



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

NUEVA SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SINE-GORDON MODIFICADA

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ABRAHAM QUILES SÁNCHEZ

DIRECTOR DE LA TESINA
DR. RAMÓN GABRIEL PLAZA VILLEGAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2025

Nueva solución a la ecuación de sine-Gordon modificada

por

ABRAHAM QUILES SÁNCHEZ

Tesina presentada para optar por el grado de

Maestro en Ciencias

en el

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2025

Índice general

1. Introducción	2
2. Análisis asintótico de las soluciones	4
2.1. Forma variacional	4
2.2. Soluciones de tipo onda viajera	5
2.3. Comportamiento de las soluciones en infinito	10
3. Existencia del <i>medio arreglo de “kinks”</i>	18
3.1. Función de Urabe	18
3.2. Teorema de existencia	19

Capítulo 1

Introducción

La ecuación de sine-Gordon,

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0, \quad (1.0.1)$$

aparece en diversos contextos y ha sido estudiada de manera extensa en la literatura [5, 11]. Algunas de las soluciones más importantes de la ecuación de sine-Gordon tienen forma de onda viajera, entre las que destacan los “*kinks*”. Estos corresponden a curvas heteroclínicas en el espacio fase y conectan dos equilibrios asintóticamente (véase, por ejemplo, Drazin [5]). Otras soluciones fundamentales tienen forma de ondas periódicas, que pueden ser periódicas en momento y en posición (ondas *libracionales*), o periódicas sólo en el momento (ondas *rotacionales*), y que corresponden a órbitas periódicas en el espacio fase dentro de separatrices, en el primer caso, y a ondas periódicas en la derivada por afuera de las separatrices, en el segundo caso, véase: Jones *et al.* [7].

Recientemente, Fiore *et al.* [3, 6], estudiaron la ecuación de sine-Gordon modificada,

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi + \alpha \varphi_t + \gamma = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.0.2)$$

donde $\alpha \geq 0$ y $\gamma > 0$ son constantes y representan un término de amortiguamiento y de forzamiento, respectivamente. Esta ecuación representa un modelo más completo de, por ejemplo, el fenómeno de superconducción en *juntas de Josephson* (véase [1, 2, 8, 12] y las referencias que ahí se mencionan). En otras palabras, la ecuación original de sine-Gordon (1.0.1) es una aproximación de (1.0.2). Ambas ecuaciones (1.0.1) y (1.0.2) son, por simplicidad, con velocidad de la luz $c^2 \equiv 1$.

Mediante argumentos perturbativos, es decir, suponiendo que $0 < \alpha, \gamma \ll 1$ son pequeños, es posible extrapolar la existencia de soluciones de la ecuación original de sine-Gordon (1.0.1) a la ecuación modificada (1.0.2). De hecho, los planos fase de ambas ecuaciones son topológicamente equivalentes para valores pequeños de estos parámetros, véase: Jones *et al.* [7].

En contraste, un descubrimiento importante de Fiore y colaboradores es la existencia de soluciones de tipo onda viajera para valores *arbitrarios* de los parámetros α y γ (en la línea real o en el círculo). En [6], los autores demostraron que existe una región en el espacio 2-dimensional de los parámetros (α, γ) en la que existen soluciones de tipo onda viajera que combinan a los “*kinks*” con ondas periódicas, denominadas por sus autores como *medio arreglo de “kinks”*. Estas soluciones se componen de un “*kink*” acoplado de manera C^1 con una onda rotacional que es periódica en el momento pero no en posición (*arreglo de “kinks”*); en la figura 1.1 podemos ver la forma de un ‘*kink*’ y un *arreglo de “kinks”*, y en la figura 1.2 podemos ver como se tendría que ver la nueva solución. Con el fin de entender más sobre la existencia de esta nueva solución, en esta tesina se estudiará el artículo [6] extrayendo la información específica del *medio arreglo de “kinks”*.

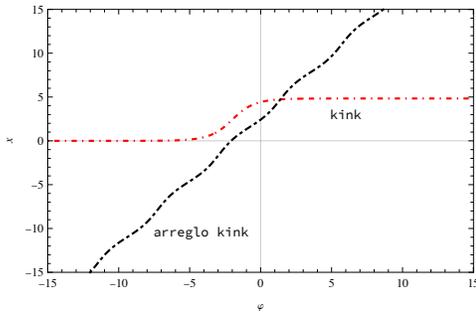


Figura 1.1: Soluciones de la ecuación sine-Gordon.

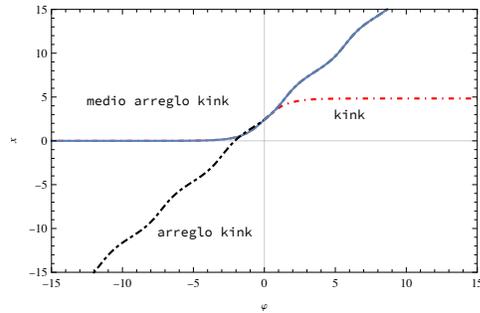


Figura 1.2: Nueva solución para la ecuación sine-Gordon modificad (en línea continua en azul).

Capítulo 2

Análisis asintótico de las soluciones

En este trabajo vamos a tomar soluciones que respeten el principio de mínima energía, para eso, asociaremos un problema variacional a la ecuación (1.0.2). Una vez descartados los casos que no respeten el principio, tomaremos soluciones de tipo onda viajera. Al tomar estas soluciones, el problema original en derivadas parciales pasa a ser una ecuación ordinaria de segundo orden y posteriormente un sistema de dos ecuaciones ordinarias. En este capítulo, analizaremos el comportamiento asintótico de las soluciones de dicho sistema.

2.1. Forma variacional

Algunos de los problemas físicos que se estudian con esta ecuación cumplen que, de manera asintótica, las soluciones tienen derivada respecto a t convergente a cero, véase e.g. [1]; entonces para tiempos grandes el problema (1.0.2) es equivalente a

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi + \gamma = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1.1)$$

