punto de inflexión la condición (1.8) selecciona soluciones que no son físicamente relevantes y por lo tanto Gasser propone un criterio alternativo para seleccionar soluciones que sean consistentes con la realidad.

En este capítulo estudiaremos las consecuencias de considerar una condición análoga a la segunda ley de la termodinámica como parte del modelo y de imponerse a toda solución de (1.4). De esta manera podremos analizar desde otro punto de vista la condición de Gasser.

### 3.1. Producción de entropía y condiciones de admisibilidad

Supongamos que a partir del modelo para la ecuación (1.4) podemos definir una densidad de entropía  $\eta(\rho)$  y un flujo de entropía  $q(\rho)$ . Dada una solución débil  $\rho(x, t)$  de (1.4), la entropía en el tiempo  $t$  en el intervalo  $I = [x_1, x_2]$  es

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(\rho(x, t)) \, dx$$

y el ritmo al que la entropía fluye a través de  $x = x_1$  en la dirección positiva del eje  $x$  en el tiempo  $t$  es  $q(\rho(x, t))$ .

La *razón de producción de la entropía*  $\Gamma(t)$  en el tiempo  $t$  asociada a la solución  $\rho$  en el intervalo  $I$  es el cambio del incremento de la entropía total en  $I$  menos la entropía transportada a  $I$  por el flujo  $q$ :

$$\Gamma(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \eta(\rho(x, t)) dx - (-q(\rho(x, t))) \Big|_{x_1}^{x_2}. \quad (3.1)$$

Supongamos que un principio de disipación análogo a la segunda ley de la termodinámica es parte del modelo, y por lo tanto imponemos la siguiente condición sobre todas las soluciones de (1.4):

$$\Gamma(t) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2, t. \quad (3.2)$$

Nos referiremos a la condición anterior simplemente como “segunda ley”. Las soluciones fuertes de (1.4) se postulan como “libres de disipación” en el sentido que no producen entropía, es decir,  $\Gamma(t) = 0$  para todo  $x_1, x_2, t$ .

Por otra parte si  $\rho(x, t)$  es una solución débil del problema de Riemann (1.4), con velocidad  $s = \frac{[f(\rho)]}{[\rho]}$ . Entonces se puede mostrar que

$$\Gamma = -[\eta]s + [q]. \quad (3.3)$$

De una manera más general, en la literatura de leyes de conservación escalares, se dice que una solución débil  $\rho$  de (1.4) es una solución admisible si existe un par de entropía  $(\eta, q)$  para el cual la desigualdad (3.2) es satisfecha por la solución débil.

En el capítulo anterior mencionamos la condición de entropía generalizada o de Oleinik (2.1), denotemos por

$$\Phi(\alpha; \rho_R, \rho_L) = [\rho](f(\alpha\rho_R + (1-\alpha)\rho_L) - \alpha f(\rho_R) - (1-\alpha)f(\rho_L)) \quad (3.4)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Entonces la condición de entropía generalizada en términos de  $\Phi$  es

$$\Phi(\alpha; \rho_R, \rho_L) \geq 0. \quad (3.5)$$

La razón de producción de entropía puede ser representada en la forma alterna:

$$\Gamma = - \int_0^1 \eta''(\alpha\rho_R + (1-\alpha)\rho_L) \Phi(\alpha; \rho_R, \rho_L) d\alpha. \quad (3.6)$$

Derivamos (3.4) respecto de  $\alpha$ , evaluando en 0 y 1 obtenemos

$$\Phi'(0; \rho_R, \rho_L) = (\rho_R - \rho_L)^2 (f'(\rho_L) - s) \quad \text{y} \quad \Phi'(1; \rho_R, \rho_L) = (\rho_R - \rho_L)^2 (f'(\rho_R) - s). \quad (3.7)$$

Supongamos que  $f(\rho)$  es genuinamente no lineal,  $f''(\rho) \neq 0$ , entonces la condición de entropía de Lax (1.7) y la condición de entropía generalizada (Oleinik) son equivalentes. Además se puede probar que

$$\Phi''(\alpha; \rho_R, \rho_L) = f''(\alpha\rho_R + (1-\alpha)\rho_L) (\rho_R - \rho_L)^3 \neq 0. \quad (3.8)$$

Si la densidad de entropía  $\eta(\rho)$  es cóncava ( $\eta''(\rho) < 0$ ), entonces, la condición de entropía generalizada y la ecuación (3.6) implican la “segunda ley” (3.2).

