

Estabilidad multidimensional de interfaces planas en medios elásticos bajo relaciones cinéticas regulares

Ramón G. Plaza

Departamento de Matemáticas y Mecánica
IIMAS - UNAM

22 de agosto, 2008
Seminario de Matemáticas, ITAM

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Contenido

Estabilidad
multidimensional
de interfases
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Introducción

Estabilidad de
interfases
subsónicas planas

Estabilidad de interfases subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Evaluación de la función de Lopatinski

Resultados
numéricos

Resultados numéricos

Discusión

Discusión

Materiales elásticos no lineales

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Teoría de elasticidad no lineal:

J. M. BALL AND R. D. JAMES

- ▶ Arch. Ration. Mech. Anal. **100** (1987), no. 1
- ▶ Phil. Trans. R. Soc. London A **338** (1992)

Material elástico: cristales *martensíticos* bajo temperatura crítica. Función de densidad de energía:

$$W : \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$W = W(U), \quad U \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3},$$

Configuración de referencia:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Variable lagrangiana (deformación):

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Gradiente de deformación:

$$U = \nabla_x X \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Materiales elásticos no lineales

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Teoría de elasticidad no lineal:

J. M. BALL AND R. D. JAMES

- ▶ Arch. Ration. Mech. Anal. **100** (1987), no. 1
- ▶ Phil. Trans. R. Soc. London A **338** (1992)

Material elástico: cristales *martensíticos* bajo temperatura crítica. Función de densidad de energía:

$$W : \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$W = W(U), \quad U \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3},$$

Configuración de referencia:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Variable lagrangiana (deformación):

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Gradiente de deformación:

$$U = \nabla_x X \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Características:

- ▶ Indiferente bajo rotaciones: $W(OU) = W(U)$ para cada $O \in \text{SO}(3)$.
- ▶ No-convexa.
- ▶ Estados martensíticos múltiples, mínimos globales,

$$W(U) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U \in \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m, \quad m \geq 2,$$

Funcional de energía total:

$$\mathcal{J}[X] = \int_{\Omega} W(\nabla_x X) dx$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planasEvaluación de la
función de
LopatinskiResultados
numéricos

Discusión

Características:

- ▶ Indiferente bajo rotaciones: $W(OU) = W(U)$ para cada $O \in \text{SO}(3)$.
- ▶ No-convexa.
- ▶ Estados martensíticos múltiples, mínimos globales,

$$W(U) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U \in \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_m, \quad m \geq 2,$$

Funcional de energía total:

$$\mathcal{J}[X] = \int_{\Omega} w(\nabla_x X) dx$$

[Introducción](#)[Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas](#)[Evaluación de la
función de
Lopatinski](#)[Resultados
numéricos](#)[Discusión](#)

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

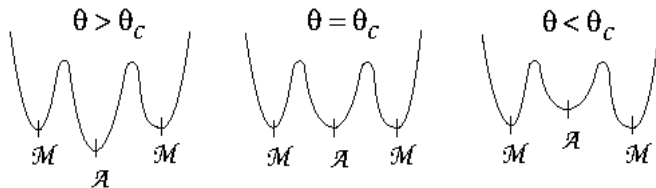


FIG. 1: Fases austenita y martensita.

Interfase plana separando dos variantes martensíticas:

$$U_0(x) = \begin{cases} \underline{U}^-, & x \cdot \nu < 0, \\ \underline{U}^+, & x \cdot \nu > 0, \end{cases}$$

$\nu \in \mathbb{R}^3, |\nu| = 1$ – normal a la interfase plana

$U = \underline{U}^+, U = \underline{U}^-$ – dos estados martensíticos “diferentes”

$U = \underline{U}^\pm$ mínimos globales de W ; satisfacen la condición de
Hadamard:

$$\underline{U}^+ - \underline{U}^- = a \otimes \nu$$

para cierto $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$: $\underline{U}^-$ y $\underline{U}^+$ tienen una conexión de
rango uno; continuidad de las derivadas tangenciales.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Interfase plana separando dos variantes martensíticas:

$$U_0(x) = \begin{cases} \underline{U}^-, & x \cdot \nu < 0, \\ \underline{U}^+, & x \cdot \nu > 0, \end{cases}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$\nu \in \mathbb{R}^3, |\nu| = 1$ – normal a la interfase plana