A este problema le podemos asociar el funcional

$$I[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(x, t, \varphi, \varphi_x, \varphi_t) dt dx. \quad (2.1.2)$$

donde $h := \frac{1}{2} [\varphi_t^2 - \varphi_x^2] + \gamma\varphi - \cos \varphi + K$ y la definimos como la densidad de energía. Tener h definida de esa manera permite relacionar los puntos

críticos de (2.1.2) con las soluciones de (2.1.1), (véase [9] para cálculos similares). Tenemos dos tipos de soluciones constantes para (2.1.1), φ^s , φ^u , ambas satisfacen la ecuación

$$\sin x = -\gamma,$$

entonces, si $\gamma \leq 1$,

$$x = \begin{cases} \varphi^s = 2\pi - \sin^{-1} \gamma + 2\pi k \\ \varphi^u = \pi + \sin^{-1} \gamma + 2\pi k, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Nótese que si definimos la función $F(x) := \gamma x - \cos x$, podemos comprobar que φ^s es un mínimo local de F y φ^u es un máximo local de F , ya que

$$\cos x = \begin{cases} \cos \varphi^s \geq 0, \\ \cos \varphi^u \leq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $h(x, t, \varphi^s, 0, 0) - K \leq h(x, t, \varphi^u, 0, 0) - K$. φ^s debería de ser un mínimo local de h ; en este sentido, diremos que φ^s es estable, y φ^u debería ser un máximo local de h , en el caso de φ^u diremos que es inestable. Por lo tanto, definimos $K := \cos \varphi^s - \gamma \varphi^s$ para que la estabilidad sea cuando $h = 0$, (véase e.g. [1]). En resumen, en el problema original (1.0.2), si tenemos soluciones que convergen a una constante, podemos clasificar según a que constante converjan. En este trabajo vamos a descartar las soluciones que converjan a una constante inestable.

2.2. Soluciones de tipo onda viajera

Buscando un argumento no perturbativo se reemplaza la ecuación (1.0.2) con el *ansatz* estándar de onda viajera, a saber,

$$\begin{aligned} \xi &:= \pm x - t, & \varphi(x, t) &= g(\xi), & \text{si } \nu &= \pm 1, \\ \xi &:= -\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, & \varphi(x, t) &= -g(\xi), & \text{si } \nu^2 &> 1, \\ \xi &:= \text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \nu^2}}, & \varphi(x, t) &= g(\xi) - \pi, & \text{si } 0 < \nu^2 &< 1, \\ \xi &:= x, & \varphi(x, t) &= g(\xi) - \pi, & \text{si } \nu &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Donde la velocidad de propagación ν es constante.

Nota 2.2.1. Para el caso $\nu = \pm 1$, los autores del artículo [6] definen el *ansatz estándar de onda viajera* como

$$\xi := \pm x - t, \quad \varphi(x, t) = g(\xi) - \pi, \quad \text{si } \nu = \pm 1.$$

Por otra parte, los autores en [3] lo definen como aparece en la definición (2.2.1), de cualquier forma, con un análisis simétrico, podemos concluir un comportamiento similar de las soluciones para este caso.

En el caso luminal, $\nu = \pm 1$,

$$\varphi(x, t) = g(\xi) = g(\pm x - t),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \varphi_t(x, t) &= -g'(\pm x - t), & \varphi_{tt}(x, t) &= g''(\pm x - t), \\ \varphi_x(x, t) &= \pm g'(\pm x - t), & \varphi_{xx}(x, t) &= g''(\pm x - t). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.0.2) obtenemos la ecuación

$$g'' - g'' + \sin(g) - \alpha g' + \gamma = 0.$$

Por lo tanto,

$$\alpha g' = \gamma + \sin(g). \tag{2.2.2}$$

Aquí podemos ver que existen soluciones constantes c que responden a la ecuación $\sin(c) = -\gamma$. Si $\gamma \leq 1$, las soluciones son

$$c = \begin{cases} \varphi^s = 2\pi - \sin^{-1} \gamma + 2\pi k \\ \varphi^u = \pi + \sin^{-1} \gamma + 2\pi. \end{cases}$$

Para soluciones no constantes, primero supongamos $\gamma < 1$. El mapeo $g(\xi)$ es invertible cuando $g \in (\varphi^u, \varphi^s)$. Para $\xi_0 \in g^{-1}[(\varphi^u, \varphi^s)]$ fijo, si ξ esta en una vecindad abierta de ξ_0 contenida en $g^{-1}[(\varphi^u, \varphi^s)]$, entonces, por el teorema de cambio de variable y el de la función inversa, tenemos lo siguiente,

$$\xi - \xi_0 = \int_{\xi_0}^{\xi} ds = \int_{g(\xi_0)}^{g(\xi)} (g^{-1})'(t) dt = \int_{g(\xi_0)}^{g(\xi)} \frac{\alpha dt}{\gamma + \sin g(g^{-1}(t))} = \int_{g(\xi_0)}^{g(\xi)} \frac{\alpha dt}{\gamma + \sin t}.$$

Si $g(\xi)$ se aproxima a $\varphi^u = \pi + \sin^{-1} \gamma$ o a $\varphi^s = 2\pi - \sin^{-1} \gamma$, en cualquiera de los dos casos, el denominador tiende a 0 por la izquierda. Entonces, la integral diverge a $-\infty$ si $g(\xi_0) < g(\xi)$ y diverge a ∞ si $g(\xi) < g(\xi_0)$. Al ser invertible g , podemos concluir que, si ξ tiende a $-\infty$, entonces $g(\xi)$ tiende a φ^s y, si ξ tiende a ∞ , entonces $g(\xi)$ tiende a φ^u . Por lo tanto, φ pasa de un estado de mínima a máxima energía a lo largo del tiempo. Como lo mencionamos en la sección anterior, descartamos este caso.

Si $\gamma = 1$, las soluciones constantes son

$$c = \begin{cases} \varphi^s = 2\pi - \pi/2 + 2\pi k \\ \varphi^u = \pi + \pi/2 + 2\pi. \end{cases}$$

Haciendo un análisis análogo al caso anterior, podemos concluir que φ pasa de un estado de mínima a máxima energía a lo largo del tiempo. Por lo tanto, este caso también se descarta.

Si $\gamma > 1$,

$$\xi_0 - \xi = \alpha \int_{g_0}^g \frac{ds}{\gamma + \sin s},$$

es una función $\xi(g)$ que es estrictamente monótona para toda g y pseudo-periódica para toda g . En este caso la función $\xi(g)$ siempre es invertible, entonces la función $g(\xi)$ cumple que es estrictamente monótona y pseudoperiódica para toda ξ . Por lo tanto, las soluciones en este caso se ven con las condiciones necesarias para un *arreglo de "kinks"* u oda rotacional, ([7]).