Supongamos que  $\eta(\rho)$  y  $f(\rho)$  son cóncavas y que la “segunda ley” se cumple. Observemos que (3.8) implica que:

- (a)  $\Phi''(\alpha; \rho_R, \rho_L) < 0$  si  $\rho_R > \rho_L$
- (b)  $\Phi''(\alpha; \rho_R, \rho_L) > 0$  si  $\rho_R < \rho_L$

Si  $\rho_R < \rho_L$ , entonces  $\Phi$  es convexa en  $\alpha$ , y como  $\Phi(0; \rho_R, \rho_L) = \Phi(1; \rho_R, \rho_L) = 0$ , se tiene que  $\Phi(\alpha; \rho_R, \rho_L) < 0$  para  $\alpha \in [0, 1]$ . Por consiguiente, como  $\eta$  es cóncava,  $\Gamma < 0$ . Esto contradice la “segunda ley”. Por lo tanto  $\rho_L < \rho_R$ , entonces por (a):  $\Phi(\alpha; \rho_R, \rho_L)$  es cóncava y positiva para  $\alpha \in [0, 1]$ . Así, se cumple la condición de entropía generalizada y esta a su vez implica la condición de Lax.

En conclusión, dada una solución débil, de la ecuación (1.4) con flujo (1.3), va a ser admisible según el criterio de Lax, el de Oleinik o la “segunda ley” con función de densidad de entropía (3.13) si y sólo si la condición de “driver’s ride impulse” ( $\rho_L < \rho_R$ ) se cumple.

Ahora, lo que nos interesa es hacer algunos cálculos para ver cuál es la situación de los criterios de admisibilidad cuando se considera la función de flujo con cambio de convexidad (2.2).

La velocidad de una solución débil de (1.4) dada por la relación de Rankine-Hugoniot es:

$$\begin{aligned} s &= \frac{f(\rho_R) - f(\rho_L)}{\rho_R - \rho_L} = \frac{1}{\rho_R - \rho_L} ((\rho_R - 3)^2 \rho_R - (\rho_L - 3)^2 \rho_L) \\ &= \rho_R^2 + \rho_L^2 + \rho_R \rho_L - 6(\rho_R + \rho_L) + 9. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Lo que nos interesa es comparar las derivadas  $f'(\rho_R)$  y  $f'(\rho_L)$  con la velocidad característica  $s$ . Entonces calculamos las diferencias entre tales cantidades, obteniendo:

$$\begin{aligned} f'(\rho_L) - s &= (\rho_R - \rho_L)(6 - 2\rho_L - \rho_R); \\ f'(\rho_R) - s &= (\rho_R - \rho_L)(-6 + \rho_L + 2\rho_R). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Luego, es claro que la condición de entropía de Lax (1.7) se cumple si y sólo si

$$(\rho_R - \rho_L)(-6 + \rho_L + 2\rho_R) \leq 0. \quad (3.11)$$

Por otro lado, la condición de entropía generalizada (3.4) aplicada a la función de flujo (2.2) nos da la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha; \rho_R, \rho_L) &= \alpha(1 - \alpha)(\rho_R - \rho_L)^3(6 - 2\rho_L + \alpha\rho_L - \rho_R - \alpha\rho_R) \\ &= \alpha(1 - \alpha)\Psi(\alpha; \rho_R, \rho_L), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $\Psi(\alpha; \rho_R, \rho_L) = (\rho_R - \rho_L)^3(6 - 2\rho_L + \rho_R) - \alpha(\rho_R - \rho_L)^4$ .

