

Estabilidad de ondas de choque con radiación*

Ramón G. Plaza

*Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México*

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
13 de abril, 2010.

*Colaboradores: C. Lattanzio, C. Mascia, T. Nguyen, K. Zumbrun. Patrocinado parcialmente por DGAPA-UNAM, proyecto PAPIIT IN-109008.

- 1 **Introducción**
- 2 **Historia (resumida): Ondas de choque viscosas**
- 3 **Ondas de choque con radiación: modelo escalar**
 - El problema espectral
 - Dos funciones de Evans
 - Cotas puntuales para el operador de Green
 - Análisis no lineal
- 4 **Sistemas hiperbólico-elípticos**
 - Hipótesis
 - Resultados
- 5 **Estabilidad espectral para sistemas**
 - Problema espectral
 - Estimación tipo Kawashima
 - Estimación tipo Goodman

Hidrodinámica con radiación

Introducción

Ondas de choque viscosas

Modelo escalar

El problema espectral

Dos funciones de Evans

Cotas puntuales para el operador de Green

Análisis no lineal

Sistemas hiperbólico-elípticos

Hipótesis

Resultados

Estabilidad espectral para sistemas

Problema espectral

Estimación tipo Kawashima

Estimación tipo Goodman

- W. G. VINCENTI AND C. H. KRUGER, *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley & Sons, New York, 1965.

Sistema de Euler-Poisson ($d = 1$):

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0, \\ (\rho(e + \frac{1}{2}u^2))_t + (\rho u(e + \frac{1}{2}u^2) + pu)_x &= -q_x, \\ -q_{xx} + aq + b(\theta^4)_x &= 0,\end{aligned}\tag{EP}$$

Hidrodinámica con radiación

- W. G. VINCENTI AND C. H. KRUGER, *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley & Sons, New York, 1965.

Sistema de Euler-Poisson ($d = 1$):

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0, \\ (\rho(e + \frac{1}{2}u^2))_t + (\rho u(e + \frac{1}{2}u^2) + pu)_x &= -q_x, \\ -q_{xx} + aq + b(\theta^4)_x &= 0,\end{aligned}\tag{EP}$$

ρ = densidad de masa,

u = velocidad,

p = presión,

e = densidad de energía interna,

θ = temperatura.

$$p = p(\rho, \theta), e = e(\rho, \theta) : \quad p_\rho > 0, p_\theta \neq 0, e_\theta > 0.$$

$q = \rho\chi_x$, flujo de calor por radiación, χ = energía de radiación.

$a, b > 0$: Constantes relacionadas al coeficiente de absorción α y la constante de Stefan-Boltzmann σ : $a = 3\alpha^2$, $b = 4\alpha\sigma$.

ρ = densidad de masa,

u = velocidad,

p = presión,

e = densidad de energía interna,

θ = temperatura.

$$p = p(\rho, \theta), e = e(\rho, \theta) : \quad p_\rho > 0, p_\theta \neq 0, e_\theta > 0.$$

$q = \rho\chi_x$, flujo de calor por radiación, χ = energía de radiación.

$a, b > 0$: Constantes relacionadas al coeficiente de absorción α y la constante de Stefan-Boltzmann σ : $a = 3\alpha^2$, $b = 4\alpha\sigma$.

Modelo de Hamer

- K. HAMER, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **24** (1971).

$$\begin{aligned}u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x &= -q_x, \\ -q_{xx} + q &= -u_x,\end{aligned}\tag{H}$$

$q, u \in \mathbb{R}$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Flujo de Burgers: $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

Modelo aproximado a (EP).

Modelo de Hamer

- K. HAMER, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **24** (1971).

$$\begin{aligned}u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x &= -q_x, \\ -q_{xx} + q &= -u_x,\end{aligned}\tag{H}$$

$q, u \in \mathbb{R}$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Flujo de Burgers: $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

Modelo aproximado a (EP).

Modelo de Hamer

- K. HAMER, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **24** (1971).

$$\begin{aligned}u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x &= -q_x, \\ -q_{xx} + q &= -u_x,\end{aligned}\tag{H}$$

$q, u \in \mathbb{R}$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Flujo de Burgers: $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

Modelo aproximado a (EP).

Ondas de choque con radiación

Solución de tipo onda viajera

$$(u, q)(x, t) = (\bar{U}, \bar{Q})(x - st), \quad (\bar{U}, \bar{Q})(\xi) \rightarrow (U_{\pm}, 0), \quad \xi \rightarrow \pm\infty,$$

(U_+, U_-, s) = onda de choque clásica del sistema hiperbólico

- Hidrodinámica y transporte de radiación determinan la propagación de la onda y su estructura.
- *Régimen de difusión en no-equilibrio*: La radiación y el material tienen diferente temperatura ($\theta \neq q^{1/4}$); el gas interactúa con la radiación mediante intercambio de energía.
- La radiación es descrita por un estado estacionario de difusión.
- Hipótesis *gris* (*gray non-equilibrium diffusion*): Todos los fotones tienen la misma frecuencia (LOWRIE, EDWARDS, *Shock waves* **18** (2008)).

Regularización

Modelo de Hamer:

$$q = -(1 - \partial_x)^{-1} u_x =: -\mathcal{K}u_x$$

$$\mathcal{K}f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy = K * f, \quad K = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

$$q_x = u - \mathcal{K}u,$$

$$u_t + uu_x = -u + \mathcal{K}u,$$

Modelo de Rosenau (ROSENAU, Phys. Rev. A **40** (1989);
SCHOCHET, TADMOR, Arch. Ration. Mech. Anal. **119** (1992)):

Regularización de la expansión de Chapman-Enskog.

Regularización

Modelo de Hamer:

$$q = -(1 - \partial_x)^{-1} u_x =: -\mathcal{K}u_x$$
$$\mathcal{K}f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy = K * f, \quad K = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$
$$q_x = u - \mathcal{K}u,$$

$$u_t + uu_x = -u + \mathcal{K}u,$$

Modelo de Rosenau (ROSENAU, Phys. Rev. A **40** (1989);
SCHOCHET, TADMOR, Arch. Ration. Mech. Anal. **119** (1992)):

Regularización de la expansión de Chapman-Enskog.

Formas simétrica y normal

Variables conservadas:

$$U := (\rho, \rho u, \rho(e + \frac{1}{2}u^2))^{\top}$$

Euler-Poisson (EP):

$$\begin{aligned} U_t + f(U)_x &= -Lq_x, \\ -q_{xx} + Rq + \nu(U)g(U)_x &= 0, \end{aligned}$$

$$f(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u(e + \frac{1}{2}u^2) + pu)^{\top},$$

$$L = (0, 0, 1)^{\top},$$

$$R = a \equiv 1,$$

$$0 < \nu(U) = 4b\theta^5,$$

$$g(U) = -1/\theta$$

Entropía (matemática):

$$\eta = -\rho s,$$

$$W := (D_U \eta)^\top = \left(-\rho + (e - \frac{1}{2}u^2 + p\rho^{-1})/\theta, u/\theta, -1/\theta \right)^\top,$$

$$D_U W = D_U^2 \eta > 0$$

$$U \mapsto W$$

Simetrización:

$$\begin{aligned}A_0(W)W_t + A(W)W_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + \tilde{\nu}(W)W_x &= 0,\end{aligned}$$

$$A_0(W) = (D_W U)(W) = (D_U^2 \eta)^{-1}$$

$$A(W) = D_W(f(U(W))) = (D_U f)(D_U^2 \eta)^{-1}$$

Simetrización:

$$\begin{aligned}A_0(W)W_t + A(W)W_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + \tilde{\nu}(W)W_x &= 0,\end{aligned}$$

$$A_0(W) = (D_W U)(W) = (D_U^2 \eta)^{-1}$$

$$A(W) = D_W(f(U(W))) = (D_U f)(D_U^2 \eta)^{-1}$$

Forma normal:

$$W \mapsto V := (\rho, u, \theta)^\top$$

Mult. por $(D_V W)^\top$:

$$\begin{aligned}\bar{A}_0(V)V_t + \bar{A}(V)V_x + \bar{L}(V)q_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + \bar{\nu}(V)\bar{L}(V)^\top V_x &= 0,\end{aligned}$$

$$\bar{A}_0(V) = (D_V W)^\top A_0(W) D_V W = (D_V W)^\top D_V U,$$

$$\bar{A}(V) = (D_V W)^\top A(W) D_V W = (D_V W)^\top D_V f(U),$$

$$\bar{L}(V) = (D_V W)^\top L = (D_V W)^\top (0, 0, 1)^\top = (0, 0, 1)^\top / \theta^2,$$

$$\bar{\nu}(V) = \nu(U(W(V))) = 4b\theta^5 > 0,$$

Forma normal:

$$W \mapsto V := (\rho, u, \theta)^\top$$

Mult. por $(D_V W)^\top$:

$$\bar{A}_0(V)V_t + \bar{A}(V)V_x + \bar{L}(V)q_x = 0,$$

$$-q_{xx} + q + \bar{\nu}(V)\bar{L}(V)^\top V_x = 0,$$

$$\bar{A}_0(V) = (D_V W)^\top A_0(W) D_V W = (D_V W)^\top D_V U,$$

$$\bar{A}(V) = (D_V W)^\top A(W) D_V W = (D_V W)^\top D_V f(U),$$

$$\bar{L}(V) = (D_V W)^\top L = (D_V W)^\top (0, 0, 1)^\top = (0, 0, 1)^\top / \theta^2,$$

$$\bar{\nu}(V) = \nu(U(W(V))) = 4b\theta^5 > 0,$$

$$\bar{A}(V) = \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} p_\rho u / \rho & p_\rho & 0 \\ p_\rho & \rho u & p_\theta \\ 0 & p_\theta & p e_{\theta u} / \theta \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}(V) \bar{L}(V) V_x = 4b\theta^3 (0, 0, \theta_x)^\top =: b\bar{g}(V)_x$$

$$\bar{g}(V) = (0, 0, \theta^4),$$

Sistema hiperbólico-elíptico general:

$$\begin{aligned} V_t + f(V)_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + g(V)_x &= 0. \end{aligned}$$

$$\bar{A}(V) = \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} p_\rho u / \rho & p_\rho & 0 \\ p_\rho & \rho u & p_\theta \\ 0 & p_\theta & p e_\theta u / \theta \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}(V) \bar{L}(V) V_x = 4b\theta^3(0, 0, \theta_x)^\top =: b\bar{g}(V)_x$$

$$\bar{g}(V) = (0, 0, \theta^4),$$

Sistema hiperbólico-elíptico general:

$$\begin{aligned} V_t + f(V)_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + g(V)_x &= 0. \end{aligned}$$

$$\bar{A}(V) = \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} p_\rho u / \rho & p_\rho & 0 \\ p_\rho & \rho u & p_\theta \\ 0 & p_\theta & p e_{\theta u} / \theta \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}(V) \bar{L}(V) V_x = 4b\theta^3(0, 0, \theta_x)^\top =: b\bar{g}(V)_x$$

$$\bar{g}(V) = (0, 0, \theta^4),$$

Sistema hiperbólico-elíptico general:

$$\begin{aligned} V_t + f(V)_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + g(V)_x &= 0. \end{aligned}$$

Difusión positiva

Vector propio (campo característico $p = 1$):

$$\bar{A}r_1 = (u + c)\bar{A}_0r_1, \quad l_1\bar{A} = (u + c)l_1\bar{A}_0$$

$$r_1^\top = l_1 = (\rho, c, (c^2 - p_\rho)\rho/p_\theta) = (\rho, c, z_*)$$

$$B(V) := (D_V \bar{g})^\top = (0, 0, 4\theta^3)$$

Difusión positiva

Vector propio (campo característico $p = 1$):

$$\bar{A}r_1 = (u + c)\bar{A}_0r_1, \quad l_1\bar{A} = (u + c)l_1\bar{A}_0$$

$$r_1^\top = l_1 = (\rho, c, (c^2 - p_\rho)\rho/p_\theta) = (\rho, c, z_*)$$

$$B(V) := (D_V \bar{g})^\top = (0, 0, 4\theta^3)$$

$$l_1 L B r_1 = (\rho, c, z_*) (0, 0, 1)^\top (0, 0, 4\theta^3) (\rho, c, z_*)^\top = z_*^2 4\theta^3 > 0$$