$U = \underline{U}^+, U = \underline{U}^-$ – dos estados martensíticos “diferentes”

$U = \underline{U}^\pm$ mínimos globales de W ; satisfacen la condición de
Hadamard:

$$\underline{U}^+ - \underline{U}^- = a \otimes \nu$$

para cierto $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$: $\underline{U}^-$ y $\underline{U}^+$ tienen una conexión de
rango uno; continuidad de las derivadas tangenciales.

Pozos martensíticos: $U^\pm = \text{SO}(3)U^\pm$.

Dos estados con conexión de rango uno no pertenecen al mismo pozo (BALL AND JAMES, 1992).

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

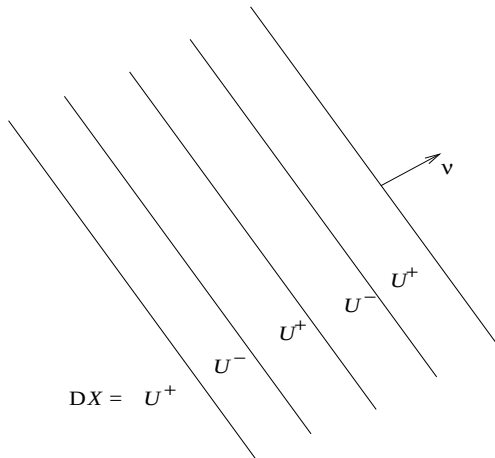


FIG. 2: Un laminado martensítico simple.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

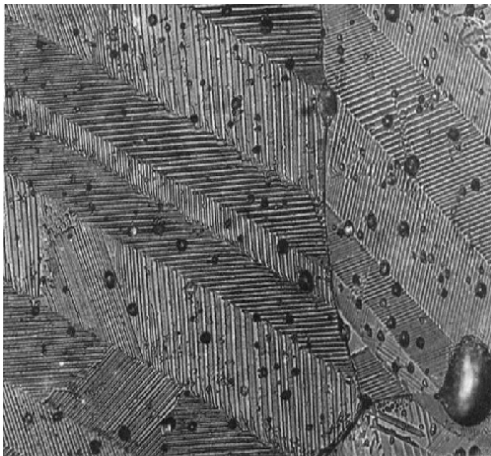


FIG. 3: Fotografía que muestra laminados (fases tetragonales) en bario-titanato BaTiO_3 . Cortesía de Philips Research Labs, Aachen 1990.

Estabilidad multidimensional de la frontera plana entre dos fases martensíticas: si deformamos un poco la frontera como condición inicial de las ecuaciones dinámicas, la solución se mantendrá “cerca” y con forma “similar” a la interfase, o será cualitativamente “diferente”?

Contenido

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Estabilidad de interfaces subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Evaluación de la función de Lopatinski

Resultados
numéricos

Resultados numéricos

Discusión

Discusión

Ecuaciones de hiperelasticidad no térmica sin fuerzas externas

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$$U_t - \nabla_x V = 0,$$

$$V_t - \operatorname{div}_x \sigma(U) = 0,$$

con

$$(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty),$$

$$U(x, t) := \nabla_x X \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \quad - \quad \text{gradiente de deformación local,}$$

$$V(x, t) := X_t(x, t) \in \mathbb{R}^3 \quad - \quad \text{velocidad local,}$$

$$\sigma(U) = \frac{\partial W}{\partial U} \quad - \quad \text{tensor de Piola-Kirchhoff (stress),}$$

$$W = W(U) \quad - \quad \text{densidad local de energía}$$

Ecuaciones de hiperelasticidad no térmica sin fuerzas externas

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$$U_t - \nabla_x V = 0,$$

$$V_t - \operatorname{div}_x \sigma(U) = 0,$$

con

$$(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty),$$

$$U(x, t) := \nabla_x X \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \quad - \quad \text{gradiente de deformación local,}$$