Es claro que  $\Psi$  como función de  $\alpha$ , restringida al intervalo  $[0, 1]$ , alcanza su mínimo en  $\alpha = 1$ . Así, la condición de entropía generalizada (3.5) se cumple si y solo si  $\Psi(1; \rho_R, \rho_L) \geq 0$ , esto es:

$$\begin{aligned} \Psi(1; \rho_R, \rho_L) &= (\rho_R - \rho_L)^3(6 - 2\rho_L + \rho_R) - (\rho_R - \rho_L)^4 \\ &= (\rho_R - \rho_L)^2 [(6 - 2\rho_L - \rho_R)(\rho_R - \rho_L) - (\rho_R - \rho_L)^2] \\ &= (\rho_R - \rho_L)^2 [\rho_L^2 - 2\rho_R^2 + \rho_L\rho_R + 6(\rho_R - \rho_L)] \\ &= (\rho_R - \rho_L)^2 [(\rho_L - \rho_R)(2\rho_R + \rho_L - 6)] \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces la condición es :

$$(\rho_L - \rho_R)(2\rho_R + \rho_L - 6) \geq 0,$$

que resulta ser la misma condición (3.11).

En resumen, el criterio de admisibilidad de Lax y el de la condición generalizada de entropía son equivalentes sólo para la función de flujo con cambio de convexidad (2.2); en general, para una función de flujo con cambios de convexidad arbitraria la aseveración anterior no es cierta. En la figura 3.1 podemos observar la región del plano  $(\rho_R, \rho_L)$  que corresponde a la desigualdad (3.11).

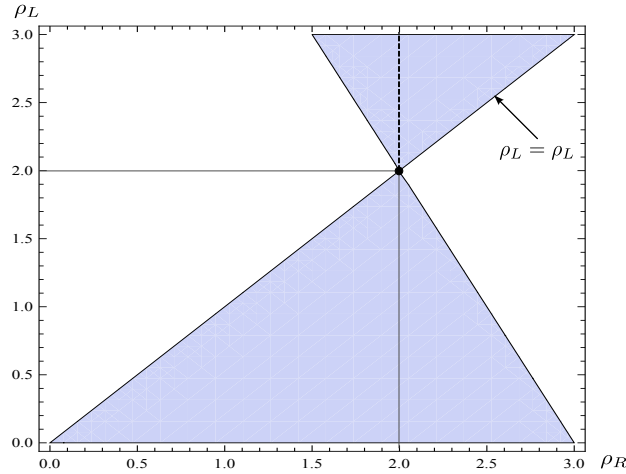


Figura 3.1: Valores de  $(\rho_R, \rho_L)$  admisibles por la condición de (1.7) y (2.1).

A continuación evaluamos la razón de producción de la entropía (3.3) para la función de flujo (2.2). Consideraremos la función de densidad de entropía

$$\eta(\rho) = -\rho \log \rho \quad (3.13)$$

restringida al intervalo  $[0, 1]$  en donde  $\eta$  es cóncava y la denominaremos como densidad entropía de Shannon y el flujo de entropía asociado

$$q(\rho) = \int_0^\rho \eta'(r) f'(r) dr = \frac{\rho^3}{3} - 3\rho^2 + 9\rho - [1 + \log(\rho)](\rho - 3)^2 \rho. \quad (3.14)$$

Entonces utilizando  $\eta$ ,  $q$  del párrafo anterior y la velocidad característica  $s$  (3.9) tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(\rho_R, \rho_L) &= -[\eta(\rho)]s + [q(\rho)] \\ &= 3(\rho_R^2 - \rho_L^2) - \frac{2}{3}(\rho_R^3 - \rho_L^3) \\ &\quad + \log\left(\frac{\rho_R}{\rho_L}\right)\rho_L\rho_R(-6 + \rho_L + \rho_R).\end{aligned}\quad (3.15)$$

En la figura (3.2) vemos la región  $\Gamma(\rho_R, \rho_L) \geq 0$  en el plano  $(\rho_R, \rho_L)$ .