*Coefficiente de difusión positiva en la dirección característica
 $p = 1$ en la expansión de Chapman-Enskog.*

$$l_1 L B r_1 = (\rho, c, z_*) (0, 0, 1)^\top (0, 0, 4\theta^3) (\rho, c, z_*)^\top = z_*^2 4\theta^3 > 0$$

*Coeficiente de difusión positiva en la dirección característica
 $p = 1$ en la expansión de Chapman-Enskog.*

Expansión de Chapman-Enskog:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t + \nabla p &= \sum_0^{\infty} \varepsilon^{2n+1} \Delta^n (\mu_n \Delta \mathbf{u} + \alpha_n \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \text{otros términos,} \\ &= \varepsilon \mu_0 \Delta \mathbf{u} + \varepsilon^3 \mu_1 \Delta^2 \mathbf{u} + \dots\end{aligned}$$

$\mu = \varepsilon \mu_0 \ll 1$, coeficiente de viscosidad cinemática, adimensional

$\varepsilon^3 \mu_1$, – coeficiente de Burnett

Modelo de Rosenau:

$$\sum_0^{\infty} \varepsilon^{2n+1} \Delta^n (\mu_n \Delta u) \sim \frac{\mu}{1 - \varepsilon^2 m^2 \Delta} \Delta u, \quad m = \mu_1 / \mu_0 > 0.$$

$$\mu_* = \frac{\mu}{1 - \varepsilon^2 m^2 \Delta}, \quad \hat{\mu}_*(k) = \frac{\mu}{1 + \varepsilon^2 m^2 k^2}$$

Modelo escalar:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u\right)_x = \varepsilon \partial_x^2 \left(\frac{1}{1 + m^2 \varepsilon^2 k^2} \hat{u}(k) \right)^\vee(x) = -u + \mathcal{K}u$$

$$\mathcal{K}f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy = K * f, \quad K = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

Modelo de Rosenau:

$$\sum_0^{\infty} \varepsilon^{2n+1} \Delta^n (\mu_n \Delta u) \sim \frac{\mu}{1 - \varepsilon^2 m^2 \Delta} \Delta u, \quad m = \mu_1 / \mu_0 > 0.$$

$$\mu_* = \frac{\mu}{1 - \varepsilon^2 m^2 \Delta}, \quad \hat{\mu}_*(k) = \frac{\mu}{1 + \varepsilon^2 m^2 k^2}$$

Modelo escalar:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u\right)_x = \varepsilon \partial_x^2 \left(\frac{1}{1 + m^2 \varepsilon^2 k^2} \hat{u}(k) \right)^\vee(x) = -u + \mathcal{K}u$$

$$\mathcal{K}f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy = K * f, \quad K = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

Para sistemas:

$$A\mathbb{R} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & a_p & \\ & & A_2 \end{pmatrix},$$
$$v = u$$

$$(LB(u)u_x)_x = (LBR)u_{xx} + \dots,$$

Parte principal:

$$(l_p L B r_p)(v_p)_{xx} + \dots$$

Para sistemas:

$$A\mathbb{R} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & a_p & \\ & & A_2 \end{pmatrix},$$
$$v = u$$

$$(LB(u)u_x)_x = (LBR)u_{xx} + \dots,$$

Parte principal:

$$(l_p LBr_p)(v_p)_{xx} + \dots$$

Trabajo previo

Existencia de perfiles:

- **SCHOCHET, TADMOR**, Arch. Ration. Mech. Anal. **119** (1992). Perfiles de amplitud pequeña, modelo de Hamer.
- **KAWASHIMA, NISHIBATA**, SIAM J. Math. Anal. **30** (1998). Modelo de Hamer. Amplituda acotada.
- **LIN, COULOMBEL, GOUDON** Phys. D **218** (2006). Amplitud pequeña, sistema de Euler-Poisson, gas ideal $\rho = (\gamma - 1)\rho e$.
- **LATTANZIO, MASCIA, SERRE**, *Indiana Univ. Math. J.* **56** (2007). Modelo general, f general, acoplamiento lineal. Caso de sistemas se reduce al escalar (!)
- **LATTANZIO, MASCIA, SERRE**, Proc. HYP2006, Springer (2008). Acoplamiento no lineal.

Misceláneo (problema de Cauchy, $t \rightarrow +\infty$, “well-posedness”):

- **KAWASHIMA, NISHIBATA**, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **9** (1999). Problema de Cauchy, modelo de Hamer.
- **SERRE**, *Comm. Math. Sci.* **1** (2003). Estabilidad de constantes en L^1 , modelo de Hamer.
- **KAWASHIMA, TANAKA**, *Kyushu J. Math.* **58** (2004): Estabilidad de ondas de rarefacción (Hamer).
- **KAWASHIMA, NIKKUNI, NISHIBATA**, *Monogr. Surv. Pure Appl. Math.* **99** (1999). Problema de Cauchy. Sistemas hiperbólico-elípticos generales.
- **KAWASHIMA, NIKKUNI, NISHIBATA**, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **170** (2003). Comportamiento de soluciones cuando $t \rightarrow +\infty$.
- **LOWRIE, EDWARDS**, *Shock Waves* **18** (2008). Cálculo numérico de las ondas, Euler-Poisson (gas ideal).

Estabilidad de ondas de choque con radiación:

- **KAWASHIMA, NISHIBATA**, *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1998). Estabilidad en L^2 , modelo de Hamer (escalar), acoplamiento lineal.
- **LIN, COULOMBEL, GOUDON**, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **345** (2007): Estabilidad bajo perturbaciones de masa cero, gas ideal, $p = (\gamma - 1)\rho e$. Estimaciones al estilo de Goodman-Matsumura-Nishihara.

Referencias:

- Estabilidad de ondas de choque en el caso escalar general (función de flujo f general, acoplamiento no lineal): C. LATTANZIO, C. MASCIA, T. NGUYEN, R. G. PLAZA, K. ZUMBRUN, *SIAM J. Math. Anal.* **41**, no. 6 (2009).
- Estabilidad para sistemas hiperbólico-elípticos generales (ondas de amplitud pequeña): T. NGUYEN, R. G. PLAZA, K. ZUMBRUN, *Phys. D* **239**, no. 8 (2010).

Referencias:

- Estabilidad de ondas de choque en el caso escalar general (función de flujo f general, acoplamiento no lineal): **C. LATTANZIO, C. MASCIA, T. NGUYEN, R. G. PLAZA, K. ZUMBRUN**, *SIAM J. Math. Anal.* **41**, no. 6 (2009).
- Estabilidad para sistemas hiperbólico-elípticos generales (ondas de amplitud pequeña): **T. NGUYEN, R. G. PLAZA, K. ZUMBRUN**, *Phys. D* **239**, no. 8 (2010).

1 Introducción

2 Historia (resumida): Ondas de choque viscosas

3 Ondas de choque con radiación: modelo escalar

El problema espectral

Dos funciones de Evans

Cotas puntuales para el operador de Green

Análisis no lineal

4 Sistemas hiperbólico-elípticos

Hipótesis

Resultados

5 Estabilidad espectral para sistemas

Problema espectral

Estimación tipo Kawashima

Estimación tipo Goodman

Ondas de choque viscosas

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x,$$

$u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $B(u) \equiv I$ viscosidad idéntica; $B(u)$ degenerada (Navier-Stokes).

Onda de choque (perfil) viscosa: solución onda viajera, $u(x, t) = \bar{U}(x - st)$, $\bar{U}(x) \rightarrow u_{\pm}$, (u_+, u_-, s) es un choque clásico del sistema de leyes de conservación.

Ondas de choque viscosas

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x,$$

$u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $B(u) \equiv I$ viscosidad idéntica; $B(u)$ degenerada (Navier-Stokes).

Onda de choque (perfil) viscosa: solución onda viajera, $u(x, t) = \bar{U}(x - st)$, $\bar{U}(x) \rightarrow u_{\pm}$, (u_+, u_-, s) es un choque clásico del sistema de leyes de conservación.

Estabilidad

- Ondas de choque viscosas *escalares*: **ILIN, OLEINIK; SATTINGER.**
- Sistemas: **GOODMAN**, Arch. Ration. Mech. Anal. **95** (1986). Sistemas generales con $B = I$, perturbaciones de masa cero. Estimaciones de energía mediante diagonalización de la parte hiperbólica.
- **MATSUMURA, NISHIHARA**, Japan J. Appl. Math. **2** (1985). Mismo enfoque para Euler, gas ideal.

Método de energía: **LIU**(1986) ondas de difusión; **SZEPSSY, XIN**,(1992) resultado completo.

Estabilidad

- Ondas de choque viscosas *escalares*: **ILIN, OLEINIK; SATTINGER.**
- Sistemas: **GOODMAN**, Arch. Ration. Mech. Anal. **95** (1986). Sistemas generales con $B = I$, perturbaciones de masa cero. Estimaciones de energía mediante diagonalización de la parte hiperbólica.
- **MATSUMURA, NISHIHARA**, Japan J. Appl. Math. **2** (1985). Mismo enfoque para Euler, gas ideal.

Método de energía: LIU(1986) ondas de difusión; SZEPPSY, XIN,(1992) resultado completo.

Estabilidad

- Ondas de choque viscosas *escalares*: **ILIN, OLEINIK; SATTINGER.**
- Sistemas: **GOODMAN**, Arch. Ration. Mech. Anal. **95** (1986). Sistemas generales con $B = I$, perturbaciones de masa cero. Estimaciones de energía mediante diagonalización de la parte hiperbólica.
- **MATSUMURA, NISHIHARA**, Japan J. Appl. Math. **2** (1985). Mismo enfoque para Euler, gas ideal.

Método de energía: LIU(1986) ondas de difusión; SZEPPSY, XIN,(1992) resultado completo.

Estabilidad

- Ondas de choque viscosas *escalares*: **ILIN, OLEINIK; SATTINGER.**
- Sistemas: **GOODMAN**, Arch. Ration. Mech. Anal. **95** (1986). Sistemas generales con $B = I$, perturbaciones de masa cero. Estimaciones de energía mediante diagonalización de la parte hiperbólica.
- **MATSUMURA, NISHIHARA**, Japan J. Appl. Math. **2** (1985). Mismo enfoque para Euler, gas ideal.

Método de energía: **LIU**(1986) ondas de difusión; **SZEPSSY, XIN**,(1992) resultado completo.

Método de cotas puntuales para la función de Green:

- **LIU**, CPAM 50 (1997): Función de Green (aproximada) del operador linealizado alrededor de la onda.
- **ZUMBRUN**: Asumiendo estabilidad espectral, se establecen cotas para el núcleo del resolvente; cotas puntuales para la función de Green.

ZUMBRUN, HOWARD, (1999), $B = I$, **ZUMBRUN, MASCIA** (2002,2004): B degenerada. Otros sistemas: relajación, multi-d, boundary-layers, choques subcompresivos, etc.

Método de la función de Evans: Estabilidad espectral \Rightarrow estabilidad no lineal.

Método de cotas puntuales para la función de Green:

- **LIU**, CPAM 50 (1997): Función de Green (aproximada) del operador linealizado alrededor de la onda.
- **ZUMBRUN**: Asumiendo estabilidad espectral, se establecen cotas para el núcleo del resolvente; cotas puntuales para la función de Green.

ZUMBRUN, HOWARD, (1999), $B = I$, ZUMBRUN, MASCIA (2002,2004): B degenerada. Otros sistemas: relajación, multi-d, boundary-layers, choques subcompresivos, etc.

Método de la función de Evans: Estabilidad espectral \Rightarrow estabilidad no lineal.

Método de cotas puntuales para la función de Green:

- **LIU**, CPAM 50 (1997): Función de Green (aproximada) del operador linealizado alrededor de la onda.
- **ZUMBRUN**: Asumiendo estabilidad espectral, se establecen cotas para el núcleo del resolvente; cotas puntuales para la función de Green.

ZUMBRUN, HOWARD, (1999), $B = I$, **ZUMBRUN, MASCIA** (2002, 2004): B degenerada. Otros sistemas: relajación, multi-d, boundary-layers, choques subcompresivos, etc.

Método de la función de Evans: Estabilidad espectral \Rightarrow estabilidad no lineal.