$$V(x, t) := X_t(x, t) \in \mathbb{R}^3 \quad - \quad \text{velocidad local,}$$

$$\sigma(U) = \frac{\partial W}{\partial U} \quad - \quad \text{tensor de Piola-Kirchhoff (stress),}$$

$$W = W(U) \quad - \quad \text{densidad local de energía}$$

Constricción:

$$\operatorname{curl}_x U = 0,$$

$$\text{i.e. } \partial_{x_k} U_{ij} - \partial_{x_j} U_{ik} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Tensor acústico:

$$\mathcal{N}(\xi, U) = D^2 W(U)(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^3 \xi_i \xi_j B_{ij}^j(U), \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

$$B_{ij}^j(U) := \frac{\partial^2 W}{\partial U_{lj} \partial U_{ki}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Constricción:

$$\operatorname{curl}_x U = 0,$$

$$\text{i.e. } \partial_{x_k} U_{ij} - \partial_{x_j} U_{ik} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Tensor acústico:

$$\mathcal{N}(\xi, U) = D^2 W(U)(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^3 \xi_i \xi_j B_i^j(U), \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

$$B_j^i(U) := \frac{\partial^2 W}{\partial U_{lj} \partial U_{ki}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

Condición de **Legendre-Hadamard**:

$$\eta^{\top} \mathcal{N}(\xi, U) \eta > 0$$

para todo $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$. (Se dice que W es *rango-uno convexa* en U .)

W es rango-uno convexa en $U \implies$ el sistema de ecuaciones es *hiperbólico* en U .

Condición de **Legendre-Hadamard**:

$$\eta^{\top} \mathcal{N}(\xi, U) \eta > 0$$

para todo $\eta, \xi \in \mathbb{R}^3$. (Se dice que W es *rango-uno convexa* en U .)

W es rango-uno convexa en $U \implies$ el sistema de ecuaciones es *hiperbólico* en U .

Interfases planas subsónicas

Estabilidad
multidimensional
de interfases
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfases
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$$(U, V)(x, t) = \begin{cases} (U^-, V^-), & x \cdot N < st, \\ (U^+, V^+), & x \cdot N > st \end{cases}$$

W es convexa de rango-uno en $U = U^\pm$, $U^+ \neq U^-$. Normal a la interfase: $N \in \mathbb{R}^3$, $|N| = 1$. s = velocidad del choque, **subsónica**:

$$0 \leq s^2 < \min\{\kappa_j(N, U^\pm) \text{ valores propios de } \mathcal{N}(N, U^\pm)\}.$$

Interfases planas subsónicas

Estabilidad
multidimensional
de interfases
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfases
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$$(U, V)(x, t) = \begin{cases} (U^-, V^-), & x \cdot N < st, \\ (U^+, V^+), & x \cdot N > st \end{cases}$$

W es convexa de rango-uno en $U = U^\pm$, $U^+ \neq U^-$. Normal a la interfase: $N \in \mathbb{R}^3$, $|N| = 1$. s = velocidad del choque, **subsónica**:

$$0 \leq s^2 < \min\{\kappa_j(N, U^\pm) \text{ valores propios de } \mathcal{N}(N, U^\pm)\}.$$

Condiciones clásicas de salto (Rankine-Hugoniot):

$$-s[U] - [V] \otimes N = 0,$$

$$-s[V] - [\sigma(U)]N = 0,$$

$$[U] \times N = 0.$$

$[f] := f^+ - f^-$, para toda función f .

La velocidad s de una interfase plana subsónica no está únicamente determinada por leyes constitutivas (choque subcompresivo). Se requiere un criterio adicional.

Relaciones cinéticas:

R. ABEYARATNE AND J. K. KNOWLES

- ▶ J. Mech. Phys. Solids **38** (1990) no. 3, 345-360.
- ▶ Arch. Ration. Mech. Anal. **114** (1991), 119-154.

La velocidad s de una interfase plana subsónica no está únicamente determinada por leyes constitutivas (choque subcompresivo). Se requiere un criterio adicional.

Relaciones cinéticas:

R. ABEYARATNE AND J. K. KNOWLES

- ▶ J. Mech. Phys. Solids **38** (1990) no. 3, 345-360.
- ▶ Arch. Ration. Mech. Anal. **114** (1991), 119-154.