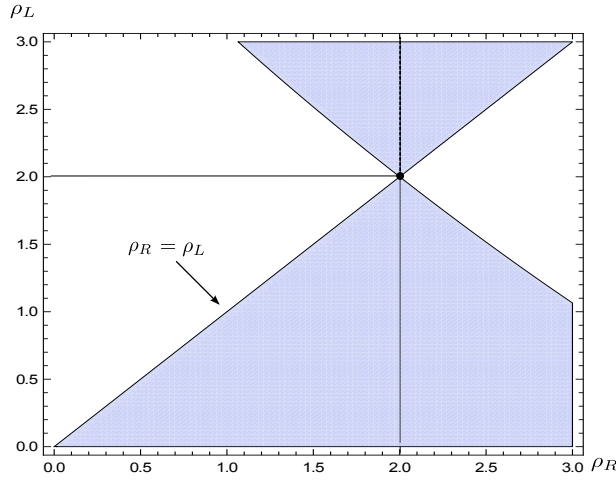


Figura 3.2: Valores de  $(\rho_R, \rho_L)$  admisibles por la condición (3.2).

Comparando las figuras (3.1) y (3.2) es claro que hay choques admitidos por la “segunda ley” que no son admitidos por las condiciones de Lax y de Oleinik. Sin embargo, en ambos casos podemos observar que los valores admitidos de  $\rho_R, \rho_L$  mayores que  $\rho_{cc} = 2$  violan el “driver’s ride impulse”. En efecto, en ambas figuras la región sombreada a la derecha de la línea punteada es la región  $\rho_R < \rho_L$ . Por lo tanto, vemos que para valores de  $\rho_R, \rho_L > \rho_{cc}$  los tres criterios nos dan la misma conclusión.

Recordemos que el criterio de Gasser propone que la solución sea un choque puro en el caso  $\rho_L < \rho_R$ . Como podemos ver en las figuras (3.1) y (3.2) el criterio de Gasser coincide con los criterios de Lax, Oleinik y la “segunda ley” para valores de  $\rho_R, \rho_L < 2$ . Y para valores de  $\rho_R, \rho_L > 2$  la solución seleccionada por el criterio de Gasser no será consistente con ninguno de los otros criterios.

El hecho de que, para valores de  $\rho_R, \rho_L > \rho_{cc}$ , se tenga la misma conclusión con la “segunda ley” basada en la función de entropía de Shannon que cuando se usa el criterio de Lax o de Oleinik, podría hacer pensar que la solución admitida en este caso es la que describe de manera correcta el flujo de tráfico.



Desgraciadamente, puede ser el caso que la “segunda ley” no sea aplicable para modelos de tráfico ya que el principio de disipación depende enteramente de la función de producción de entropía la cual en este caso no surge del modelado de tráfico. Y más aun, puede ser erróneo usar una condición de admisibilidad motivada por la termodinámica.

## Capítulo 4

# Conclusiones

Los modelos de tráfico del tipo Lighthill-Whitham (L-W) son una manera cualitativa de estudiar el fenómeno de la evolución del tráfico tomando en cuenta solamente la densidad de tráfico y el campo de velocidades.

Como pudimos observar es necesario tomar en cuenta una condición adicional, llamada condición de entropía, para asegurar la unicidad de las soluciones débiles. De hecho, dicha condición es un criterio de admisibilidad de soluciones débiles y complementa el modelo de tráfico tipo L-W.

Para la función de flujo cóncava (1.3), considerando problemas de Riemann, se estudiaron situaciones de tráfico comunes como un embotellamiento y el cambio de luz roja a verde en un semáforo. En ambos ejemplos se observó que el modelo del tipo L-W junto con la condición de “driver’s ride impulse” describe de manera adecuada situaciones reales de tráfico y de hecho las soluciones seleccionadas por el “driver’s ride impulse” coinciden con las soluciones entrópicas.