Método de cotas puntuales para la función de Green:

- **LIU**, CPAM 50 (1997): Función de Green (aproximada) del operador linealizado alrededor de la onda.
- **ZUMBRUN**: Asumiendo estabilidad espectral, se establecen cotas para el núcleo del resolvente; cotas puntuales para la función de Green.

ZUMBRUN, HOWARD, (1999), $B = I$, **ZUMBRUN, MASCIA** (2002, 2004): B degenerada. Otros sistemas: relajación, multi-d, boundary-layers, choques subcompresivos, etc.

Método de la función de Evans: Estabilidad espectral \Rightarrow estabilidad no lineal.

Ejemplo: ecuación de Burgers “viscosa”

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = u_{xx},$$

Perfil:

$$\bar{u} = -\tanh(x/2).$$

$$\bar{u} \rightarrow \mp 1, x \rightarrow \pm\infty, s = 0.$$

Problema espectral:

$$a(x) = f'(\bar{u}(x)),$$

$$Lu := u_{xx} - (a(x)u)_x,$$

Operador “integrado”:

$$\mathcal{L}u := u_{xx} - a(x)u_x,$$

Formulación de primer orden:

$$W_x = \mathbb{A}(x, \lambda)W, \quad W = (u, u_x)^\top$$

Sistemas asintóticos:

$$\mathbb{A}_\pm(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbb{A}(x, \lambda).$$

Para $\lambda \in \Omega$, $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \Omega$, los coeficientes son *hiperbólicos*. Además,

$$\dim U^+(\lambda) = \dim U^-(\lambda), \quad \dim S^+(\lambda) = \dim S^-(\lambda).$$

Región de “*consistent splitting*”.

Función de Evans

En $\lambda \in \Omega$ las funciones propias $W \in L^2$ se construyen mediante intersección no-trivial de las variedades estable e inestable en $+\infty, -\infty$.

Función de Evans:

$$D(\lambda) = \det (W_1^-(x, \lambda), \dots, W_k^-(x, \lambda), W_{k+1}^+(x, \lambda), \dots, W_n^+(x, \lambda))|_{x=0}$$

D es analítica en $\lambda \in \Omega$, $D = 0$ ssi $\lambda \in \sigma_{pt}(L)$.

Función de Evans

En $\lambda \in \Omega$ las funciones propias $W \in L^2$ se construyen mediante intersección no-trivial de las variedades estable e inestable en $+\infty, -\infty$.

Función de Evans:

$$D(\lambda) = \det (W_1^-(x, \lambda), \dots, W_k^-(x, \lambda), W_{k+1}^+(x, \lambda), \dots, W_n^+(x, \lambda))|_{x=0}$$

D es analítica en $\lambda \in \Omega$, $D = 0$ ssi $\lambda \in \sigma_{pt}(L)$.

Idea:

Asumiendo estabilidad espectral $D \neq 0$ en $\text{Re } \lambda \geq 0$, exceptuando $\lambda = 0$.

Generador:

$$e^{Lt}f = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; y)f(y) dy,$$

$$G(x, t; y) = \text{P.V.} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} G_{\lambda}(x, y) d\lambda, \quad \gamma \geq \gamma_0 > 0,$$

Núcleo del resolvente:

$$G_{\lambda}(x, y) = (\lambda - L)^{-1} \delta_y(x).$$

Heurísticamente:

Cotas para el núcleo del resolvente \Rightarrow cotas puntuales para la función de Green \Rightarrow cotas para la solución (principio de Duhamel).

Idea:

Asumiendo estabilidad espectral $D \neq 0$ en $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, exceptuando $\lambda = 0$.

Generador:

$$e^{Lt}f = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; y)f(y) dy,$$

$$G(x, t; y) = \text{P.V.} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} G_{\lambda}(x, y) d\lambda, \quad \gamma \geq \gamma_0 > 0,$$

Núcleo del resolvente:

$$G_{\lambda}(x, y) = (\lambda - L)^{-1} \delta_y(x).$$

Heurísticamente:

Cotas para el núcleo del resolvente \Rightarrow cotas puntuales para la función de Green \Rightarrow cotas para la solución (principio de Duhamel).

Volviendo a Burgers:

Perturbación: $u(x, t) = \tilde{u}(x + \alpha(t), t) - \bar{u}(x)$.

$$u_t - Lu = N(u)_x + \dot{\alpha}(t)(\bar{u}_x + u_x)$$

Mediante Hopf-Cole:

$$G(x, t; y) = e^{Lt} \delta_y(x) = E + S + R,$$

$$E(x, t; y) = \bar{u}_x e(y, t), \quad e(y, t) := \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfn} \left(\frac{-y-t}{\sqrt{4t}} \right) - \operatorname{erfn} \left(\frac{-y+t}{\sqrt{4t}} \right) \right)$$

$$S(x, t; y) = \left(\left(\frac{\exp(-x/2)}{\exp(x/2) + \exp(x/2)} \right) \frac{\exp(-((x-y-t)^2/4t))}{\sqrt{4\pi t}} + \left(\frac{\exp(-x/2)}{\exp(x/2) + \exp(x/2)} \right) \frac{\exp(-((x-y+t)^2/4t))}{\sqrt{4\pi t}} \right),$$

$$R(x, t; y) = \bar{u}_x \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfn} \left(\frac{x-y-t}{\sqrt{4t}} \right) - \operatorname{erfn} \left(\frac{-y-t}{\sqrt{4t}} \right) \right) + \bar{u}_x \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfn} \left(\frac{x-y+t}{\sqrt{4t}} \right) - \operatorname{erfn} \left(\frac{-y+t}{\sqrt{4t}} \right) \right),$$

$$\operatorname{erfn}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^z e^{-\xi^2} d\xi.$$

- E = término “excitado”, parte que no decae de la solución linealizada que involucra a la función propia \bar{u}_x , asociada a $\lambda = 0$.
- S = término de “scattering”, señales gaussianas que se propagan a lo largo de características (hiperbólica),
- R = residuo, decae rápidamente.

- 1 Introducción
- 2 Historia (resumida): Ondas de choque viscosas
- 3 Ondas de choque con radiación: modelo escalar
 - El problema espectral
 - Dos funciones de Evans
 - Cotas puntuales para el operador de Green
 - Análisis no lineal
- 4 Sistemas hiperbólico-elípticos
 - Hipótesis
 - Resultados
- 5 Estabilidad espectral para sistemas
 - Problema espectral
 - Estimación tipo Kawashima
 - Estimación tipo Goodman

Modelo escalar

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + M(u)_x &= 0,\end{aligned}$$

$$u, q \in \mathbb{R}, M, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L \in \mathbb{R} \text{ (constante).}$$

Ondas viajeras:

$$(u, q)(x, t) = (U, Q)(x - st), \quad (U, Q)(\pm\infty) = (u_{\pm}, 0),$$

$$u_+ \neq u_-. \text{ W.l.o.g } s = 0.$$

Modelo escalar

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + M(u)_x &= 0,\end{aligned}$$

$u, q \in \mathbb{R}, M, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ (constante).

Ondas viajeras:

$$(u, q)(x, t) = (U, Q)(x - st), \quad (U, Q)(\pm\infty) = (u_{\pm}, 0),$$

$u_+ \neq u_-$. W.l.o.g $s = 0$.

Hipótesis:

$$f, M \in C^5, \quad (\text{regularidad}), \quad (\text{A0})$$

$$f''(u) > 0, \quad u \in [u_+, u_-] \quad (\text{nolinealidad genuina}), \quad (\text{A1})$$

$$f(u_-) = f(u_+), \quad (\text{condición de Rankine-Hugoniot}), \quad (\text{A2})$$

$$u_+ < u_-, \quad (\text{condición de entropía de Lax}), \quad (\text{A3})$$

$$LM'(u) > 0, \quad u \in [u_+, u_-] \quad (\text{difusión positiva}), \quad (\text{A4})$$

$$a(x) := f'(U), \quad b(x) := M'(U).$$

$$Lb(0) + (k + \frac{1}{2})a'(0) > 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A5}_k)$$

Estructura de los perfiles

Ecuaciones de onda viajera:

$$\begin{aligned}f(U)' + LQ' &= 0, \\ -Q'' + Q + M(U)' &= 0,\end{aligned}$$

$$(U, Q)(\pm\infty) = (u_{\pm}, 0).$$

Teoría de existencia: LATTANZIO, MASCIA, SERRE, *Indiana Univ. Math. J.* **56** (2007); Proc. HYP2006, Springer (2008).

Estructura de los perfiles

Ecuaciones de onda viajera:

$$\begin{aligned}f(U)' + LQ' &= 0, \\ -Q'' + Q + M(U)' &= 0,\end{aligned}$$

$$(U, Q)(\pm\infty) = (u_{\pm}, 0).$$

Teoría de existencia: **LATTANZIO, MASCIA, SERRE**, *Indiana Univ. Math. J.* **56** (2007); Proc. HYP2006, Springer (2008).

Proposición [LMS]

Bajo (A0) - (A4) existe una única onda viajera (módulo traslaciones) $(U, Q)(x)$. Más aún, el perfil de velocidad U es de clase C^2 excepto a lo sumo en un sólo punto donde tiene un salto entrópico que satisface Rankine-Hugoniot; U es, además, monótono decreciente $U_x < 0$, y la función $a(x) = f'(U(x))$ de clase C^1 a.e. se anula únicamente en un punto que asumimos $x = 0$

$$a(0) = 0.$$

Si la amplitud de la onda es suficientemente pequeña el perfil es de clase C^2 .

Consecuencias:

$$a'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x a(x) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Integrando:

$$LQ = f(u_{\pm}) - f(U) > 0,$$
$$(a'(x) + Lb(x))U' = -LQ - a(x)U'',$$

En $x = 0$, U monótono:

$$a'(0) + Lb(0) > 0. \quad (\text{P})$$

$(A5_1)$ implica (P).

Consecuencias:

$$a'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x a(x) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Integrando:

$$LQ = f(u_{\pm}) - f(U) > 0,$$
$$(a'(x) + Lb(x))U' = -LQ - a(x)U'',$$

En $x = 0$, U monótono:

$$a'(0) + Lb(0) > 0. \quad (\text{P})$$

(A5₁) implica (P).

Decaimiento exponencial

$$\left| (d/dx)^k (U - u_{\pm}, Q) \right| \leq C e^{-\eta|x|}, \quad k = 0, \dots, 4,$$

cuando $|x| \rightarrow +\infty$, cierto $\eta > 0$.

Problema espectral

$$\begin{aligned}\lambda u + (a(x)u)' + Lq' &= 0, \\ -q'' + q + (b(x)u)' &= 0.\end{aligned}\tag{SP}$$

' = d/dx , $u, q \in L^2(\mathbb{R})$ perturbaciones.

Estabilidad espectral (caso escalar)

Condición de “cero-masa”:

$$\int u = 0, \quad \int q = 0,$$

Integrando (SP):

$$\begin{aligned} \lambda u + a(x) u' + Lq' &= 0, \\ -q'' + q + b(x) u' &= 0. \end{aligned}$$

Lema (Estabilidad espectral)

Sea (u, q) función propia con $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\operatorname{Re} \lambda < 0$ si se cumple alguna de:

- (i) b es constante (acoplamiento lineal), ó
- (ii) $|u_+ - u_-|$ es suficientemente pequeño.

Prueba con estimaciones de energía:

$$\operatorname{Re} \lambda |b^{1/2} u|_{L^2}^2 \leq \langle a' b u, u \rangle - \frac{L}{2} \|q\|_{H^1}^2 + C \langle (|a| + |b'|) |b'| u, u \rangle.$$

$Lb > 0$, w.l.o.g. $b \geq \theta > 0$ ($q \rightarrow -q$). $a' > 0$,
 $a', b' = \mathcal{O}(|u_+ - u_-|)$.

Lema (Estabilidad espectral)

Sea (u, q) función propia con $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\operatorname{Re} \lambda < 0$ si se cumple alguna de:

- (i) b es constante (acoplamiento lineal), ó
- (ii) $|u_+ - u_-|$ es suficientemente pequeño.

Prueba con estimaciones de energía:

$$\operatorname{Re} \lambda |b^{1/2} u|_{L^2}^2 \leq \langle a' b u, u \rangle - \frac{L}{2} \|q\|_{H^1}^2 + C \langle (|a| + |b'|) |b'| u, u \rangle.$$

$Lb > 0$, w.l.o.g. $b \geq \theta > 0$ ($q \rightarrow -q$). $a' > 0$,
 $a', b' = \mathcal{O}(|u_+ - u_-|)$.