Para encontrar la solución *medio arreglo de "kinks"* supondremos $\nu \neq \pm 1$. En el caso superluminal, $\nu^2 > 1$,

$$\varphi(x, t) = -g(\xi) = -g\left(-\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{\nu^2 - 1}}\right),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \varphi_t(x, t) &= -\text{sign}(\nu) g'\left(-\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{\nu^2 - 1}}\right) \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, & \varphi_{tt}(x, t) &= -g''\left(-\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{\nu^2 - 1}}\right) \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1}, \\ \varphi_x(x, t) &= \text{sign}(\nu) g'\left(-\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{\nu^2 - 1}}\right) \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, & \varphi_{xx}(x, t) &= -g''\left(-\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{\nu^2 - 1}}\right) \frac{1}{\nu^2 - 1}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.0.2) obtenemos

$$-g'' \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} + g'' \frac{1}{\nu^2 - 1} + \sin(-g) + \alpha(-\text{sign}(\nu)g' \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}}) + \gamma = 0.$$

Simplificando lo anterior

$$-g'' - \sin(g) - \frac{|\nu|\alpha}{\sqrt{\nu^2 - 1}}g' + \gamma = g'' + \frac{|\nu|\alpha}{\sqrt{\nu^2 - 1}}g' + \sin(g) - \gamma = 0.$$

Por lo tanto,

$$g'' + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \nu^{-2}}}g' + \sin(g) - \gamma = 0. \quad (2.2.3)$$

En el caso subluminal, $0 < \nu^2 < 1$,

$$\varphi(x, t) = g(\xi) - \pi = g(\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \nu^2}}) - \pi,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \varphi_t(x, t) &= -\text{sign}(\nu)g'(\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \nu^2}}) \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}}, & \varphi_{tt}(x, t) &= g''(\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \nu^2}}) \frac{\nu^2}{1 - \nu^2}, \\ \varphi_x(x, t) &= \text{sign}(\nu)g'(\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \nu^2}}) \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2}}, & \varphi_{xx}(x, t) &= g''(\text{sign}(\nu) \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \nu^2}}) \frac{1}{1 - \nu^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.0.2) obtenemos

$$g'' \frac{\nu^2}{1 - \nu^2} - g'' \frac{1}{1 - \nu^2} + \sin(g - \pi) + \alpha(-\text{sign}(\nu)g' \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}}) + \gamma = 0.$$

Simplificando lo anterior

$$-g'' - \sin(g) - \frac{|\nu|\alpha}{\sqrt{1 - \nu^2}}g' + \gamma = g'' + \frac{|\nu|\alpha}{\sqrt{1 - \nu^2}}g' + \sin(g) - \gamma = 0.$$

Por lo tanto,

$$g'' + \frac{\alpha}{\sqrt{\nu^{-2} - 1}}g' + \sin(g) - \gamma = 0. \quad (2.2.4)$$

En el caso estacionario, $\nu = 0$,

$$\varphi(x, t) = g(\xi) - \pi = g(x) - \pi,$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}\varphi_t(x, t) &= 0, & \varphi_{tt}(x, t) &= 0, \\ \varphi_x(x, t) &= g'(x), & \varphi_{xx}(x, t) &= g''(x).\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.0.2) obtenemos

$$-g'' + \sin(g - \pi) + \gamma = 0.$$

Simplificando lo anterior,

$$-g'' - \sin(g) + \gamma = g'' + \sin(g) - \gamma = 0.$$

Por lo tanto,

$$g'' + \sin(g) - \gamma = 0. \quad (2.2.5)$$

Cada uno de los tres casos anteriores, (superluminal, subluminal y estacionario), concluye en una ecuación diferencial ordinaria diferente, pero se pueden escribir en una sola observando lo siguiente. Vamos a definir la función $U(g) := -(\cos(g) + \gamma g)$, para $\gamma \in \mathbb{R}$, y la variable $\mu := \frac{\alpha}{\sqrt{|\nu^{-2}-1|}}$, con $\nu \neq 0$ y $\alpha \leq 0$. Así podemos escribir la ecuación

$$g'' + \mu g' + U_g(g) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.2.6)$$

Tomando $\alpha \neq 0$, (2.2.3) y (2.2.4) son casos particulares de (2.2.6), y, si $\alpha = 0$ en (2.2.6), recuperamos (2.2.5). Entonces, nuestro problema se reduce al análisis de (2.2.6). Por definición, U tiene tantos mínimos y máximos locales como números enteros, sean g_k^m los mínimos y g_k^M los máximos, para toda $k \in \mathbb{Z}$. Más adelante hablaremos más de estos valores. Antes, hablemos de la energía total del sistema, esta está definida como la suma de la energía potencial más la energía cinética, es decir,

$$e(g, g') := \frac{g'^2}{2} + U(g). \quad (2.2.7)$$

De manera local

$$e > \frac{g'^2}{2} + U(g_k^m) > U(g_k^m), \quad (2.2.8)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y también, analizando a la energía como función del tiempo, tenemos que

$$\frac{de}{d\xi} = 2g' \frac{g''}{2} + U_g(g)g' = g'(g'' + U_g(g)) = g'(-\mu g') = -\mu g'^2 \leq 0. \quad (2.2.9)$$

En conclusión, la energía total es decreciente y acotada por abajo para todo $k \in \mathbb{Z}$.

La ecuación (2.2.6) es una ecuación de segundo orden que, al definir $u := g'$, obtenemos un sistema de dos ecuaciones de primer orden, es decir,

$$\begin{aligned} g' &= u \\ u' &= -\mu u - \sin(g) + \gamma. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Entonces, el análisis de (2.2.6) es equivalente al análisis del sistema de ecuaciones (2.2.10). Para este último podemos identificar sus puntos de equilibrio en el retrato fase (g, u) , e interpretar el comportamiento asintótico, es decir, su estabilidad.

2.3. Comportamiento de las soluciones en infinito

En lo siguiente supongamos que g es solución de (2.2.6) y estudiaremos las soluciones con derivada acotada, es decir, solo nos interesan las soluciones de (2.2.10) con u acotada. Dicho esto, veamos que si $\mu \neq 0$, el comportamiento de g en infinito depende de si existe, o no, un tiempo ξ para el cual $g(\xi) = g_k^M$.

Lema 2.3.1. *Sea $\mu \neq 0$. Si no existe ningún tiempo ξ tal que $g(\xi)$ sea un máximo local de U , entonces*

$$g'(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad g'(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (2.3.1)$$

Demostración. Si no existe ningún tiempo ξ tal que $g(\xi)$ sea máximo de U , necesariamente $g \in (g_{k-1}^M, g_k^M)$. Por otra parte, el punto $(g_k^m, 0)$ es un punto crítico del sistema (2.2.10), la forma de encontrar estos puntos críticos se explica con más detalle en el siguiente capítulo.

Dicho lo anterior, sea e la energía total como la definimos en la identidad (2.2.7) y tomamos la función $L(g, u) := e(g, u) - U(g_k^m)$ que es función de Lyapunov, (véase e.g. [4]), ya que

1. $L(g_k^m, 0) = 0$, por ser g_k^m valor crítico de U .
2. $L(g, u) > 0$ por la desigualdad (2.2.8).
3. Por último $\frac{L(g, u)}{d\xi} < 0$ por la desigualdad (2.2.9).