En el cambio de luz en el semáforo, la solución entrópica es una onda de rarefacción (Fig. 1.1), lo que significa que los conductores que empiezan con velocidad cero y que avanzan hacia tráfico menos denso, suavizan la discontinuidad inicial en la densidad.

En el caso del embotellamiento encontramos que la solución entrópica es una onda de choque clásica (Fig. 1.2), las cual representa el hecho de que los conductores al ver un embotellamiento más adelante en el camino siguen conduciendo hasta llegar a él. Es decir, los conductores no dejan decrecer la densidad del tráfico, que es precisamente la esencia del “driver’s ride impulse”.

En el caso de una función de flujo más realista, con cambios de convexidad, las soluciones entrópicas del modelo están en contradicción con el movimiento real del flujo de tráfico. Por tal motivo se describió y analizó el criterio de Gasser, que es un criterio a nivel de problemas de Riemann para seleccionar soluciones alternativas al modelo de L-W que sean razonables en el contexto del flujo de tráfico.

Se analizaron ejemplos típicos del flujo de tráfico, el “bump” y el “cluster”, se compararon las soluciones obtenidas por el criterio de Gasser con las soluciones entrópicas y se observó que esta condición selecciona soluciones que describen de manera acertada situaciones reales de flujo de tráfico.

El ejemplo del “bump” describe una situación muy familiar para todo conductor, el encontrar un tope u obstáculo el camino, lo cual se traduce en un aumento de la densidad en un intervalo cercano al obstáculo. Para el “bump” (Fig. 2.1 ) se analizaron dos casos para las condiciones iniciales: uno en que los datos iniciales se consideraron en el régimen de alta densidad y otro donde la densidad mínima es tomada en los niveles de baja densidad. Los resultados obtenidos son:

- Caso ( $\rho_{max}, \rho_{min} > \rho_{cc}$ ): La solución entrópica consta de una onda de rarefacción centrada en  $x = 0$  y una onda de choque en  $x = 1$ . Después de cierto tiempo las ondas interactúan, el “bump” pierde su estructura y desaparece (Fig.2.2).

En cambio, la solución alternativa usando el criterio de Gasser consta de dos ondas de choque, una en  $x = 0$  y la otra en  $x = 1$ . Ambas tienen la misma velocidad, por lo que nunca interactúan y la estructura inicial del “bump” se conserva en el tiempo.

- Caso ( $\rho_{max} > \rho_{cc} > \rho_{min}$ ): La solución entrópica consta de dos ondas tipo choque/rarefacción, centradas en  $x = 0$  y  $x = 1$ . Después de un tiempo finito las ondas interactúan y el “bump” desaparece.

Usando el criterio de admisibilidad Gasser obtenemos una onda de choque en  $x = 0$  y una onda tipo choque/rarefacción en  $x = 1$ . Nuevamente las ondas interactúan y el “bump” desaparece (Fig.2.3).

En conclusión el “bump” es una situación que es persistente en el tiempo solamente en el régimen de alta densidad. Lo cual tiene sentido, pues si inicialmente hay pocos coches antes del tope, el aumento de la densidad al llegar al tope no será suficiente para mantener el nivel de densidad alta y pronto la estructura inicial desaparecerá.

En el ejemplo del “cluster”, esperamos que el nivel de alta densidad ( $\rho = \rho_{max}$ ) conserve su tamaño o inclusive aumente [Ker]. Los resultados son los siguientes:

- La solución entrópica consiste en dos ondas tipo choque/rarefacción y una onda de choque clásica, centradas en  $x = 0$ ,  $x = 1$  y en  $x = 2$  respectivamente. En un tiempo finito las ondas interactúan y el cluster desaparece.
- La solución alternativa del criterio de Gasser consta de una onda de choque pura en  $x = 0$ , una onda tipo choque/rarefacción en  $x = 1$  y una

onda de choque clásica en  $x = 2$ . Las ondas de choque en  $x = 0$  y en  $x = 1$  tienen la misma velocidad por lo que nunca interactúan (Fig. 2.5). Por lo tanto el “cluster” se conserva en el tiempo.