Formulación de primer orden

Problema espectral: $p := b(x)u - q'$.

$$\begin{aligned} a(x)u' &= -(\lambda + a'(x) + Lb(x))u + Lp, \\ q' &= b(x)u - p, \\ p' &= -q. \end{aligned} \tag{SP2}$$

Regularidad cerca de $x = 0$.

Lema

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu := (\operatorname{Re} \lambda + a'(0) + Lb(0))/|a'(0)|$. Bajo (A0) - (A4), $\operatorname{Re} \lambda > -Lb(0)$, toda solución de (SP2) satisface

1. $|u(x)| \leq C |x|^\nu$ para $x \sim 0$, cierto $C > 0$;
2. q es AC, p es C^1 (para $x \sim 0$),

En particular, $u \in L^1_{loc}$ (para $x \sim 0$) y $a(x)u(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$.

Construcción del núcleo del resolvente

Sistema de primer orden

$$(\Theta(x)W)' = \mathbb{A}(x, \lambda)W,$$

$$\Theta(x) := \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}(x, \lambda) := \begin{pmatrix} -(\lambda + Lb(x)) & 0 & L \\ b(x) & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Θ es singular en $x = 0$.

Construcción del núcleo del resolvente

Sistema de primer orden

$$(\Theta(x)W)' = \mathbb{A}(x, \lambda)W,$$

$$\Theta(x) := \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}(x, \lambda) := \begin{pmatrix} -(\lambda + Lb(x)) & 0 & L \\ b(x) & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Θ es singular en $x = 0$.

Soluciones a:

$$\partial_x (\Theta(x) \mathcal{G}_\lambda) - \mathbb{A}(x, \lambda) \mathcal{G}_\lambda = \delta_y(x) I,$$

$$\partial_x (\Theta(x) \mathcal{G}_\lambda) - \mathbb{A}(x, \lambda) \mathcal{G}_\lambda = 0, \quad \text{si } x \neq y,$$

+ condiciones de salto en $x = y$.

El kernel del resolvente es $G_\lambda = (\mathcal{G}_\lambda)_{11}$.

Soluciones a:

$$\partial_x (\Theta(x) \mathcal{G}_\lambda) - \mathbb{A}(x, \lambda) \mathcal{G}_\lambda = \delta_y(x) I,$$

$$\partial_x (\Theta(x) \mathcal{G}_\lambda) - \mathbb{A}(x, \lambda) \mathcal{G}_\lambda = 0, \quad \text{si } x \neq y,$$

+ condiciones de salto en $x = y$.

El kernel del resolvente es $G_\lambda = (\mathcal{G}_\lambda)_{11}$.

Sistemas asintóticos

$$\Theta_{\pm} W' = \mathbb{A}_{\pm}(\lambda) W,$$

$$\Theta_{\pm} := \begin{pmatrix} a_{\pm} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{\pm}(\lambda) := \begin{pmatrix} -(\lambda + L b_{\pm}) & 0 & L \\ b_{\pm} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{\pm} := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x) = f'(u_{\pm}), \quad b_{\pm} := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} b(x) = M'(u_{\pm}).$$

$$a_+ < 0 < a_-.$$

Relación de dispersión

$$|\mu I - \Theta_{\pm}^{-1} \mathbb{A}_{\pm}(\lambda)| = \mu^3 + a_{\pm}^{-1}(\lambda + Lb_{\pm})\mu^2 - \mu - a_{\pm}^{-1}\lambda,$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \rightarrow +\infty$: 2 raíces positivas, 1 negativa para π_+ ; 2 negativas, 1 positiva para π_- .

Para cada $\operatorname{Re} \lambda > 0$:

$$\dim U^+(\lambda) = 2, \quad \dim S^+(\lambda) = 1,$$

$$\dim U^-(\lambda) = 1, \quad \dim S^-(\lambda) = 2.$$

Las dimensiones no coinciden.

$\{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \Lambda =$ región a la izq. de las curvas de dispersión

“Region of (not so) consistent splitting”

Relación de dispersión

$$|\mu I - \Theta_{\pm}^{-1} \mathbb{A}_{\pm}(\lambda)| = \mu^3 + a_{\pm}^{-1}(\lambda + Lb_{\pm})\mu^2 - \mu - a_{\pm}^{-1}\lambda,$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \rightarrow +\infty$: 2 raíces positivas, 1 negativa para π_+ ; 2 negativas, 1 positiva para π_- .

Para cada $\operatorname{Re} \lambda > 0$:

$$\dim U^+(\lambda) = 2, \quad \dim S^+(\lambda) = 1,$$

$$\dim U^-(\lambda) = 1, \quad \dim S^-(\lambda) = 2.$$

Las dimensiones no coinciden.

$\{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \Lambda =$ región a la izq. de las curvas de dispersión

“Region of (not so) consistent splitting”

Relación de dispersión

$$|\mu I - \Theta_{\pm}^{-1} \mathbb{A}_{\pm}(\lambda)| = \mu^3 + a_{\pm}^{-1}(\lambda + Lb_{\pm})\mu^2 - \mu - a_{\pm}^{-1}\lambda,$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \rightarrow +\infty$: 2 raíces positivas, 1 negativa para π_+ ; 2 negativas, 1 positiva para π_- .

Para cada $\operatorname{Re} \lambda > 0$:

$$\dim U^+(\lambda) = 2, \quad \dim S^+(\lambda) = 1,$$

$$\dim U^-(\lambda) = 1, \quad \dim S^-(\lambda) = 2.$$

Las dimensiones no coinciden.

$\{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \Lambda =$ región a la izq. de las curvas de dispersión

“Region of (not so) consistent splitting”

Relación de dispersión

$$|\mu I - \Theta_{\pm}^{-1} \mathbb{A}_{\pm}(\lambda)| = \mu^3 + a_{\pm}^{-1}(\lambda + Lb_{\pm})\mu^2 - \mu - a_{\pm}^{-1}\lambda,$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \rightarrow +\infty$: 2 raíces positivas, 1 negativa para π_+ ; 2 negativas, 1 positiva para π_- .

Para cada $\operatorname{Re} \lambda > 0$:

$$\dim U^+(\lambda) = 2, \quad \dim S^+(\lambda) = 1,$$

$$\dim U^-(\lambda) = 1, \quad \dim S^-(\lambda) = 2.$$

Las dimensiones no coinciden.

$\{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \Lambda =$ región a la izq. de las curvas de dispersión

“Region of (not so) consistent splitting”

Bajas frecuencias: $\lambda \sim 0$

Valores propios de $\Theta_{\pm}^{-1} \mathbb{A}_{\pm}(\lambda)$:

$$\mu_2^{\pm}(\lambda) = -\frac{\lambda}{a_{\pm}} + \mathcal{O}(|\lambda|^2),$$

$$\mu_1^{\pm}(\lambda) = \pm\theta_1^{\pm} + \mathcal{O}(|\lambda|),$$

$$\mu_3^{\pm}(\lambda) = \mp\theta_3^{\pm} + \mathcal{O}(|\lambda|),$$

$$\mu_2^{\pm}(0) = 0,$$

$$\mu_1^{-}(0) = -\theta_1^{-} < 0 < \theta_1^{+} = \mu_1^{+}(0),$$

$$\mu_3^{+}(0) = -\theta_3^{+} < 0 < \theta_3^{-} = \mu_3^{-}(0).$$

Vectores propios:

$$V_j^\pm = \begin{pmatrix} b_\pm^{-1}(1 - \mu_j^\pm(\lambda)^2) \\ -\mu_j^\pm(\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$V_2^\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\lambda) \\ \mathcal{O}(1) \end{pmatrix}, \quad V_j^\pm(\lambda) = \mathcal{O}(1), \quad j = 1, 3.$$

Lema

Para cada $\lambda \in \Lambda$, el sistema asintótico tiene soluciones

$$e^{\mu_j^\pm(\lambda)x} V_j^\pm(\lambda), \quad x \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Para $|\lambda| \sim 0$, es posible hallar representaciones analíticas para μ_j^\pm y V_j^\pm , que son: dos modos “lentos”

$$\mu_2^\pm(\lambda) = -a_\pm^{-1} \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

y cuatro modos “rápidos”:

$$\mu_1^\pm(\lambda) = \pm \theta_1^\pm + \mathcal{O}(\lambda), \quad \mu_3^\pm(\lambda) = \mp \theta_3^\pm + \mathcal{O}(\lambda),$$

Soluciones al sistema $\Theta W' = \mathbb{A}(x, \lambda)W$

Por el Lema de “conjugación” (MASCIA, ZUMBRUN, *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002): decaimiento exponencial de la onda viajera en la región de hiperbolicidad \Rightarrow existen proyecciones $P_{\pm}(x, \lambda) = I + \Phi_{\pm}$, uniformemente acotadas, que relacionan las soluciones del sistema asintótico Z con las soluciones al sistema con coeficientes variables W , mediante $W = P_{\pm}Z$. Además,

$$|\partial_{\lambda}^j \partial_x^k \Phi_{\pm}| \lesssim e^{-\eta|x|}.$$

Lema

Para $|\lambda| \sim 0$ existen $\psi_j^\pm(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, modos explosivos, y $\phi_3^\pm(x, \lambda)$ modos que decaen, en $x \gtrsim 0$, de clase C^1 en x , analíticos en λ , tales que

$$\psi_j^\pm(x, \lambda) = e^{\mu_j^\pm(\lambda)x} V_j^\pm(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})), \quad j = 1, 2,$$

$$\phi_3^\pm(x, \lambda) = e^{\mu_3^\pm(\lambda)x} V_3^\pm(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})),$$

donde $\eta > 0$ es la razón de decaimiento de los perfiles.

Resumen: soluciones $\lambda \sim 0, x \geq 0$

Para $x \geq x_0 > 0$:

$$\psi_1^+(x, \lambda) = e^{(\theta_1^+ + \mathcal{O}(|\lambda|))x} V_1^+(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})), \quad (\text{fast growing}),$$

$$\psi_2^+(x, \lambda) = e^{(-\lambda/a_+ + \mathcal{O}(|\lambda|^2))x} V_2^+(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})), \quad (\text{slowly growing}),$$

$$\phi_3^+(x, \lambda) = e^{(-\theta_3^+ + \mathcal{O}(|\lambda|))x} V_3^+(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})), \quad (\text{fast decaying})$$

Para $x \leq x_0 < 0$:

$$\psi_1^-(x, \lambda) = e^{(-\theta_1^- + \mathcal{O}(|\lambda|))x} V_1^-(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})), \quad (\text{fast growing}),$$

$$\psi_2^-(x, \lambda) = e^{(-\lambda/a_- + \mathcal{O}(|\lambda|^2))x} V_2^-(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})), \quad (\text{slowly growing}),$$

$$\phi_3^-(x, \lambda) = e^{(\theta_3^- + \mathcal{O}(|\lambda|))x} V_3^-(\lambda)(I + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|})), \quad (\text{fast decaying})$$

Soluciones en $x \sim 0$

$$\xi = \int_{\epsilon_0}^x \frac{dz}{a(z)},$$

$\xi(\epsilon_0) = 0$, $\xi \rightarrow +\infty$ si $x \rightarrow 0^+$.

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{a(x)} \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{a(x)} \dot{u},$$

$$\dot{\cdot} = d/d\xi.$$

$$\dot{W} = \tilde{\mathbb{A}}(\xi, \lambda)W \quad \text{donde} \quad \tilde{\mathbb{A}}(\xi, \lambda) := \begin{pmatrix} -\omega & 0 & L \\ \tilde{a}\tilde{b} & 0 & -\tilde{a} \\ 0 & -\tilde{a} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega(\xi) := \lambda + a'(x(\xi)) + Lb(x(\xi)), \quad \tilde{a}(\xi) := a(x(\xi)), \quad \tilde{b}(\xi) := b(x(\xi))$$

Para $\lambda \sim 0$, $0 < \epsilon_0 \ll 1$

$$\operatorname{Re} \omega(\xi) \sim \operatorname{Re} \omega(0) = \eta := \operatorname{Re} \lambda + a'(0) + Lb(0) > 0,$$

para $\xi \in [0, +\infty)$.