Por lo tanto, $(g_k^m, 0)$ es estable. Entonces

$$g'(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Ahora, si multiplicamos g' a (2.2.6) e integramos en el intervalo $[\xi, \bar{\xi}]$, tenemos

$$\frac{1}{2}g'^2(\xi) = \frac{1}{2}g'^2(\bar{\xi}) + [U(g(\bar{\xi})) - U(g(\xi))] + \mu \int_{\xi}^{\bar{\xi}} g'^2(s) ds. \quad (2.3.2)$$

Sea $I(\xi) := \int_{\xi}^{\bar{\xi}} g'^2(s) ds$. Claramente I es una función no negativa y monótona, ya que el integrando es positivo. Supongamos que $I(\xi)$ diverge a infinito cuando ξ decrece a $-\infty$. Por (2.3.2) y recordando que $g \in (g_{k-1}^M, g_k^M)$, podemos concluir que g' diverge a infinito cuando ξ decrece a $-\infty$. Entonces si buscamos soluciones con $g' = u$ acotada, concluimos que $I(\xi)$ es acotada cuando ξ decrece a $-\infty$. Por definición de I , su integrando (g'^2), que es positivo, debe converger a cero cuando ξ tiende a $-\infty$. Por lo tanto,

$$g'(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

□

Proposición 2.3.1. *Dadas las mismas hipótesis del lema 2.3.1 y suponiendo que existe $\bar{\xi}$ tal que $g'(\bar{\xi}) < 0$, (desplazamiento de la partícula hacia la izquierda), tenemos que*

$$g(\xi) \rightarrow g_k^M \text{ o } g_{k-1}^M \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad g(\xi) \rightarrow g_k^m \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (2.3.3)$$

Demostración. Supongamos que ξ tiende a $\pm\infty$, por el lema 2.3.1, g' tiende a cero, esto implica que g tiende a una constante, en consecuencia $-\sin g + \gamma$ también tiende a una constante, llamémosle k . La ecuación (2.2.6) combinada

con lo anterior nos dice que g'' tiende a $-k$, como g' tiende a cero, entonces k tiene que ser cero. Por lo tanto, de nuevo por la ecuación (2.2.6), $U_g(g)$ tiende a cero. Y en consecuencia, si $\xi \rightarrow \pm\infty$, $g \rightarrow \{g_{k-1}^M, g_k^m, g_k^M\}$.

Supongamos que si $\xi \rightarrow -\infty$, entonces $g \rightarrow g_k^m$. La desigualdad (2.2.9) nos dice que $e(\xi)$ tiene que ser una función constante o decreciente. Para este problema descartamos el caso constante, porque genera una solución constante g . Por otra parte, por la definición de e y (2.3.1),

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} e = U(g_k^m).$$

Por lo tanto, $U(g_k^m) \geq e$. Esto último, en combinación con (2.2.8), nos permite concluir que e es la constante $U(g_k^m)$, entonces g es constante y, como lo mencionamos antes, descartamos ese caso. Por lo tanto, concluimos el primer límite de (2.3.3).

Por ultimo, supongamos que $g \rightarrow g_k^M$ cuando $\xi \rightarrow -\infty$. Como e es decreciente y los máximos de U son decrecientes, por lema 2.3.1, tenemos que $g \rightarrow g_k^m$ cuando $\xi \rightarrow \infty$. Por otra parte, supongamos que si $\xi \rightarrow -\infty$, entonces $g \rightarrow g_{k-1}^M$. Gracias, otra vez, e es decreciente y los máximos de U son decrecientes, tenemos dos opciones cuando $\xi \rightarrow \infty$, una es $g \rightarrow g_k^M$, y la otra es $g \rightarrow g_k^m$. Pero la existencia de $\bar{\xi}$ nos impide continuar la trayectoria hasta g_k^M . Por lo tanto, concluimos el segundo límite de (2.3.3). □

Dado que g_k^m y g_k^M , son el mínimo y el máximo respectivamente de la función $U(g)$, por el criterio de primera derivada, satisfacen la ecuación

$$\sin g = \gamma$$

y por el criterio de la segunda derivada,

$$\begin{aligned} g_k^m &= \sin^{-1} \gamma + 2\pi k \\ g_k^M &= \pi - \sin^{-1} \gamma + 2\pi k. \end{aligned}$$

Si $\nu^2 > 1$, estos puntos críticos en la variable original φ serían,

$$\begin{aligned} \varphi(g_k^m) &= -\sin^{-1} \gamma - 2\pi k \\ \varphi(g_k^M) &= -\pi + \sin^{-1} \gamma - 2\pi k, \end{aligned}$$

soluciones estables e inestables respectivamente, según (2.1.3).

Si $\nu^2 < 1$, tendríamos,

$$\begin{aligned}\varphi(g_k^m) &= -\pi + \sin^{-1} \gamma + 2\pi k \\ \varphi(g_k^M) &= -\sin^{-1} \gamma + 2\pi k,\end{aligned}$$

soluciones inestables y estables respectivamente, según (2.1.3).

Observación 2.3.1. *El caso de convergencia a g_k^m provoca una solución inestables en el sistema original, si $\nu^2 < 1$. Entonces, para $\nu^2 < 1$, vamos a tomar la solución g tal que*

$$g(\xi) \rightarrow g_{k-1}^M \quad \text{si } \xi \rightarrow -\infty, \quad g(\xi) \rightarrow g_k^M \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty, \quad (2.3.4)$$

que es el único candidato a solución estable cuando no existe ningún tiempo ξ tal que $g(\xi)$ sea un máximo local de U . Y son condiciones necesarias para un “kink”, (ver [5]).

Lema 2.3.2. *Si existe ξ_k tal que $g(\xi_k) = g_k^M$ y $g'(\xi_k) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$, entonces $g(\xi)$ es constante para toda ξ .*

Demostración. Primero supongamos $\xi \leq \xi_k$. Si $g'(\xi_k) = 0$, entonces, por la definición (2.2.7), $e(\xi_k) = U(g(\xi_k))$. Ahora, $g(\xi_k) = g_k^M$ es el máximo de la energía potencial, y como $g'(\xi_k) = 0$, ξ_k es máximo de la energía total, es decir,

$$U(g(\xi_k)) \geq \frac{g'(\xi)^2}{2} + U(g(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.3.5)$$

También, la expresión (2.2.9) nos dice que e es decreciente. Si ξ esta a la izquierda de ξ_k ,

$$\frac{g'(\xi)^2}{2} + U(g(\xi)) \geq U(g(\xi_k)). \quad (2.3.6)$$

Entonces, combinando (2.3.5) y (2.3.6), tenemos que

$$\frac{g'(\xi)^2}{2} + U(g(\xi)) = U(g(\xi_k)) = U(g_k^M) \quad \forall \xi \leq \xi_k.$$