Función que relaciona la velocidad normal de la interfase v_n con la fuerza “guiadora” efectiva a través de la interfase:

$$v_n = \phi(\mathcal{F}),$$

$$\mathcal{F} := [W(U)] - N^\top [U]^\top \langle \sigma(U) \rangle N,$$

$\langle f \rangle := \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$. En ciertos casos: ϕ invertible.

La relación cinética induce una condición de salto extra de la forma

$$g((U^-, V^-), (U^+, V^+), s, N) = 0$$

[Introducción](#)[Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas](#)[Evaluación de la
función de
Lopatinski](#)[Resultados
numéricos](#)[Discusión](#)

Función que relaciona la velocidad normal de la interfase v_n con la fuerza “guiadora” efectiva a través de la interfase:

$$v_n = \phi(\mathcal{F}),$$

$$\mathcal{F} := [W(U)] - N^\top [U]^\top \langle \sigma(U) \rangle N,$$

$\langle f \rangle := \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$. En ciertos casos: ϕ invertible.

La relación cinética induce una condición de salto extra de la forma

$$g((U^-, V^-), (U^+, V^+), s, N) = 0$$

[Introducción](#)[Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas](#)[Evaluación de la
función de
Lopatinski](#)[Resultados
numéricos](#)[Discusión](#)

Relaciones cinéticas del tipo **ABEYARATNE AND KNOWLES**
(1990, 1991) de la forma:

$$g = \mathcal{F} + h = 0,$$

$$h((U^-, V^-), (U^+, V^+), s, N) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{N} = (\mathbb{R}_+^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}_+^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo

ABEYARATNE-KNOWLES :

- ▶ h es una función diferenciable en sus parámetros,
- ▶ $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- ▶ $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- ▶ $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+, 0), (\underline{U}^-, 0), 0, \nu)} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo

ABEYARATNE-KNOWLES :

- ▶ h es una función diferenciable en sus parámetros,
- ▶ $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- ▶ $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- ▶ $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+, 0), (\underline{U}^-, 0), 0, \nu)} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo

ABEYARATNE-KNOWLES :

- ▶ h es una función diferenciable en sus parámetros,
- ▶ $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- ▶ $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- ▶ $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+, 0), (\underline{U}^-, 0), 0, \nu)} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo

ABEYARATNE-KNOWLES :

- ▶ h es una función diferenciable en sus parámetros,
- ▶ $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- ▶ $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- ▶ $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+, 0), (\underline{U}^-, 0), 0, \nu)} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo

ABEYARATNE-KNOWLES :

- ▶ h es una función diferenciable en sus parámetros,
- ▶ $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- ▶ $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- ▶ $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+, 0), (\underline{U}^-, 0), 0, \nu)} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Teoría de estabilidad multidimensional para frentes planos

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- ▶ Teoría de sistemas hiperbólicos con coeficientes constantes lineales con valores iniciales y de frontera (H. O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277-298). Condición uniforme de Lopatinski, suficiente para tener estimación L^2 de la solución. Construcción de simetrizadores de Kreiss.
- ▶ Estabilidad multidimensional de choques no viscosos (A. MAJDA, Mem. Amer. Math. Soc. 41 (275) (1983); Mem. Amer. Math. Soc. 43 (281) (1983)). Define estabilidad de la frontera como un problema bien planteado en L^2 para la perturbación. Problema linealizado a ambos lados de la frontera y planteado como un problema tipo Kreiss. Estabilidad lineal implica estabilidad no lineal.

Teoría de estabilidad multidimensional para frentes planos

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- ▶ Teoría de sistemas hiperbólicos con coeficientes constantes lineales con valores iniciales y de frontera (H. O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277-298). Condición uniforme de Lopatinski, suficiente para tener estimación L^2 de la solución. Construcción de simetrizadores de Kreiss.
- ▶ Estabilidad multidimensional de choques no viscosos (A. MAJDA, Mem. Amer. Math. Soc. 41 (275) (1983); Mem. Amer. Math. Soc. 43 (281) (1983)). Define estabilidad de la frontera como un problema bien planteado en L^2 para la perturbación. Problema linealizado a ambos lados de la frontera y planteado como un problema tipo Kreiss. Estabilidad lineal implica estabilidad no lineal.