Diagonalización en bloque:

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z + \tilde{a} \hat{\Theta}(\xi) Z,$$

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & L/\omega & L(a'' + Lb')/\omega^2 \\ \tilde{b} & 0 & -1 + L\tilde{b}/\omega \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Coordenadas “rápidas” y “lentas”

$$\dot{Z}_1 = -\omega Z_1 + \mathcal{O}(\tilde{a})Z_1,$$

$$\dot{Z}_2 = \mathcal{O}(\tilde{a})Z_2.$$

$Z_1 \rightarrow 0, \xi \rightarrow +\infty:$

$$e^{-\int_0^\xi \omega(z) dz} \lesssim e^{-(\operatorname{Re} \lambda + \frac{1}{2}\eta)\xi} \rightarrow 0,$$

Diagonalización en bloque:

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z + \tilde{a} \hat{\Theta}(\xi) Z,$$

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & L/\omega & L(a'' + Lb')/\omega^2 \\ \tilde{b} & 0 & -1 + L\tilde{b}/\omega \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Coordenadas “rápidas” y “lentas”

$$\dot{Z}_1 = -\omega Z_1 + \mathcal{O}(\tilde{a})Z_1,$$

$$\dot{Z}_2 = \mathcal{O}(\tilde{a})Z_2.$$

$Z_1 \rightarrow 0, \xi \rightarrow +\infty:$

$$e^{-\int_0^\xi \omega(z) dz} \lesssim e^{-(\operatorname{Re} \lambda + \frac{1}{2}\eta)\xi} \rightarrow 0,$$

Lema (Soluciones cerca de $x = 0$).

Bajo (A0) - (A4) y (A5₂), existe $0 < \epsilon_0 \ll 1$ pequeño tal que, para $\lambda \sim 0$, las soluciones en $(-\epsilon_0, 0) \cup (0, \epsilon_0)$ son generadas por modos “rápidos”,

$$w_2^\pm(x, \lambda) = \begin{pmatrix} u_2^\pm \\ q_2^\pm \\ p_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 + \mathcal{O}(a(x))), \quad \pm\epsilon_0 \gtrsim x \gtrsim 0,$$

y modos “lentos”,

$$z_j^\pm(x, \lambda) = \begin{pmatrix} u_j^\pm \\ q_j^\pm \\ p_j^\pm \end{pmatrix}, \quad \pm\epsilon_0 \gtrsim x \gtrsim 0, \quad j = 1, 3,$$

acotados cuando $x \rightarrow 0^\pm$. Más aún, los modos rápidos decaen como

$$u_2^\pm \sim |x|^\nu \rightarrow 0, \quad \begin{pmatrix} q_2^\pm \\ p_2^\pm \end{pmatrix} \sim \mathcal{O}(|x|^\nu a(x)) \rightarrow 0,$$

cuando $x \rightarrow 0^\pm$, donde $\nu := (\operatorname{Re} \lambda + a'(0) + Lb(0))/|a'(0)|$.

Modos que decaen

Construcción del núcleo del resolvente: Set completo de modos que decaen.

Sea $\epsilon_0 > 0$, pequeño. Objetivo: dos modos que decaen en $+\infty$, W_j^+ , $j = 1, 2$; uno que decae en $-\infty$, W_3^- .

$$W_3^-(x, \lambda) := \begin{cases} \phi_3^-(x, \lambda), & x < -\epsilon_0, \\ (\gamma_1 z_1^- + \gamma_3 z_3^- + \gamma_2 w_2^-)(x, \lambda), & -\epsilon_0 < x < 0. \end{cases}$$

$$W_1^+(x, \lambda) := \begin{cases} \phi_3^+(x, \lambda), & x > \epsilon_0, \\ (\alpha_1 z_1^+ + \alpha_3 z_3^+ + \alpha_2 w_2^+)(x, \lambda), & 0 < x < \epsilon_0, \\ (\beta_1 z_1^- + \beta_3 z_3^- + \beta_2 w_2^-)(x, \lambda), & -\epsilon_0 < x < 0 \\ (\delta_1 \psi_1^- + \delta_2 \psi_2^- + \delta_3 \phi_3^-)(x, \lambda), & x < -\epsilon_0. \end{cases}$$

$$W_2^+(x, \lambda) := \begin{cases} 0, & x > 0, \\ w_2^-(x, \lambda), & -\epsilon_0 < x < 0, \\ (\kappa_1 \psi_1^- + \kappa_2 \psi_2^- + \kappa_3 \phi_3^-)(x, \lambda), & x < -\epsilon_0. \end{cases}$$

w_2^- es el modo que decae rápidamente cuando $x \rightarrow 0^-$.

$$W_1^+(x, \lambda) := \begin{cases} \phi_3^+(x, \lambda), & x > \epsilon_0, \\ (\alpha_1 z_1^+ + \alpha_3 z_3^+ + \alpha_2 w_2^+)(x, \lambda), & 0 < x < \epsilon_0, \\ (\beta_1 z_1^- + \beta_3 z_3^- + \beta_2 w_2^-)(x, \lambda), & -\epsilon_0 < x < 0 \\ (\delta_1 \psi_1^- + \delta_2 \psi_2^- + \delta_3 \phi_3^-)(x, \lambda), & x < -\epsilon_0. \end{cases}$$

$$W_2^+(x, \lambda) := \begin{cases} 0, & x > 0, \\ w_2^-(x, \lambda), & -\epsilon_0 < x < 0, \\ (\kappa_1 \psi_1^- + \kappa_2 \psi_2^- + \kappa_3 \phi_3^-)(x, \lambda), & x < -\epsilon_0. \end{cases}$$

w_2^- es el modo que decae rápidamente cuando $x \rightarrow 0^-$.

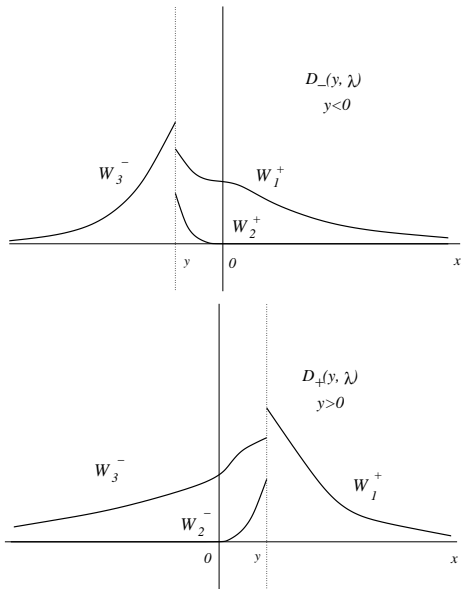


Figura: Dos funciones de Evans: D_+ para $y > 0$, y D_- para $y < 0$.

Análogamente se seleccionan 2 modos W_2^- , W_3^- que decaen en $-\infty$ y uno W_1^+ que decae a $+\infty$.

Se definen *dos* funciones de Evans:

$$D_{\pm}(y, \lambda) := \det(W_1^+ \ W_2^{\mp} \ W_3^-)(y, \lambda), \quad \text{para } y \gtrless 0,$$

Análogamente se seleccionan 2 modos W_2^- , W_3^- que decaen en $-\infty$ y uno W_1^+ que decae a $+\infty$.

Se definen *dos* funciones de Evans:

$$D_{\pm}(y, \lambda) := \det(W_1^+ \ W_2^{\mp} \ W_3^-)(y, \lambda), \quad \text{para } y \geq 0,$$

Propiedades

(i) Para $\lambda \sim 0$

$$D_{\pm}(y, \lambda) = -a(y)^{-1} \lambda [u] \det \begin{pmatrix} q_1^+ & q_2^{\mp} \\ p_1^+ & p_2^{\mp} \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=0} + \mathcal{O}(|\lambda|^2),$$

donde $[u] = u_+ - u_-$.

(ii) Definimos

$$D_{\pm}(\lambda) := D_{\pm}(\pm 1, \lambda).$$

Entonces, $D_+(\lambda) = mD_-(\lambda) + \mathcal{O}(|\lambda|^2)$, donde $m \neq 0$.

(iii) $D_{\pm}(\lambda)$ es analítica en λ ; $D_{\pm} = 0$ sí y sólo si λ es un valor propio.

Propiedades

(i) Para $\lambda \sim 0$

$$D_{\pm}(y, \lambda) = -a(y)^{-1} \lambda [u] \det \begin{pmatrix} q_1^+ & q_2^{\mp} \\ p_1^+ & p_2^{\mp} \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=0} + \mathcal{O}(|\lambda|^2),$$

donde $[u] = u_+ - u_-$.

(ii) Definimos

$$D_{\pm}(\lambda) := D_{\pm}(\pm 1, \lambda).$$

Entonces, $D_+(\lambda) = mD_-(\lambda) + \mathcal{O}(|\lambda|^2)$, donde $m \neq 0$.

(iii) $D_{\pm}(\lambda)$ es analítica en λ ; $D_{\pm} = 0$ sí y sólo si λ es un valor propio.

Propiedades

(i) Para $\lambda \sim 0$

$$D_{\pm}(y, \lambda) = -a(y)^{-1} \lambda [u] \det \begin{pmatrix} q_1^+ & q_2^{\mp} \\ p_1^+ & p_2^{\mp} \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=0} + \mathcal{O}(|\lambda|^2),$$

donde $[u] = u_+ - u_-$.

(ii) Definimos

$$D_{\pm}(\lambda) := D_{\pm}(\pm 1, \lambda).$$

Entonces, $D_+(\lambda) = mD_-(\lambda) + \mathcal{O}(|\lambda|^2)$, donde $m \neq 0$.

(iii) $D_{\pm}(\lambda)$ es analítica en λ ; $D_{\pm} = 0$ sí y sólo si λ es un valor propio.

Cotas para el núcleo del resolvente para $\lambda \sim 0$

W.l.o.g. $y < 0$. Condiciones de salto en $x = y$:

$$[\mathcal{G}_\lambda(\cdot, y)] = \begin{pmatrix} a(y)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{G}_\lambda(x, y)$ se construye en términos de soluciones que decaen:

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = \begin{cases} W_1^+(x, \lambda)C_1^+(y, \lambda) + W_2^+(x, \lambda)C_2^+(y, \lambda), & x > y, \\ -W_3^-(x, \lambda)C_3^-(y, \lambda), & x < y \end{cases}$$

Cotas para el núcleo del resolvente para $\lambda \sim 0$

W.l.o.g. $y < 0$. Condiciones de salto en $x = y$:

$$[\mathcal{G}_\lambda(\cdot, y)] = \begin{pmatrix} a(y)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{G}_\lambda(x, y)$ se construye en términos de soluciones que decaen:

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = \begin{cases} W_1^+(x, \lambda)C_1^+(y, \lambda) + W_2^+(x, \lambda)C_2^+(y, \lambda), & x > y, \\ -W_3^-(x, \lambda)C_3^-(y, \lambda), & x < y \end{cases}$$

Por regla de Cramer:

$$C_{11}^+(y, \lambda) = a(y)^{-1} D_-(y, \lambda)^{-1} \begin{vmatrix} q_2^+ & q_3^- \\ p_2^+ & p_3^- \end{vmatrix} (y, \lambda),$$

$$C_{21}^+(y, \lambda) = a(y)^{-1} D_-(y, \lambda)^{-1} \begin{vmatrix} q_3^- & q_1^+ \\ p_3^- & p_1^+ \end{vmatrix} (y, \lambda),$$

$$C_{31}^-(y, \lambda) = a(y)^{-1} D_-(y, \lambda)^{-1} \begin{vmatrix} q_1^+ & q_2^+ \\ p_1^+ & p_2^+ \end{vmatrix} (y, \lambda).$$

Únicos coeficientes que pueden tener saltos (primera columna).

Cotas para $y \sim 0$.