Ahora, si suponemos que $\xi_k \leq \xi$. Escribamos la expresión (2.3.2) en el intervalo $[\xi_k, \xi]$, es decir,

$$0 = \frac{1}{2}g'^2(\xi) + [U(g(\xi)) - U(g(\xi_k))] + \mu \int_{\xi_k}^{\xi} g'^2(s)ds.$$

Despejando $\frac{1}{2}g'^2(\xi)$, obtenemos que

$$\frac{1}{2}g'^2(\xi) = [U(g(\xi_k)) - U(g(\xi))] - \mu \int_{\xi_k}^{\xi} g'^2(s)ds.$$

Entonces sustituyendo en la definición de energía total (2.2.7), tenemos que

$$e(\xi) = U(g(\xi_k)) - \mu \int_{\xi_k}^{\xi} g'^2(s)ds.$$

Aquí podemos ver que logramos escribir a la energía total como la máxima energía potencial menos algo que solo depende la energía cinética, entonces e también es constante cuando $\xi_k \leq \xi$.

En consecuencia,

$$g'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, $g(\xi)$ es constante para toda ξ . □

Como lo vimos al principio de este capítulo en las soluciones de (2.2.2), las soluciones constante no son relevantes para esta trabajo.

Lema 2.3.3. *Si existe ξ_k tal que $g(\xi_k) = g_k^m$ y $g'(\xi_k) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$, entonces g es constante para toda $\xi_k \leq \xi$.*

Demostración. Notemos que, por (2.2.8), si $g(\xi_k) = g_k^m$, ξ_k es mínimo de e . Aquí la prueba se vuelve análoga al lema anterior. □

Proposición 2.3.2. *Si existe ξ_k tal que $g(\xi_k) = g_k^M$ y $g'(\xi_k) < 0$ para $k \in \mathbb{Z}$, entonces,*

$$g(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad g'(\xi) \rightarrow -\infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty. \quad (2.3.7)$$

Demostración. Por definición de U y g_k^M , tenemos que

$$U(g_k^M) > U(g), \quad \forall g > g_k^M.$$

Entonces,

$$U(g_k^M) - U(g) > 0 \quad \forall g > g_k^M. \quad (2.3.8)$$

En primer lugar, sea $\xi < \xi_k$. Por (2.3.2) y (2.3.8), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g'^2(\xi) &= \frac{1}{2}g'^2(\xi_k) + [U(g(\bar{\xi})) - U(g(\xi))] + \mu \int_{\xi}^{\xi_k} g'^2(s) ds \\ &> \frac{1}{2}g'^2(\xi_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|g'(\xi)| > |g'(\xi_k)|$, $\forall \xi < \xi_k$. Entonces, como $g'(\xi_k) < 0$, concluimos que

$$g(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Ahora, U tiene máximos decrecientes, por definición. Por lo anterior y la ecuación (2.3.2) tenemos que $g'^2(\xi_k)$ es creciente cuando $k \rightarrow -\infty$. Por lo tanto,

$$g'(\xi) \rightarrow -\infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

□

Las soluciones con esta propiedad son inestable en el espacio fase (g, g') . Para fines de este trabajo vamos a descartar este tipo de soluciones.

Proposición 2.3.3. *Si existe ξ_k tal que $g(\xi_k) = g_k^M$ para $k \in \mathbb{Z}$ y siempre que exista se tiene que $g'(\xi_k) > 0$, entonces,*

$$\begin{aligned} & \text{o bien} \quad g(\xi) \rightarrow -\infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad g(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow \infty, \\ & \text{o bien} \quad g(\xi) \rightarrow g_l^M, g_l^m \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad g(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \xi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

para $l < k$.

Demostración. Claramente existe una vecindad alrededor de ξ_k donde $g'(\xi) > 0$ para ξ miembro de dicha vecindad. Veamos que esa vecindad es \mathbb{R} , es decir, $g(\xi)$ es una función estrictamente creciente.

Buscando una contradicción, tomemos $\bar{\xi}$ el primero a la izquierda después de la vecindad que cumple que $g'(\bar{\xi}) = 0$ y $\underline{\xi}$ de manera análoga a la derecha, es decir, $g'(\underline{\xi}) = 0$. Por simplicidad definamos $\bar{g} := g(\bar{\xi})$, $g_k := g(\xi_k) = g_k^M$ y $\underline{g} := g(\underline{\xi})$. Análogamente para sus derivadas evaluadas en dichos puntos, $\bar{g}', g_k', \underline{g}', \bar{g}'', g_k''$ y \underline{g}'' .

Observación 2.3.2. Sabemos que $\bar{\xi} < \xi_k < \bar{\bar{\xi}}$ y, por el comportamiento de la derivada de g , tenemos que $\bar{g} < g_k < \bar{\bar{g}}$.

Observación 2.3.3. Como $\bar{g}' = \bar{\bar{g}}' = 0$, la ecuación (2.2.6) permite tener las siguientes igualdades

$$-U_g(\bar{g}) = \bar{g}'', \quad -U_g(\bar{\bar{g}}) = \bar{\bar{g}}''.$$

Observación 2.3.4. Sabemos que $g' > 0$ cuando $\xi \in (\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}})$ y $\bar{g}' = \bar{\bar{g}}' = 0$. Por continuidad de g'' , $\bar{g}'' \geq 0$ y $\bar{\bar{g}}'' \leq 0$.

En este punto, vamos a destacar dos casos: (a) para todo $\xi \in [\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}]$ con $\xi \neq \xi_k$, $U_g(g(\xi)) \neq 0$. (b) existe $\xi_0 \in [\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}]$ con $\xi_0 \neq \xi_k$, tal que $U_g(g(\xi_0)) = 0$.

Caso (a). Como g_k es máximo de U , $U_g(\bar{g}) > 0$ y $U_g(\bar{\bar{g}}) < 0$, entonces, por la observación 2.3.3, $\bar{g}'' < 0$ y $\bar{\bar{g}}'' > 0$. Pero esto contradice la observación 2.3.4. Por lo tanto, sólo nos queda el caso (b).

Caso (b). En contraste con el caso (a), puede pasar, o no, que $U_g(\bar{g}) > 0$ y $U_g(\bar{\bar{g}}) < 0$. Entonces, para no llegar a la misma contradicción supongamos sin pérdida de generalidad, que $U_g(\bar{g}) \leq 0$ y $U_g(\bar{\bar{g}}) \geq 0$.