En base a estos resultados, concluimos que el criterio de Gasser selecciona soluciones al modelo de tráfico tipo L-W que describen de manera correcta, a nivel cualitativo, el fenómeno del flujo de tráfico.

Motivado por el hecho de que las leyes de conservación tienen su origen en la dinámica de gases, Knowles [Kn] propone un criterio de admisibilidad de soluciones que hace mímica de la segunda ley de la termodinámica. Dicho criterio se define en términos de una función de densidad de entropía y lo denominamos simplemente como “segunda ley”.

Se comparó el criterio de la “segunda ley” con los criterios de admisibilidad de Lax y de Oleinik encontrando que para el caso de una función de flujo cóncava los tres criterios son equivalentes. Además una solución es admisible según cualquiera de los tres criterios antes mencionados si y sólo si la condición de “driver’s ride impulse” se cumple.

Para el caso de la función de flujo con cambio de convexidad (2.2) se probó que el criterio de Lax es equivalente al criterio Oleinik, pero únicamente para la función (2.2), en general los dos criterios no son equivalentes.

Se usó la función de densidad de entropía de Shannon, para calcular la producción de entropía de la función (2.2), concluyendo que la “segunda ley” admite más soluciones que los criterios de Lax y Oleinik.

Por otra parte, observamos que, para la función de flujo (2.2) y valores iniciales  $\rho_R, \rho_L > 2$ , las soluciones admitidas tanto por la “segunda ley”, como por los criterios de Lax y de Oleinik violan la condición de “driver’s ride impulse”.

En conclusión, las soluciones seleccionadas por el criterio de Gasser no son consistentes con “la segunda ley”. Sin embargo, la “segunda ley” depende de la función de Shannon, lo cual limita la relevancia de los resultados en el contexto del tráfico, pues, dicha función no está motivada por el modelado del tráfico. Además puede ser el caso que un criterio como el de la “segunda ley” no sea aplicable a un modelo de tráfico tipo L-W.

Cabe recalcar que el criterio de Gasser, aún cuando no está justificada su motivación, selecciona soluciones al modelo de L-W que describen de manera adecuada, a nivel cualitativo, situaciones reales del flujo de tráfico, como se vio en los ejemplos estudiados.

Por último, es clara la necesidad de encontrar un criterio de admisibilidad de soluciones al modelo de L-W que este caracterizado totalmente por el fenómeno del tráfico.



# Bibliografía

- [Ans] Ansorge, R., *What does the entropy condition mean in traffic flow theory?*. Transp Res. B 24, 133-143, (1990)
- [Gas] Gasser, I., *On non-entropy solutions of scalar conservation laws for traffic flow*. ZAMM 83, No. 2, 137-143, (2003).
- [Ker] Kerner, B., S., *Traffic flow: Experiment and theory*. Traffic Flow and Granular Flow '97, editado por M. Schreckenberg y D. E. Wolf. Springer, Singapur, (1998).
- [Kn] Knowles, J. K., *On entropy conditions and traffic flow models*. ZAMM 88, No. 1, 64-73, (2008).
- [Lax1] Lax, P., *Hyperbolic systems of conservation laws II*. Comm. Pure Appl. Math, 10, 537-566, (1957).
- [Lax2] Lax, P., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. CBMS-NSF Regional Conference series in Applied mathematics, SIAM, (1973).
- [LeF] LeFloch, P. G., *Hyperbolic systems of conservation laws. The theory of classical and nonclassical shock waves*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, (2002).
- [L-W] Lighthill, M. J. y Whitham, G. B., *On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads*. Proc. R Soc. Lond., Ser. A 229, 317-345, (1955).
- [Oln] Oleinik, O., *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for quasilinear equation*. Ups. Mat. Nauk, 14, 265-170, (1959).
- [Ri] Richards, P. I., *Shock waves on the highway*. Operations Research 4, 42-51, (1956).
- [W] Whitham, G. B., *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience, New York, (1974).