Majda define:

- ▶ Choque *uniformemente estable* si el problema linealizado es fuertemente bien planteado en L^2 (condición uniforme de Lopatinski),
- ▶ Choque *débilmente estable* si el problema linealizado satisface la condición de Lopatinski.
- ▶ Choque *fuertemente inestable* si el problema linealizado no satisface la condición de Lopatinski.

Majda define:

- ▶ Choque *uniformemente estable* si el problema linealizado es fuertemente bien planteado en L^2 (condición uniforme de Lopatinski),
- ▶ Choque *débilmente estable* si el problema linealizado satisface la condición de Lopatinski.
- ▶ Choque *fuertemente inestable* si el problema linealizado no satisface la condición de Lopatinski.

Majda define:

- ▶ Choque *uniformemente estable* si el problema linealizado es fuertemente bien planteado en L^2 (condición uniforme de Lopatinski),
- ▶ Choque *débilmente estable* si el problema linealizado satisface la condición de Lopatinski.
- ▶ Choque *fuertemente inestable* si el problema linealizado no satisface la condición de Lopatinski.

- ▶ Choques débiles (G. MÉTIVIER, Comm. Partial Diff. Equations 15 (7) (1990) 983–1028 (1990, 2001)).
Extensión del resultado de Majda a choques débiles.
- ▶ Extensión de la teoría de Majda y Métivier a *transiciones de fase*: (H. FREISTÜHLER, J. Partial Diff. Eqs. 11 (1) (1998) 25–38). Necesidad de introducir la relación cinética al análisis de Majda. Extensión del determinante de Lopatinski *con* relación cinética. Estabilidad no lineal: (J.-F. COULOMBEL, Interfaces Free Bound. 5 (4) (2003), 360–390). El análisis no lineal de Majda se extiende a transiciones de fase. Condición uniforme de Lopatinski implica estabilidad no lineal.

- ▶ Choques débiles (G. MÉTIVIER, Comm. Partial Diff. Equations 15 (7) (1990) 983–1028 (1990, 2001)).
Extensión del resultado de Majda a choques débiles.
- ▶ Extensión de la teoría de Majda y Métivier a *transiciones de fase*: (H. FREISTÜHLER, J. Partial Diff. Eqs. 11 (1) (1998) 25–38). Necesidad de introducir la relación cinética al análisis de Majda. Extensión del determinante de Lopatinski *con* relación cinética. Estabilidad no lineal: (J.-F. COULOMBEL, Interfaces Free Bound. 5 (4) (2003), 360–390). El análisis no lineal de Majda se extiende a transiciones de fase. Condición uniforme de Lopatinski implica estabilidad no lineal.

Análisis en modos normales para las ecuaciones de hiperelasticidad

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

FREISTÜHLER AND P, Arch. Ration. Mech. Anal. **186** (2007), no. 1.

Es suficiente hacer el análisis de modos normales en un subespacio de amplitudes compatibles con la constricción $\operatorname{curl}_x U = 0$.

Resultado: definición de la *función reducida de Lopatinski*.
Permite incorporar interfaces estáticas $s = 0$ al análisis.

Análisis en modos normales para las ecuaciones de hiperelasticidad

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

FREISTÜHLER AND P, Arch. Ration. Mech. Anal. **186** (2007), no. 1.

Es suficiente hacer el análisis de modos normales en un subespacio de amplitudes compatibles con la restricción $\text{curl}_x U = 0$.

Resultado: definición de la *función reducida de Lopatinski*.
Permite incorporar interfaces estáticas $s = 0$ al análisis.