Si $U_g(\bar{\bar{g}}) \geq 0$, por la observación 2.3.2, en una vecindad a la derecha de $\bar{\bar{\xi}}$, la función $U(g(\xi))$ es creciente en función de ξ . Este comportamiento de U hace que e en la definición (2.2.7) sea estrictamente creciente. Pero ya habíamos hecho la observación de que e es decreciente, es decir, es una contradicción con (2.2.9).

Finalmente, supongamos que $U_g(\bar{g}) \leq 0$. Si $U_g(\bar{g}) = 0$, $\bar{g} \in \{g_k^M, g_k^m\}$, lo cual no puede pasar por las hipótesis $g'(\xi_k) > 0$ y los resultados de los lemas 2.3.2 y 2.3.3. Por lo tanto, $U_g(\bar{g}) < 0$. Por la observación 2.3.2 y la observación 2.3.3, en una vecindad a la izquierda de $\bar{\xi}$, $g'(\xi) < 0$. Supongamos que $\xi^* < \bar{\xi}$ es el más cercano a $\bar{\xi}$ que cumpla que $g'(\xi^*) = 0$, tiene que ocurrir que $g''(\xi^*) < 0$, entonces, por la observación 2.3.3, $U_g(\xi^*) > 0$. Por lo tanto, existe $\xi \in (\xi^*, \bar{\xi})$ tal que $g(\xi) = g_k^M$ y $g'(\xi) < 0$, lo cual resulta en otra contradicción.

Entonces podemos concluir que para toda $\xi \in \mathbb{R}$, $g'(\xi) > 0$. A su vez, como las trayectorias en el espacio fase pueden iniciar en un punto estacionario, tenemos (2.3.9). \square

En los casos de la expresión (2.3.9), podemos notar que el primer caso es una configuración que presenta una solución del tipo *arreglo de "kinks"* o onda rotacional, (ver [7]).

El segundo caso, representaría una combinación de un *"kink"* por la izquierda y un *arreglo de "kinks"* por la derecha. En conclusión, la proposición 2.3.3 nos dice que puede existir un *medio arreglo de "kinks"*, más aún, es una solución relevante si, por ejemplo, $\nu^2 < 1$, ya que el punto de convergencia, g_k^M , representan una estabilidad del problema en el sentido de la forma variacional vista en la primera sección de este capítulo.

Capítulo 3

Existencia del *medio arreglo de “kinks”*

En la sección 2.3, la proposición 2.3.3 nos da las condiciones necesarias para que exista una solución a la ecuación (2.2.6) con la propiedad de que

$$g(\xi) \rightarrow g_l^M \quad \text{si } \xi \rightarrow -\infty, \quad \text{y } g(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty, \quad (3.0.1)$$

para $l < k$. Más aún, tomando el caso subluminal, específicamente que $0 < \nu < 1$, la solución al problema original (1.0.2), que viene de la solución de (2.2.6) que satisface (3.0.1), es estable, en el sentido que mencionamos en la sección 2.1, cuando el tiempo t tiende a $-\infty$.

El objetivo de este capítulo es dar las condiciones específicas para la existencia de una solución a (2.2.6) que satisfaga (3.0.1). Es decir, una solución que en $-\infty$ se comporte como un “*kink*” y en ∞ como un *arreglo de “kinks”*.

3.1. Función de Urabe

Definición 3.1.1. Sea $0 \leq \alpha < \infty$. Definimos la función invertible $\mu(\nu) : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ como

$$\mu(\nu) = \frac{\alpha}{\sqrt{\nu^{-2} - 1}}. \quad (3.1.1)$$

También, la inversa de μ , $\nu(\mu) : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$, como

$$\nu(\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \mu^2}}. \quad (3.1.2)$$

Observación 3.1.1. *Dada la definición 3.1.1, el cambio de variable en (2.2.1) va a depender de un valor fijo $\mu \in [0, \infty]$, es decir $\xi = \xi(x, t, \mu)$.*

En [13, 14], Urabe estudió como afecta la relación entre μ y el coeficiente de forzamiento γ para obtener distintos tipos de soluciones a la ecuación (2.2.6).

Definición 3.1.2. *Definimos $\check{\mu}(\gamma) : [0, 1] \rightarrow [0, \mu^*]$ como la función inversa de $\hat{\gamma}(\mu)$. Donde la función $\hat{\gamma}(\mu) : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ está definida en [13, 14] y cumple las siguientes propiedades*

1. $\hat{\gamma}(\mu) = 1$ si $\mu \geq \mu^*$, para algún valor μ^* fijo.
2. $\hat{\gamma}$ es una función continua y estrictamente creciente en $[0, \mu^*]$.
3. Si $1 > \gamma > \hat{\gamma}$, existe una trayectoria pseudoperiódica atractora en el plano fase del sistema (2.2.10). También la trayectoria, en su primera componente, satisface

$$g(\xi) \rightarrow -\infty \quad \text{si } \xi \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad g(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty.$$

Observación 3.1.2. *La función $\check{\mu}(\gamma)$ nos permite tener libertad de escoger los parámetros α y γ . En el caso de μ dependa de la función $\check{\mu}$. Por las propiedades de $\hat{\gamma}$, si $0 < \mu < \check{\mu}$, existe una trayectoria pseudoperiódica atractora en el espacio fase del sistema (2.2.10).*

3.2. Teorema de existencia

Los resultados del capítulo dos nos dicen que las soluciones relevantes al problema (2.2.6) son las que cumplen los resultados de la observación 2.3.1 y la proposición 2.3.3. Entonces destaquemos estas tres soluciones.

Definición 3.2.1. *Denotemos por \hat{g} , \check{g} y \bar{g} las soluciones que satisfacen lo siguiente*

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &\rightarrow g_k^M \quad \text{si } \xi \rightarrow -\infty, & \hat{g}(\xi) &\rightarrow g_{k+1}^M \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty, \\ \check{g}(\xi) &\rightarrow -\infty \quad \text{si } \xi \rightarrow -\infty, & \check{g}(\xi) &\rightarrow \infty \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty \\ \bar{g}(\xi) &\rightarrow g_k^M \quad \text{si } \xi \rightarrow -\infty, & \bar{g}(\xi) &\rightarrow \infty \quad \text{si } \xi \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{Z}$. Y, recordando que la energía cinética esta dada por $z(g) := \frac{1}{2}g'^2$, escribimos $\hat{z}(\xi) = z(\hat{g})$, $\bar{z}(\xi) = z(\bar{g})$ y $\check{z}(\xi) = z(\check{g})$.

Observación 3.2.1. A cada solución de la definición 3.2.1 le podemos asociar una trayectoria en el espacio fase (g, u) , entonces escribimos $\hat{\rho}(\xi) = (\hat{g}, \hat{u})$, $\bar{\rho}(\xi) = (\bar{g}, \bar{u})$ y $\check{\rho}(\xi) = (\check{g}, \check{u})$ respectivamente.