Lema

(i) Para $y \sim 0$

$$C_1^+(y, \lambda) = \frac{1}{\lambda}[u]^{-1}(1, -L, 0) + \mathcal{O}(1),$$

$$C_3^-(y, \lambda) = -\frac{1}{\lambda}[u]^{-1}(1, -L, 0) + \mathcal{O}(1),$$

$$C_2^+(y, \lambda) = a(y)^{-1}|y|^{-\nu}\mathcal{O}(1).$$

(ii) Bajo (A0) - (A5_k), $y < 0$, cerca de cero,

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = \lambda^{-1}[u]^{-1}\bar{W}'(1, -L, 0) + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|}), \quad y < 0 < x,$$

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = \lambda^{-1}[u]^{-1}\bar{W}'(1, -L, 0) + \mathcal{O}(1) \left(1 + \frac{|x|^\nu}{a(y)|y|^\nu}\right), \quad y < x < 0$$

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = \lambda^{-1}[u]^{-1}\bar{W}'(1, -L, 0) + \mathcal{O}(e^{-\eta|x|}), \quad x < y < 0,$$

para cierto $\eta > 0$. El caso $y > 0$ es análogo. $\bar{W}' =$ derivada de la onda.

Cotas para $y \rightarrow -\infty$.

Lema

Bajo (A0) - (A5_k), $y < 0$, $|y|$ grande,

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = \lambda^{-1}[u]^{-1}e^{-\mu_2^- y}\bar{W}'(1, -L, 0) + \mathcal{O}((e^{-\mu_2^- y} + e^{-\mu_1^- y})e^{\mu_3^+ x}), \quad y < 0 < x,$$

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = \lambda^{-1}[u]^{-1}e^{-\mu_2^- y}\bar{W}'(1, -L, 0) + \mathcal{O}(e^{\mu_1^- (x-y)}) + \mathcal{O}(e^{\mu_2^- (x-y)}) + \mathcal{O}(e^{-\mu_2^- y}e^{\mu_3^- x}), \quad y < x < 0,$$

$$\mathcal{G}_\lambda(x, y) = -\lambda^{-1}[u]^{-1}e^{-\mu_2^- y}\bar{W}'(1, -L, 0) + \mathcal{O}(e^{-\mu_2^- y}e^{\mu_3^- x}) + \mathcal{O}(e^{\mu_3^- (x-y)}), \quad x < y < 0.$$

El caso $y > 0$ es análogo.

Estimaciones para frecuencias bajas

Función de Green de “baja frecuencia”

$$G^l(x, t; y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cap \{|\lambda| \leq r\}} e^{\lambda t} \mathcal{G}_\lambda(x, y) d\lambda$$

Γ = contorno cerca de $\lambda = 0$, lejos del espectro esencial,
 $0 < r \ll 1$ pequeño tal que las cotas para G_λ valen.

Lema

Bajo (A0) - (A5_k), tenemos la descomposición para $y < 0$,

$$G^I(x, t; y) = E + \tilde{G}^I + R,$$

$$E(x, t; y) := \bar{U}_x(x)[u]^{-1}e(y, t),$$

$$e(y, t) := \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{y + a - t}{\sqrt{4Lb - t}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y - a - t}{\sqrt{4Lb - t}} \right) \right);$$

$$|\partial_x^\kappa \partial_y^\beta \tilde{G}^I(x, t; y)| \leq C_1 t^{-(|\beta| + |\kappa|)/2 - 1/2} e^{-(x - y - a - t)^2 / C_2 t},$$

$$R(x, t; y) = \mathcal{O}(e^{-\eta(|x - y| + t)}) + \mathcal{O}(e^{-\eta t}) \chi(x, y) \left[1 + \frac{1}{a(y)} (x/y)^\nu \right],$$

for some $\eta, C_1, C_2 > 0$, where $\beta, \kappa = 0, 1$ and $\nu = \frac{Lb(0) + a'(0)}{|a'(0)|}$ and

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1 & -1 < y < x < 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Cotas simétricas para $y \geq 0$.

Con la descomposición y cotas se prueba:

Lema

Bajo (A0) - (A5_k), y para $1 \leq q \leq p \leq +\infty$,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_y^\beta \tilde{G}^I(\cdot, t; y) f(y) dy \right|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1/q-1/p)-|\beta|/2} |f|_{L^q},$$

$$|e_y(\cdot, t)|_{L^p}, |e_t(\cdot, t)|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1-1/p)},$$

$$|e_{yt}(\cdot, t)|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(1-1/p)-1/2}, \quad t > 0, C > 0, p \geq 1.$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} R(\cdot, t; y) f(y) dy \right|_{L^p} \leq Ce^{-\eta t} (|f|_{L^p} + |f|_{L^\infty}),$$

Altas frecuencias

$$\mathcal{S}_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_1 - i\infty}^{-\gamma_1 + i\infty} \chi_{\{|\operatorname{Im} \lambda| \geq \gamma_2\}} e^{\lambda t} (\lambda - \mathcal{L})^{-1} d\lambda,$$

Constantes pequeñas $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, χ_I = función característica.

El problema lineal

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + Lq_x &= \varphi, \\ -q_{xx} + q + (b(x)u)_x &= \psi, \end{aligned}$$

se describe como

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + \mathcal{J}u &= \varphi - L \partial_x (\mathcal{K} \psi), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}u := -L \partial_x \mathcal{K} \partial_x (b(x)u), \quad \mathcal{L} := -(a(x)u)_x - \mathcal{J}u.$$

Altas frecuencias

$$\mathcal{S}_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_1 - i\infty}^{-\gamma_1 + i\infty} \chi_{\{|\operatorname{Im} \lambda| \geq \gamma_2\}} e^{\lambda t} (\lambda - \mathcal{L})^{-1} d\lambda,$$

Constantes pequeñas $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, χ_I = función característica.

El problema lineal

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + Lq_x &= \varphi, \\ -q_{xx} + q + (b(x)u)_x &= \psi, \end{aligned}$$

se describe como

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + \mathcal{J}u &= \varphi - L \partial_x (\mathcal{K} \psi), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}u := -L \partial_x \mathcal{K} \partial_x (b(x)u), \quad \mathcal{L} := -(a(x)u)_x - \mathcal{J}u.$$

Altas frecuencias

$$\mathcal{S}_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_1 - i\infty}^{-\gamma_1 + i\infty} \chi_{\{|\operatorname{Im} \lambda| \geq \gamma_2\}} e^{\lambda t} (\lambda - \mathcal{L})^{-1} d\lambda,$$

Constantes pequeñas $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, χ_I = función característica.

El problema lineal

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + Lq_x &= \varphi, \\ -q_{xx} + q + (b(x)u)_x &= \psi, \end{aligned}$$

se describe como

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + \mathcal{J}u &= \varphi - L \partial_x (\mathcal{K} \psi), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}u := -L \partial_x \mathcal{K} \partial_x (b(x)u), \quad \mathcal{L} := -(a(x)u)_x - \mathcal{J}u.$$

Cotas para altas frecuencias

$$|(\lambda - \mathcal{L})^{-1}(\varphi - L\partial_x(\mathcal{K}\psi))|_{H^1} \leq C \left(|\varphi|_{H^1}^2 + |\psi|_{L^2}^2 \right),$$

$$|(\lambda - \mathcal{L})^{-1}(\varphi - L\partial_x(\mathcal{K}\psi))|_{L^2} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left(|\varphi|_{H^1}^2 + |\psi|_{L^2}^2 \right),$$

bajo (A0) - (A5_k), $R, C > 0$ grandes, $\gamma > 0$ pequeño, y *para todo* $|\lambda| > R$, $\text{Re } \lambda \geq -\gamma$.

Cotas para frecuencias medias

$$|(\lambda - \mathcal{L})^{-1}\varphi|_{L^2} \leq C|\varphi|_{H^1} \quad \text{for } R^{-1} \leq |\lambda| \leq R \text{ and } \text{Re } \lambda \geq -\gamma,$$

R y $C = C(R)$ grandes, and $\gamma = \gamma(R)$ pequeño.

Cotas para altas frecuencias

$$|(\lambda - \mathcal{L})^{-1}(\varphi - L\partial_x(\mathcal{K}\psi))|_{H^1} \leq C \left(|\varphi|_{H^1}^2 + |\psi|_{L^2}^2 \right),$$

$$|(\lambda - \mathcal{L})^{-1}(\varphi - L\partial_x(\mathcal{K}\psi))|_{L^2} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left(|\varphi|_{H^1}^2 + |\psi|_{L^2}^2 \right),$$

bajo (A0) - (A5_k), $R, C > 0$ grandes, $\gamma > 0$ pequeño, y *para todo* $|\lambda| > R$, $\operatorname{Re} \lambda \geq -\gamma$.

Cotas para frecuencias medias

$$|(\lambda - \mathcal{L})^{-1}\varphi|_{L^2} \leq C|\varphi|_{H^1} \quad \text{for } R^{-1} \leq |\lambda| \leq R \text{ and } \operatorname{Re} \lambda \geq -\gamma,$$

R y $C = C(R)$ grandes, and $\gamma = \gamma(R)$ pequeño.

Lema

Bajo (A0) - (A5_k), tenemos las cotas

$$|\partial_x^\kappa \mathcal{S}_2(t)(\varphi - L \partial_x(\mathcal{K}\psi))|_{L^2} \leq C e^{-\eta t} \left(|\psi|_{H^{\kappa+2}} + |\varphi|_{H^{\kappa+2}} \right), \quad \kappa = 0, 1,$$

para cierto $\eta > 0$.

Perturbación no lineal

$$\begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix}(x, t) := \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}(x + \alpha(t), t) - \begin{pmatrix} U \\ Q \end{pmatrix}(x),$$

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + Lq_x &= N_1(u)_x + \dot{\alpha}(t)(u_x + U_x), \\ -q_{xx} + q + (b(x)u)_x &= N_2(u)_x, \end{aligned}$$

$$N_j(u) = O(|u|^2)$$

Perturbación no lineal

$$\begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix}(x, t) := \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}(x + \alpha(t), t) - \begin{pmatrix} U \\ Q \end{pmatrix}(x),$$

$$\begin{aligned} u_t + (a(x)u)_x + Lq_x &= N_1(u)_x + \dot{\alpha}(t)(u_x + U_x), \\ -q_{xx} + q + (b(x)u)_x &= N_2(u)_x, \end{aligned}$$

$$N_j(u) = O(|u|^2)$$

Estimación auxiliar

Lema

Bajo (A0) - (A5_k), si $|u|_{W^{2,\infty}}$ y $|\dot{\alpha}|$ permanecen pequeños,

$$|u|_{H^k}^2(t) \leq C e^{-\eta t} |u|_{H^k}^2(0) + C \int_0^t e^{-\eta(t-s)} (|u|_{L^2}^2 + |\dot{\alpha}|^2)(s) ds, \quad \eta > 0,$$

para $k = 1, \dots, 4$.

Crucial: $Lb > 0$, uniformemente. Para sistemas no es trivial!

Estimación auxiliar

Lema

Bajo $(A0)$ - $(A5_k)$, si $|u|_{W^{2,\infty}}$ y $|\dot{\alpha}|$ permanecen pequeños,

$$|u|_{H^k}^2(t) \leq C e^{-\eta t} |u|_{H^k}^2(0) + C \int_0^t e^{-\eta(t-s)} (|u|_{L^2}^2 + |\dot{\alpha}|^2)(s) ds, \quad \eta > 0,$$

para $k = 1, \dots, 4$.

Crucial: $Lb > 0$, uniformemente. Para sistemas no es trivial!