Función reducida de Lopatinski

Conjunto compacto de frecuencias:

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d : \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \xi \cdot N = 0, |\lambda|^2 + |\xi|^2 = 1\},$$

Determinante de Lopatinski reducido:

$$\Delta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\Delta(\lambda, \xi) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}_-^s & \hat{Q} & \hat{R}_+^u \\ \hat{p}^- & \hat{q} & \hat{p}^+ \end{pmatrix},$$

donde,

Función reducida de Lopatinski

Conjunto compacto de frecuencias:

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d : \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \xi \cdot N = 0, |\lambda|^2 + |\xi|^2 = 1\},$$

Determinante de Lopatinski reducido:

$$\Delta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\Delta(\lambda, \xi) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}_-^s & \hat{Q} & \hat{R}_+^u \\ \hat{p}^- & \hat{q} & \hat{p}^+ \end{pmatrix},$$

donde,

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U]N \\ -\lambda s - i[\sigma(U)]\xi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6 \times 1},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i(\xi \cdot D_N g) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$$

$$\hat{p}^+ := (D_{(U^+, V^+)} g) \mathcal{K}_+(\lambda, \xi) \hat{R}_+^u \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

$$\hat{p}^- := -(D_{(U^-, V^-)} g) \mathcal{K}_-(\lambda, \xi) \hat{R}_-^s \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

$\hat{R}^{s,u}(\underline{U}^\pm) \in \mathbb{C}^{6 \times 1}$ - espacios invariantes estable e inestable de una matriz $\mathbb{M}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^{6 \times 6}$ definida para cada U cerca de $\underline{U}^\pm$, s subsónica. $\mathcal{K}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^{12 \times 6}$ es un mapeo continuo. $\mathbb{M}$ y $\mathcal{K}$ dependen explícitamente de las segundas derivadas de W .

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U]N \\ -\lambda s - i[\sigma(U)]\xi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6 \times 1},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i(\xi \cdot D_N g) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$$

$$\hat{p}^+ := (D_{(U^+, V^+)} g) \mathcal{K}_+(\lambda, \xi) \hat{R}_+^u \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

$$\hat{p}^- := -(D_{(U^-, V^-)} g) \mathcal{K}_-(\lambda, \xi) \hat{R}_-^s \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

$\hat{R}^{s,u}(\underline{U}^\pm) \in \mathbb{C}^{6 \times 1}$ - espacios invariantes estable e inestable de una matriz $\mathbb{M}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^{6 \times 6}$ definida para cada U cerca de $\underline{U}^\pm$, s subsónica. $\mathcal{K}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^{12 \times 6}$ es un mapeo continuo. $\mathbb{M}$ y $\mathcal{K}$ dependen explícitamente de las segundas derivadas de W .

La estabilidad no lineal de la interfase subsónica plana está controlada por la función de Lopatinski reducida en el sentido que la frontera es:

- ▶ *Uniformemente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S}$, (condición uniforme Lopatinski),
- ▶ *Débilmente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ (condición de Lopatinski),
- ▶ *Fuertemente inestable* si $\Delta(\lambda, \xi) = 0$ para algún $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

La estabilidad no lineal de la interfase subsónica plana está controlada por la función de Lopatinski reducida en el sentido que la frontera es:

- ▶ *Uniformemente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S}$, (condición uniforme Lopatinski),
- ▶ *Débilmente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ (condición de Lopatinski),
- ▶ *Fuertemente inestable* si $\Delta(\lambda, \xi) = 0$ para algún $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

La estabilidad no lineal de la interfase subsónica plana está controlada por la función de Lopatinski reducida en el sentido que la frontera es:

- ▶ *Uniformemente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S}$, (condición uniforme Lopatinski),
- ▶ *Débilmente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ (condición de Lopatinski),
- ▶ *Fuertemente inestable* si $\Delta(\lambda, \xi) = 0$ para algún $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Contenido

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Estabilidad de interfaces subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Evaluación de la función de Lopatinski

Resultados
numéricos

Resultados numéricos

Discusión

Discusión

Ejemplo: frontera plana monoclónica

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Deformaciones (monoclónicas) :

$$\underline{U}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \underline{U}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0,$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

con función de densidad de energía (M. KRUŽÍK AND
M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3):

$$W(U) = \frac{1}{32} \left| C - \begin{pmatrix} 1 + \epsilon^2 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2 \left| C - \begin{pmatrix} 1 + \epsilon^2 & -\epsilon & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

donde $C(U) = U^\top U$ (tensor de “strain” de Cauchy-Green), y

$$|M|^2 = \text{tr}(M^\top M), \quad (\text{norma de Frobenius en } \mathbb{R}^{3 \times 3}).$$