Observación 3.2.2. La trayectoria pseudoperiodica en la definición 3.1.2 es del tipo $\check{\rho}(\xi)$ y por ende, la denotamos $\check{\rho}(\xi)$.

Regresando al sistema de ecuaciones (2.2.10), podemos afirmar que, por el teorema de Peano-Picard, existen soluciones globales excepto en puntos singulares y, más aún, las trayectorias en el espacio (g, u) no se intersectan. En las siguientes figuras tenemos el espacio fase del sistema para valores fijos de γ y μ , pero distintos para cada figura.

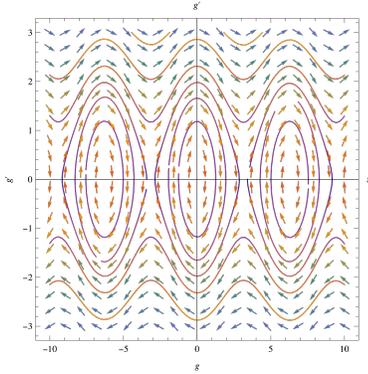


Figura 3.1: Retrato fase con $\gamma = 0.00000004$ y $\mu = 0.00000008$.

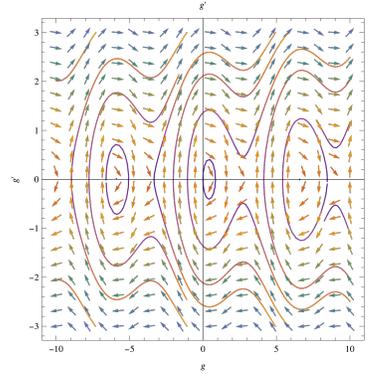


Figura 3.2: Retrato fase con $\gamma = 0.4$ y $\mu = 0.00008$.

Podemos ver que los puntos de equilibrio tienen un comportamiento distinto según la elección de γ y μ . En la figura 3.1 escogemos los parámetros cercanos al método perturbativo donde las trayectorias son topológicamente equivalentes a las trayectorias de la ecuación (1.0.2), (véase e.g. [10, 7]). En la figura 3.2 tomamos los parámetros con mas libertad para $\gamma \in (0, 1)$ y $\mu \in (0, \check{\mu}(\gamma))$, y nos damos cuenta de la existencia del posible nuevo tipo de solución.

Teorema 3.2.1. Sea $\check{\mu}$ como en la definición 3.1.2. Supongamos que $0 \leq \alpha$, $0 < \gamma < 1$ y $\mu \in (0, \check{\mu}(\gamma))$, en la ecuación (1.0.2) y en la ecuación (2.2.6).

Entonces, dentro de los tipos de soluciones relevantes de tipo onda viajera de la ecuación (1.0.2), existe la solución de tipo medio arreglo de “kinks” que cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x, t; \gamma, \mu) &:= \bar{g}(\xi(\mu); \gamma, \mu) - \pi \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\varphi}(x, t; \gamma, \mu) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{\varphi}(x, t; \gamma, \mu) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [\bar{\varphi}(x, t; \gamma, \mu) - \check{\varphi}(x, t; \gamma, \mu)] &= 0^+\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Demostración. Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema (2.2.10), tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}g' &= 0 \\ u' &= 0.\end{aligned}$$

De la primera ecuación $g' = 0$, tenemos que $u = 0$, entonces se satisface el sistema si

$$\sin(g) = \gamma.$$

Esta ecuación, coincide con la formula para encontrar los máximos y los mínimos locales de la función $U(g)$, definida en el capítulo anterior, los cuales denotamos por g_k^M y g_k^m respectivamente. Esos valores existen siempre que $0 < \gamma \leq 1$. Por lo tanto, los puntos singulares son de tres tipos $(g_k^M, 0)$, $(g_k^m, 0)$ y el ultimo, cuando el mínimo y el máximo coinciden, $((2k + \frac{1}{2})\pi, 0)$. Para cumplir las hipótesis el teorema, descartamos el caso donde el mínimo coincide con el máximo, porque se da cuando $\gamma = 1$. Entonces, el sistema tiene dos variantes de punto de equilibrio. Linealizando sobre $(g_k^M, 0)$, obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & -\cos(g_k^M) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ g \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$\lambda^2 + \mu\lambda + \cos(g_k^M) = 0.$$

Como el término lineal es positivo, el punto $(g_k^M, 0)$ es un punto silla, existen cuatro trayectorias con punto final en $(g_k^M, 0)$. Dos entran desde la izquierda o desde la derecha cuando $\xi \rightarrow \infty$, y otras dos salen desde la izquierda o desde la derecha cuando $\xi \rightarrow -\infty$.

Particularmente, la trayectoria $\rho(\xi) = (g, u)$ que sale desde la izquierda de $(g_k^M, 0)$, por como tomamos los parámetros en las hipótesis del teorema y la observación 3.1.2, es atraída a $\check{\rho}(\xi)$. Esta convergencia es de orden exponencial en el sentido de que $z(\xi) - \check{z}(\xi) = O(e^\xi)$ cuando $g \rightarrow \infty$, donde $z(\xi)$ y $\check{z}(\xi)$ son las energías cinéticas asociadas a $\rho(\xi)$ y $\check{\rho}(\xi)$ respectivamente.

En efecto, sea $g(\xi)$ la solución asociada a $\rho(\xi)$, esta satisface la expresión (3.0.1), entonces podemos escribir $z = \bar{z}$. También, por la proposición 2.3.3 y su demostración, podemos tener a ξ como función de g . Dicho lo anterior, notemos que las derivadas de la de las energías \bar{z} y \check{z} con respecto a g son

$$\begin{aligned}\check{z}_g &= \gamma - \sin(g) - \mu\sqrt{2\check{z}}, \\ \bar{z}_g &= \gamma - \sin(g) - \mu\sqrt{2\bar{z}}.\end{aligned}$$

Ahora, si definimos $w := \bar{z} - \check{z}$, $w_g = \mu \left(\sqrt{2(w + \check{z})} - \sqrt{2\check{z}} \right)$. Multiplicando por $\frac{\sqrt{2(w+\check{z})} + \sqrt{2\check{z}}}{\sqrt{2(w+\check{z})} - \sqrt{2\check{z}}}$,

$$w_g = \frac{-\mu(2w)}{(\sqrt{2(w + \check{z})})\sqrt{2\check{z}}}.$$

Por lo que,

$$\frac{d}{dg} \ln|w| = -\frac{2\mu}{\sqrt{2(w+\check{z})} + \sqrt{2\check{z}}}$$

Como $|w|$ es decreciente (porque μ es positivo), existe g_0 talque $|w(g_0)| > |w(g)| > w(g)$, $\forall g > g_0$, y tomando \check{z}^M el máximo de la función $\check{z}(g)$, tenemos que

$$\frac{d}{dg} \ln|w| \leq -\frac{\mu}{\sqrt{2(\check{z}^M + |w(g_0)|)}}.$$

Sea $c := \frac{\mu}{\sqrt{2(\check{z}^M + |w(g_0)|)}}$, entonces

$$\int_{g_0}^g \frac{d \ln|w|}{dg} \leq - \int_{g_0}^g c,$$

entonces

$$|w(g)| \leq -|w(g_0)|e^{-c(g-g_0)}.$$

Por lo tanto, $\rho(\xi) = \bar{\rho}(\xi)$ es atraída en orden exponencial a $\check{\rho}(\xi)$.