Descomposición de la función de Green

$$G(x, t; y) = G^I(x, t; y) + G^{II}(x, t; y)$$

$$\tilde{G}^I(x, t; y) = G^I(x, t; y) - E(x, t; y) - R(x, t; y)$$

$$\tilde{G}^{II}(x, t; y) = G^{II}(x, t; y) + R(x, t; y).$$

De estimaciones anteriores:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_y^\beta \tilde{G}^I(\cdot, t; y) f(y) dy \right|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1/q-1/p)-|\beta|/2} |f|_{L^q},$$

para $1 \leq q \leq p, \beta = 0, 1,$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}^{II}(x, t; y) f(y) dy \right|_{L^p} \leq C e^{-\eta t} |f|_{H^3},$$

para $2 \leq p \leq \infty.$

Principio de Duhamel

Representación integral para la perturbación:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{G}^I + \tilde{G}^{II})(x, t; y) u_0(y) dy \\ &\quad - \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_y^I(x, t-s; y) \left(N_1(u) - L \mathcal{K} \partial_y N_2(u) + \dot{\alpha} u \right) (y, s) dy ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}^{II}(x, t-s; y) \left(N_1(u) - L \mathcal{K} \partial_y N_2(u) + \dot{\alpha} u \right)_y (y, s) dy ds \\ q(x, t) &= (\mathcal{K} \partial_x) (N_2(u) - b u)(x, t), \end{aligned}$$

$$\alpha(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e(y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e_y(y, t-s) \left(N_1(u) - L\mathcal{K} \partial_y N_2(u) + \dot{\alpha} u \right) (y, s) dy ds$$

$$\dot{\alpha}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e_t(y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e_{yt}(y, t-s) \left(N_1(u) - L\mathcal{K} \partial_y N_2(u) + \dot{\alpha} u \right) (y, s) dy ds$$

Teorema

Bajo (A0) - (A5_k), y suponiendo estabilidad espectral, el perfil (U, Q) es asintóticamente orbitalmente estable. La solución al problema no lineal de la perturbación con dato inicial \tilde{u}_0 satisface

$$|\tilde{u}(x, t) - U(x - \alpha(t))|_{L^p} \leq C(1 + t)^{-\frac{1}{2}(1-1/p)} |u_0|_{L^1 \cap H^4}$$

$$|\tilde{u}(x, t) - U(x - \alpha(t))|_{H^4} \leq C(1 + t)^{-1/4} |u_0|_{L^1 \cap H^4}$$

$u_0 := \tilde{u}_0 - U$ suf. pequeño en $L^1 \cap H^4$, $p \geq 2$, con $\alpha(t)$ tal que $\alpha(0) = 0$

$$|\alpha(t)| \leq C|u_0|_{L^1 \cap H^4}, \quad |\dot{\alpha}(t)| \leq C(1 + t)^{-1/2} |u_0|_{L^1 \cap H^4}.$$

Detalles en:

C. LATTANZIO, C. MASCIA, T. NGUYEN, R. G. PLAZA,
K. ZUMBRUN, *SIAM J. Math. Anal.* **41**, no. 6 (2009).

- 1 Introducción
- 2 Historia (resumida): Ondas de choque viscosas
- 3 Ondas de choque con radiación: modelo escalar
 - El problema espectral
 - Dos funciones de Evans
 - Cotas puntuales para el operador de Green
 - Análisis no lineal

4 Sistemas hiperbólico-elípticos

Hipótesis

Resultados

- 5 Estabilidad espectral para sistemas
 - Problema espectral
 - Estimación tipo Kawashima
 - Estimación tipo Goodman

Sistemas hiperbólico-elípticos

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + g(u)_x &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty),\end{aligned} \tag{HE}$$

$\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \ni u$ – variables de estado, $n \geq 1$,

$\mathbb{R} \ni q$ – flujo general de calor,

$\mathbb{R}^{n \times 1} \ni L$ – vector (columna) constante,

$f \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ – función de flujo,

$g \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ – acoplamiento no lineal.

Sistemas hiperbólico-elípticos

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + g(u)_x &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty), \end{aligned} \quad (\text{HE})$$

$\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U} \ni u$ – variables de estado, $n \geq 1$,

$\mathbb{R} \ni q$ – flujo general de calor,

$\mathbb{R}^{n \times 1} \ni L$ – vector (columna) constante,

$f \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R}^n)$ – función de flujo,

$g \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ – acoplamiento no lineal.

$$\begin{aligned} A(u) &:= Df(u) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ B(u) &:= Dg(u) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Hiperbolicidad: Valores propios de A , reales, semi-simples,

$$a_1 \leq \cdots \leq a_n.$$

Vectores propios asociados a a_j ,

$$Ar_j = a_j r_j, \quad l_j A_j = a_j l_j.$$

Hipótesis estructurales:

$$f, g \in C^2 \quad (\text{regularidad}), \quad (S0)$$

Para cada $u \in \mathcal{U}$ existe A_0 simétrica, definida positiva, tal que A_0A simétrica, A_0LB simétrica, positiva semi-definida de rango uno. Mas aún, valor propio principal a_p de A , con $1 \leq p \leq n$, es simple (hiperbolicidad no estricta). (S1)

Ningún vector propio de A está en $\ker LB$ (acoplamiento genuino). (S2)

Teorema (Kawashima-Shizuta)

Bajo (S0) y (S1), la condición (S2) es equivalente a la existencia de una matriz “skew-simétrica” $K : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\operatorname{Re}(KA + A_0LB) > 0, \quad (\text{K})$$

para todo $u \in \mathcal{U}$.

Ondas de choque

Onda viajera

$$u(x, t) = U(x - st), \quad q(x, t) = Q(x - st),$$

$$U(x) \rightarrow u_{\pm}, \quad Q(x) \rightarrow 0, \quad \text{si } x \rightarrow \pm\infty,$$

$u_{\pm} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ estados constantes $u_- \neq u_+$, $s \in \mathbb{R}$ velocidad del choque. El triple (u_+, u_-, s) es un frente (solución débil) del sistema de leyes de conservación: $u_t + f(u)_x = 0$. Satisface Rankine-Hugoniot:

$$f(u_+) - f(u_-) - s(u_+ - u_-) = 0,$$

mas condiciones de entropía de Lax.

Ecuaciones de la onda viajera:

$$\begin{aligned}f(U)_x + LQ_x &= 0, \\ -Q_{xx} + Q + g(U)_x &= 0.\end{aligned}$$

W.l.o.g. $s = 0$ (onda estacionaria).

Hipótesis sobre la onda de choque:

$$f(u_+) = f(u_-), \quad (\text{Rankine-Hugoniot}), \quad (\text{H0})$$

$$\begin{aligned} a_p(u_+) &< 0 < a_{p+1}(u_+), \\ a_{p-1}(u_-) &< 0 < a_p(u_-), \end{aligned} \quad (\text{condición de Lax}), \quad (\text{H1})$$

$$(\nabla a_p)^\top r_p \neq 0, \quad \text{for all } u \in \mathcal{U}, \quad (\text{nolinealidad genuina}), \quad (\text{H2})$$

$$l_p(u_\pm) LB(u_\pm) r_p(u_\pm) > 0, \quad (\text{difusión positiva}). \quad (\text{H3})$$

Eliminando la variable q :

$$u_t + f(u)_x = (LB(u)u_x)_x + (u_t + f(u)_x)_{xx},$$

Hipótesis de difusión positiva (H3):

$$l_p \cdot (B \otimes L^\top r_p) > 0,$$

Provee signo positivo (disipación) a lo largo del campo característico p en la expansión de Chapman-Enskog.

Eliminando la variable q :

$$u_t + f(u)_x = (LB(u)u_x)_x + (u_t + f(u)_x)_{xx},$$

Hipótesis de difusión positiva (H3):

$$l_p \cdot (B \otimes L^\top r_p) > 0,$$

Provee signo positivo (disipación) a lo largo del campo característico p en la expansión de Chapman-Enskog.

Resultados

- T. NGUYEN, R. G. PLAZA, K. ZUMBRUN, *Phys. D* **239**, no. 8 (2010).

Teorema 1 (Estabilidad espectral)

Bajo (S0) - (S2), (H0) - (H3), las ondas de choque con radiación son espectralmente estables para $\epsilon = |u_+ - u_-|$ suficientemente pequeño.

Teorema 2 (Estabilidad no lineal)

Bajo (S0) - (S2), (H0) - (H3) y $\epsilon = |u_+ - u_-|$ suficientemente pequeño, las ondas de choque con radiación son asintóticamente estables, i.e., la solución (u, q) al sistema (HE) con dato inicial u_0 satisface

$$|\tilde{u}(x, t) - U(x - \alpha(t))|_{L^p} \leq C(1 + t)^{-\frac{1}{2}(1-1/p)} |u_0|_{L^1 \cap H^4},$$

$$|\tilde{q}(x, t) - Q(x - \alpha(t))|_{W^{1,p}} \leq C(1 + t)^{-\frac{1}{2}(1-1/p)} |u_0|_{L^1 \cap H^4},$$

con $u_0 - U$ suficientemente pequeño en $L^1 \cap H^4$, $p \geq 2$, y para cierto $\alpha(t)$ que satisface $\alpha(0) = 0$, y

$$|\alpha(t)| \leq C |u_0|_{L^1 \cap H^4}$$

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq C(1 + t)^{-1/2} |u_0|_{L^1 \cap H^4}.$$

- 1 Introducción
- 2 Historia (resumida): Ondas de choque viscosas
- 3 Ondas de choque con radiación: modelo escalar
 - El problema espectral
 - Dos funciones de Evans
 - Cotas puntuales para el operador de Green
 - Análisis no lineal
- 4 Sistemas hiperbólico-elípticos
 - Hipótesis
 - Resultados
- 5 Estabilidad espectral para sistemas
 - Problema espectral
 - Estimación tipo Kawashima
 - Estimación tipo Goodman

Problema espectral

$$\lambda u + (Au)_x + Lq_x = 0,$$

$$-q_{xx} + q + (Bu)_x = 0.$$

$$A := A(U(x)), \quad B := B(U(x))$$

$$u, q \in L^2$$

Condiciones de cero-masa:

$$\int u \, dx = 0, \quad \int q \, dx = 0,$$

Problema espectral equivalente:

$$\begin{aligned} \lambda u + Au_x + Lq_x &= 0, \\ -q_{xx} + q + Bu_x &= 0. \end{aligned}$$

$u_{\pm} \in \mathcal{N}(u_*)$, vecindad.

$$0 < \max_{u \in \mathcal{N}} |u - u_*| \leq \epsilon \ll 1, \quad |u_* - u_{\pm}|, |u_- - u_+| = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Estructura “escalar” del perfil:

$$U_x = \mathcal{O}(\epsilon^2) e^{-\eta \epsilon |x|} (r_p(u_*) + \mathcal{O}(\epsilon)),$$
$$U_{xx} = \mathcal{O}(\epsilon^3) e^{-\theta \epsilon |x|},$$

$\theta, \eta > 0$. Velocidad característica principal: $a_p := a_p(U(x))$,

$$(a_p)_x = \mathcal{O}(U_x) < 0, \quad (\text{monotonidad}),$$
$$(a_p)_{xx} = \mathcal{O}(U_{xx}).$$

Lema

Bajo (S0) - (S2) existe $\beta = \beta(u) > 0$, tal que

$$(A_0 L)^\top = \beta B, \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Estimación básica tipo Friedrichs

Si u, q soluciones con $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ entonces para $\epsilon \ll 1$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Re} \lambda)|u|_{L^2}^2 + |q|_{L^2}^2 + |q_x|_{L^2}^2 &\leq C \int |U_x| |u|^2 dx, \\ |\operatorname{Im} \lambda| \int |U_x| |u|^2 dx &\leq C \int |U_x| (\delta |u|^2 + \delta^{-1} |q|^2) dx,\end{aligned}$$

cierto $C > 0$, cualquier $\delta > 0$.

Corolario:

$$\begin{aligned}0 \leq \operatorname{Re} \lambda &\leq C\epsilon^2, \\ |\operatorname{Im} \lambda| &\leq C\epsilon.\end{aligned}$$

Estimación básica tipo Friedrichs

Si u, q soluciones con $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ entonces para $\epsilon \ll 1$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Re} \lambda)|u|_{L^2}^2 + |q|_{L^2}^2 + |q_x|_{L^2}^2 &\leq C \int |U_x| |u|^2 dx, \\ |\operatorname{Im} \lambda| \int |U_x| |u|^2 dx &\leq C \int |U_x| (\delta |u|^2 + \delta^{-1} |q|^2) dx,\end{aligned}$$

cierto $C > 0$, cualquier $\delta > 0$.

Corolario:

$$\begin{aligned}0 &\leq \operatorname{Re} \lambda \leq C\epsilon^2, \\ |\operatorname{Im} \lambda| &\leq C\epsilon.\end{aligned}$$

Estimación tipo Kawashima

Para $0 < \epsilon \ll 1$ pequeño y $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, existe $C > 0$ tal que

$$(\operatorname{Re} \lambda)|u|_{L^2}^2 + |u_x|_{L^2}^2 \leq C \int |U_x| |u|^2 dx \quad (\text{EK})$$

Ideas básicas:

- Control de $|u_x|_{L^2}^2$.
- Producto L^2 pesado por la forma *skew*-simétrica K .