Ejemplo: frontera plana monoclínica

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Deformaciones (monoclínicas) :

$$\underline{U}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \underline{U}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0,$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

con función de densidad de energía (M. KRUŽÍK AND
M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3):

$$W(U) = \frac{1}{32} \left| C - \begin{pmatrix} 1 + \epsilon^2 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2 \left| C - \begin{pmatrix} 1 + \epsilon^2 & -\epsilon & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

donde $C(U) = U^\top U$ (tensor de “strain” de Cauchy-Green), y

$$|M|^2 = \text{tr}(M^\top M), \quad (\text{norma de Frobenius en } \mathbb{R}^{3 \times 3}).$$

Conexión de rango uno:

$$\underline{U}^+ - \underline{U}^- = 2\epsilon\hat{e}_2 \otimes \hat{e}_1,$$

y $\det \underline{U}^+ = \det \underline{U}^- = 1$.

Pozos martensíticos: $\mathcal{U}^+ = \text{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \text{SO}(3)\underline{U}^-$.

Número total de pozos: 2 (fases monoclinicas).

- ▶ W indiferente bajo rotaciones,
- ▶ W alcanza su mínimo sólo en $\mathcal{U}^+ = \text{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \text{SO}(3)\underline{U}^-$,
- ▶ W es rango-uno convexa en $U = \underline{U}^\pm$ (hiperbolicidad),
- ▶ W satisface la condición de Métivier (valores propios simples de $\mathcal{N}(\xi, \underline{U}^\pm)$),
- ▶ No convexa, con estructura múltiple,
- ▶ Cálculo de microestructuras cristalinas (CHIPOT *et al.* Numer. Math **70** (1995), no. 3; M. KRUŽÍK AND M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3).

- ▶ W indiferente bajo rotaciones,
- ▶ W alcanza su mínimo sólo en $\mathcal{U}^+ = \text{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \text{SO}(3)\underline{U}^-$,
- ▶ W es rango-uno convexa en $U = \underline{U}^\pm$ (hiperbolicidad),
- ▶ W satisface la condición de Métivier (valores propios simples de $\mathcal{N}(\xi, \underline{U}^\pm)$),
- ▶ No convexa, con estructura múltiple,
- ▶ Cálculo de microestructuras cristalinas (CHIPOT *et al.* Numer. Math **70** (1995), no. 3; M. KRŽÍK AND M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3).

- ▶ W indiferente bajo rotaciones,
- ▶ W alcanza su mínimo sólo en $\mathcal{U}^+ = \text{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \text{SO}(3)\underline{U}^-$,
- ▶ W es rango-uno convexa en $U = \underline{U}^\pm$ (hiperbolicidad),
- ▶ W satisface la condición de Métivier (valores propios simples de $\mathcal{N}(\xi, \underline{U}^\pm)$),
- ▶ No convexa, con estructura múltiple,
- ▶ Cálculo de microestructuras cristalinas (CHIPOT *et al.* Numer. Math **70** (1995), no. 3; M. KRŽÍK AND M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3).

- ▶ W indiferente bajo rotaciones,
- ▶ W alcanza su mínimo sólo en $\mathcal{U}^+ = \text{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \text{SO}(3)\underline{U}^-$,
- ▶ W es rango-uno convexa en $U = \underline{U}^\pm$ (hiperbolicidad),
- ▶ W satisface la condición de Métivier (valores propios simples de $\mathcal{N}(\xi, \underline{U}^\pm)$),
- ▶ No convexa, con estructura múltiple,
- ▶ Cálculo de microestructuras cristalinas (CHIPOT *et al.* Numer. Math **70** (1995), no. 3; M. KRUŽÍK AND M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3).