Ahora, la libertad de elección de μ , nos restringe $\nu \in [0, 1]$, por el cambio de variable (2.2.1), tenemos que

$$\bar{\varphi}(x, t; \gamma, \mu) := \bar{g}(\xi(\mu); \gamma, \mu) - \pi.$$

Recordemos que las trayectorias no se cruzan, también, por el lema 2.3.1, $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \bar{z} = 0$ y, por la proposición 2.3.3, $\check{z}(g_k^M) > 0$, entonces tenemos que

$$w \nearrow 0, \quad \text{cuando } g \rightarrow \infty,$$

es decir, converge a cero desde valores negativos, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\bar{z}}} - \frac{1}{\sqrt{2\check{z}}} \searrow 0,$$

es decir, converge a cero exponencialmente rápido desde valores positivo cuando $g \rightarrow \infty$. Integrando por cuadraturas y tomando la función invertible $g(\xi)$ podemos definir

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(g) &= \int_{g_0}^g \frac{ds}{\sqrt{2\bar{z}(s)}} + \bar{c}, \\ \check{\xi}(g) &= \int_{g_0}^g \frac{ds}{\sqrt{2\check{z}(s)}} + \check{c}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\bar{\xi}(g) - \check{\xi}(g) = \int_{g_0}^g \frac{1}{\sqrt{2\bar{z}}} - \frac{1}{\sqrt{2\check{z}}} ds + (\bar{c} - \check{c}).$$

Por la convergencia del integrando podemos escribir

$$\bar{\xi}(g) - \check{\xi}(g) = \int_g^\infty \frac{1}{\sqrt{2\bar{z}}} - \frac{1}{\sqrt{2\check{z}}} ds,$$

definiendo $\rho(g) := \int_g^\infty \frac{1}{\sqrt{2\bar{z}}} - \frac{1}{\sqrt{2\check{z}}} ds$ tenemos que

$$\bar{\xi}(g) = \check{\xi}(g) - \rho(g).$$

Aplicando la función \bar{g} en ambos lados de la anterior ecuación tenemos que

$$g = \bar{g}(\check{\xi}(g) - \rho(g)),$$

y por el teorema del valor medio, existe $\tilde{\xi} \in (\check{\xi}(g) - \rho(g), \check{\xi}(g))$, tal que

$$\bar{g}'(\tilde{\xi}) = \frac{\bar{g}(\check{\xi}(g)) - \bar{g}(\check{\xi}(g) - \rho(g))}{\rho(g)}.$$

Por lo tanto,

$$g = \bar{g} (\check{\xi}(g) - \rho(g)) = \bar{g}(\check{\xi}(g)) - \bar{g}'(\check{\xi})\rho(g).$$

Sea $g = \check{g}(\xi)$, entonces

$$\check{g}(\xi) = \bar{g}(\xi) - \bar{g}'(\xi)\rho(g),$$

como $\rho \rightarrow 0$ cuando $g \rightarrow \infty$ y $g \rightarrow \infty$ cuando $\xi \rightarrow \infty$,

$$\check{g} \nearrow \bar{g},$$

cuando $\xi \rightarrow \infty$. Entonces tenemos

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} [\bar{g}(\xi) - \check{g}(\xi)] = 0^+,$$

y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\bar{\varphi}(x, t; \gamma, \mu) - \check{\varphi}(x, t; \gamma, \mu)] = 0^+.$$

Y el límite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\varphi}(x, t; \gamma, \mu) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{\varphi}(x, t; \gamma, \mu)$$

es claro por el comportamiento del “*kink*”.

□

Bibliografía

- [1] Antonio Barone and Gianfranco Paternó. *Physics and applications of the Josephson effect*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1982.
- [2] Peter L Christiansen, Mads Peter Sorensen, and AC Scott. *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*, volume 542. Springer Science & Business Media, 2000.
- [3] Armando D’Anna, Gaetano Fiore, Monica De Angelis, et al. Towards soliton solutions of a perturbed sine-gordon equation. *Rendiconto dell’Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche*, 72:95–110, 2005.
- [4] Richard C DiPrima et al. Elementary differential equations and boundary value problems. 1969.
- [5] P. G. Drazin. *Solitons*, volume 85 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [6] Gaetano Fiore, Gabriele Guerriero, Alfonso Maio, and Enrico Mazziotti. On kinks and other travelling-wave solutions of a modified sine-gordon equation. *Meccanica*, 50:1989–2006, 2015.
- [7] Christopher KRT Jones, Robert Marangell, Peter D Miller, and Ramón G Plaza. Spectral and modulational stability of periodic wavetrains for the nonlinear klein–gordon equation. *Journal of Differential Equations*, 257(12):4632–4703, 2014.
- [8] B. D. Josephson. Supercurrents through barriers. *Adv. in Phys.*, 14(56):419–451, 1965.
- [9] Jürgen Jost and Xianqing Li-Jost. *Calculus of variations*, volume 64. Cambridge University Press, 1998.

- [10] Alan C Newell. The inverse scattering transform, nonlinear waves, singular perturbations and synchronized solitons. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 25–52, 1978.
- [11] Alwyn C. Scott. A nonlinear Klein-Gordon equation. *Am. J. Phys.*, 37(1):52–61, 1969.
- [12] H. Susanto and S.A. van Gils. Existence and stability analysis of solitary waves in a tricrystal junction. *Phys. Lett. A*, 338(3):239 – 246, 2005.
- [13] Minoru Urabe. Infinitesimal deformation of the periodic solution of the second kind and its application to the equation of a pendulum. *Journal of Science of the Hiroshima University, Series A (Mathematics, Physics, Chemistry)*, 18(2):183–219, 1954.
- [14] Minoru Urabe. The least upper bound of a damping coefficient ensuring the existence of a periodic motion of a pendulum under constant torque. *Journal of Science of the Hiroshima University, Series A (Mathematics, Physics, Chemistry)*, 18(3):379–389, 1955.