Estimación tipo Kawashima

Para $0 < \epsilon \ll 1$ pequeño y $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, existe $C > 0$ tal que

$$(\operatorname{Re} \lambda)|u|_{L^2}^2 + |u_x|_{L^2}^2 \leq C \int |U_x| |u|^2 dx \quad (\text{EK})$$

Ideas básicas:

- Control de $|u_x|_{L^2}^2$.
- Producto L^2 pesado por la forma *skew*-simétrica K .

Estimación tipo Goodman

Para $0 < \epsilon \ll 1$ pequeño y $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, existe $\bar{C} > 0$ tal que

$$(\operatorname{Re} \lambda)(|u|_{L^2}^2 + |u_x|_{L^2}^2) + \bar{C} \int |U_x||u|^2 dx \leq \bar{C}\epsilon|u_x|_{L^2}^2 \quad (\text{EG})$$

Ideas básicas:

- Control de $\int |U_x||u|^2$.
- Normas pesadas en la dirección característica.
- Diagonalización sobre la trayectoria completa del perfil.

Estimación tipo Goodman

Para $0 < \epsilon \ll 1$ pequeño y $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, existe $\bar{C} > 0$ tal que

$$(\operatorname{Re} \lambda) (|u|_{L^2}^2 + |u_x|_{L^2}^2) + \bar{C} \int |U_x| |u|^2 dx \leq \bar{C} \epsilon |u_x|_{L^2}^2 \quad (\text{EG})$$

Ideas básicas:

- Control de $\int |U_x| |u|^2$.
- Normas pesadas en la dirección característica.
- Diagonalización sobre la trayectoria completa del perfil.

Sumando $\bar{C}\epsilon$ veces (EG) a (EK):

$$(\operatorname{Re} \lambda)(1 + \bar{C}\epsilon)|u|_{L^2}^2 + (\bar{C} + C\bar{C}\epsilon) \int |U_x||u|^2 dx \leq 0.$$

$\implies \operatorname{Re} \lambda < 0$, i.e., *estabilidad espectral*.

Sumando $\bar{C}\epsilon$ veces (EG) a (EK):

$$(\operatorname{Re} \lambda)(1 + \bar{C}\epsilon)|u|_{L^2}^2 + (\bar{C} + C\bar{C}\epsilon) \int |U_x||u|^2 dx \leq 0.$$

$\implies \operatorname{Re} \lambda < 0$, i.e., *estabilidad espectral*.

Esbozo de la estimación tipo Kawashima

Notación:

$$\bar{A} := A_0 A(U(x)), \quad \bar{L} := A_0(U(x))L,$$

$$K := K(u(x)), \quad \beta = \beta(U(x)),$$

$$\beta_x, \bar{L}_x, \bar{A}_x, K_x = \mathcal{O}(|U_x|) = \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Basta con controlar $|u_x|_{L^2}$ para $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$,

$$|u_x|_{L^2}^2 \leq \bar{C}((\operatorname{Re} \lambda)\eta|u|_{L^2}^2 + \int |U_x||u|^2 dx), \quad (*)$$

cierto $C > 0$, $\eta > 0$, tal que $\epsilon^2/\eta \ll 1$.

Tomando $\eta = \mathcal{O}(\epsilon)$ pequeño y con la estimación tipo Friedrichs se obtiene la estimación (EK).

Ingredientes:

- Tomar el producto L^2 ecuación para u con Ku_x , aplicar K *skew*-simétrica, $\text{Im} \langle Ku_x, u \rangle = -\frac{1}{2} \langle K_x u, u \rangle$:

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle u_x, KA u_x \rangle &= \text{Re} (\lambda \langle Ku_x, u \rangle) + \text{Re} \langle Ku_x, Lq_x \rangle, \\ \text{Re} (\lambda \langle Ku_x, u \rangle) &\leq C(\text{Re } \lambda) (\eta^{-1} |u_x|_{L^2}^2 + \eta |u|_{L^2}^2) \\ &\quad + C |\text{Im } \lambda| \int |U_x| |u|^2 dx \end{aligned}$$

- $\bar{L}B$ simétrica, positiva semi-definida; $\text{Re} (KA + \bar{L}B) > 0$:

$$\text{Re} \langle u_x, KA u_x \rangle + \langle u_x, \bar{L}B u_x \rangle \geq \frac{1}{C} |u_x|_{L^2}^2$$

- Producto L^2 de u_x con la ecuación para q :

$$\langle u_x, \bar{L}B u_x \rangle = -\langle u_{xx}, \bar{L}q_x \rangle - \langle u_x, \bar{L}_x q_x \rangle - \langle u_x, \bar{L}q \rangle.$$

- Se estima cada término: \bar{A} simétrica, $\bar{L}B$ simétrica, positiva semi-definida, se obtiene:

$$\langle u_x, \bar{L}B u_x \rangle \leq C\epsilon |u_x|_{L^2}^2 + C \int |U_x| |u|^2 dx.$$

- Se sustituye todo en la estimación para $|u_x|_{L^2}^2$. $\operatorname{Re} \lambda = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $\epsilon^2/\eta \ll 1$ pequeño. Se obtiene (*).

Esbozo de la estimación tipo Goodman

Lema (Goodman)

Existen matrices suaves $\mathbb{R}(u)$, (u) tales que

$$A\mathbb{R} = \begin{pmatrix} A_- & & \\ & a_p & \\ & & A_+ \end{pmatrix}$$

donde A_{\pm} son simétricas, $A_- \leq \delta < 0$, $A_+ \geq \delta > 0$. Si $\mathbb{R} = \mathbb{R}(U)$, $\mathbb{R} = \mathbb{R}(U)$,

$$(\mathbb{R}_x)_{pp} = ({}_x\mathbb{R})_{pp} = 0,$$

$$L\mathbb{R} \geq -C\epsilon$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \Gamma \check{\mathbb{R}}, & \check{\mathbb{L}} &= \Gamma^{-1} \check{\mathbb{L}}, \\ \check{\mathbb{R}} &= (A_0)^{1/2} O^\top, & \check{\mathbb{L}} &= O(A_0)^{1/2}, \end{aligned}$$

O ortogonal, real, diagonaliza en bloque $(A_0)^{1/2} A (A_0)^{-1/2}$,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} I_{p-1} & & \\ & \alpha & \\ & & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

α resuelve

$$\alpha_x = -\check{l}_p(\check{r}_p)_x \alpha, \quad \alpha(0) = 1.$$

$$\alpha = e^{\int_0^x -\check{l}_p(\check{r}_p)_x} = e^{\mathcal{O}(\int |U_x|)} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

De (H3): $l_p^\pm LB^\pm r_p^\pm > 0$, por continuidad, $U \sim u_\pm$,

$$(l_p L B r_p)|_{u=U} > 0.$$

$$\operatorname{Re} L B \mathbb{R} \geq -C\epsilon,$$

$$(L B \mathbb{R})_{pp} \geq \theta > 0$$

$$\tilde{A}(x) := (A\mathbb{R})(U(x)) = \begin{pmatrix} A_- & & \\ & a_p & \\ & & A_+ \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}(x) := (U(x))L, \quad \tilde{B}(x) := B(U(x))\mathbb{R}(U(x)),$$

$$v := u,$$

$$\lambda v + \tilde{A}v_x + \tilde{L}q_x = \tilde{A}_x\mathbb{R}v,$$

$$-q_{xx} + q + \tilde{B}v_x = -B\mathbb{R}_xv$$

$$\tilde{A}(x) := (A\mathbb{R})(U(x)) = \begin{pmatrix} A_- & & \\ & a_p & \\ & & A_+ \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}(x) := (U(x))L, \quad \tilde{B}(x) := B(U(x))\mathbb{R}(U(x)),$$

$$v := u,$$

$$\lambda v + \tilde{A}v_x + \tilde{L}q_x = \tilde{A}_x\mathbb{R}v,$$

$$-q_{xx} + q + \tilde{B}v_x = -B\mathbb{R}_xv$$

Normas pesadas:

$$W := \begin{pmatrix} w_{-I_{p-1}} & & \\ & w_p & \\ & & w_{+I_{n-p}} \end{pmatrix}$$

w_p, w_{\pm} funciones escalares:

$$w_p \equiv 1,$$

$$(w_{\pm})_x = -c_* |U_x| w_{\pm} / a_{\pm}, \quad w_{\pm}(0) = 1.$$

$$\Rightarrow w_{\pm} = \exp \left(\int_0^x c_* |U_x| / \bar{a}_{\pm} \right) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon),$$

$$(w_{\pm})_x = \mathcal{O}(|U_x|), \quad (w_p)_x = 0.$$

$c_* > 0$ suff. grande, tal que

$$W\tilde{A}_x + W_x\tilde{A} \leq C \begin{pmatrix} -c_* I_p & & \\ & -\theta & \\ & & -c_* I_{n-p} \end{pmatrix}, \quad C > 0.$$

Ingredientes:

- Producto L^2 de Wv versus la ecuación para v ; integración por partes, \tilde{A} simétrica, $v := (v_-, v_p, v_+)^T$, desigualdad anterior:

$$(\operatorname{Re} \lambda)|v|_{L^2}^2 + \frac{c_*}{2} \langle v_{\pm}, |U_x|v_{\pm} \rangle + \frac{1}{2} \theta \langle v_p, |U_x|v_p \rangle + \operatorname{Re} \langle Wv, \tilde{L}q_x \rangle = \operatorname{Re} \langle Wv, \tilde{A}_x \mathbb{R}v \rangle.$$

Acotar $\operatorname{Re} \langle Wv, \tilde{A}_x \mathbb{R}v \rangle \leq C \langle v_{\pm}, |U_x|v_{\pm} \rangle + C \epsilon \langle v_p, |U_x|v_p \rangle$; y tomando c_* grande, $\epsilon \ll 1$,

$$(\operatorname{Re} \lambda)|v|_{L^2}^2 + C \int |U_x||v|^2 \leq -\operatorname{Re} \langle Wv, \tilde{L}q_x \rangle$$

- Control del producto v con q_x ; producto L^2 de Wv_x por \tilde{L} veces la ecuación para q , integrar por partes,

$$-\langle Wv, \tilde{L}q_x \rangle = -\langle Wv_x, LB\mathbb{R}_x v \rangle - \langle Wv_x, \tilde{L}\tilde{B}v_x \rangle + \langle Wv_x, \tilde{L}q_{xx} \rangle + \langle Wv, \tilde{L}_x q \rangle + \langle W_x v, \tilde{L}q \rangle.$$

- Acotando los términos, en particular

$$\operatorname{Re} \langle Wv_{xx}, \tilde{L}q_x \rangle \leq C\epsilon \int |U_x| |v|^2 + C\epsilon^2 |v_x|_{L^2}^2,$$

se obtiene

$$-\operatorname{Re} \langle Wv, \tilde{L}q_x \rangle \leq C\epsilon \int |U_x| |v|^2 + C\epsilon |v_x|_{L^2}^2$$

Combinando con la estimación anterior, regresando a las variables u obtenemos (EG).

- Control del producto v con q_x ; producto L^2 de Wv_x por \tilde{L} veces la ecuación para q , integrar por partes,

$$-\langle Wv, \tilde{L}q_x \rangle = -\langle Wv_x, LB\mathbb{R}_x v \rangle - \langle Wv_x, \tilde{L}\tilde{B}v_x \rangle + \langle Wv_x, \tilde{L}q_{xx} \rangle + \langle Wv, \tilde{L}_x q \rangle + \langle W_x v, \tilde{L}q \rangle.$$

- Acotando los términos, en particular

$$\operatorname{Re} \langle Wv_{xx}, \tilde{L}q_x \rangle \leq C\epsilon \int |U_x| |v|^2 + C\epsilon^2 |v_x|_{L^2}^2,$$

se obtiene

$$-\operatorname{Re} \langle Wv, \tilde{L}q_x \rangle \leq C\epsilon \int |U_x| |v|^2 + C\epsilon |v_x|_{L^2}^2$$

Combinando con la estimación anterior, regresando a las variables u obtenemos (EG).

Estabilidad de ondas de choque con radiación

Ramón G. Plaza

Introducción

Ondas de choque viscosas

Modelo escalar

El problema espectral

Dos funciones de Evans

Cotas puntuales para el operador de Green

Análisis no lineal

Sistemas hiperbólico-elípticos

Hipótesis

Resultados

Estabilidad espectral para sistemas

Problema espectral

Estimación tipo Kawashima

Estimación tipo Goodman

¡Gracias!