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- ▶ W indiferente bajo rotaciones,
- ▶ W alcanza su mínimo sólo en $\mathcal{U}^+ = \text{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \text{SO}(3)\underline{U}^-$,
- ▶ W es rango-uno convexa en $U = \underline{U}^\pm$ (hiperbolicidad),
- ▶ W satisface la condición de Métivier (valores propios simples de $\mathcal{N}(\xi, \underline{U}^\pm)$),
- ▶ No convexa, con estructura múltiple,
- ▶ Cálculo de microestructuras cristalinas (CHIPOT *et al.* Numer. Math **70** (1995), no. 3; M. KRŽÍK AND M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3).

- ▶ W indiferente bajo rotaciones,
- ▶ W alcanza su mínimo sólo en $\mathcal{U}^+ = \text{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \text{SO}(3)\underline{U}^-$,
- ▶ W es rango-uno convexa en $U = \underline{U}^\pm$ (hiperbolicidad),
- ▶ W satisface la condición de Métivier (valores propios simples de $\mathcal{N}(\xi, \underline{U}^\pm)$),
- ▶ No convexa, con estructura múltiple,
- ▶ Cálculo de microestructuras cristalinas (**CHIPOT *et al.*** Numer. Math **70** (1995), no. 3; **M. KRUŽÍK AND M. LUSKIN**, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3).

P, J. Mech. Phys. Solids **56** (2008), no. 4.

*La interfase estática plana es débilmente estable bajo la
relación cinética de Maxwell (conservación de energía) y
uniformemente estable bajo relaciones cinéticas regulares
lineales del tipo Abeyaratne - Knowles.*

Contraparte elástica (y estática) de los resultados de S.
BENZONI-GAVAGE en el caso de un fluido de Van der Waals:

- ▶ Nonlinear Anal. TMA **31** (1998), nos. 1-2.
- ▶ Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1999), no. 1.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

P, J. Mech. Phys. Solids **56** (2008), no. 4.

*La interfase estática plana es débilmente estable bajo la
relación cinética de Maxwell (conservación de energía) y
uniformemente estable bajo relaciones cinéticas regulares
lineales del tipo Abeyaratne - Knowles.*

Contraparte elástica (y estática) de los resultados de S.
BENZONI-GAVAGE en el caso de un fluido de Van der Waals:

- ▶ Nonlinear Anal. TMA **31** (1998), nos. 1-2.
- ▶ Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1999), no. 1.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Evaluando en los mínimos

$$B_1^{1\pm} = \epsilon^2 \begin{pmatrix} 2 & \pm 2\epsilon & 0 \\ \pm 2\epsilon & 1 + 2\epsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_2^{2\pm} = \epsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & \pm\epsilon & 0 \\ \pm\epsilon & 2 + \epsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3^{3\pm} = \epsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & \pm\epsilon & 0 \\ \pm\epsilon & 1 + \epsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$$B_2^{1\pm} = (B_1^{2\pm})^\top = \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pm\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3^{1\pm} = (B_1^{3\pm})^\top = \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm\epsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3^{2\pm} = (B_2^{3\pm})^\top = \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valores propios de $B_1^{1\pm}$:

$$k_1 = \frac{1}{2}\epsilon^2 \left(3 + 2\epsilon^2 - \sqrt{(3 + 2\epsilon^2)^2 - 8} \right),$$

$$k_2 = \epsilon^2,$$

$$k_3 = \frac{1}{2}\epsilon^2 \left(3 + 2\epsilon^2 + \sqrt{(3 + 2\epsilon^2)^2 - 8} \right),$$

$0 < k_1 < k_2 < k_3$, simples. Velocidades características
 $\alpha_j = \pm\sqrt{k_j}$, $j = 1, 2, 3$. Vectores propios de $B_1^{1\pm}$,

$$Y_j = k_j \begin{pmatrix} 2\epsilon^3 \\ k_j - 2\epsilon^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 3, \quad Y_2 = \hat{e}_3.$$

Definición de la función de Lopatinski

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$\nu = \hat{e}_1$ — dirección de propagación,

$\tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_3)$ — direcciones transversales

Conjunto compacto de “frecuencias”

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 : |\lambda|^2 + |\tilde{\xi}|^2 = 1, \operatorname{Re} \lambda \geq 0\},$$

con interior: $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Definición de la función de Lopatinski

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$\nu = \hat{e}_1$ — dirección de propagación,

$\tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_3)$ — direcciones transversales

Conjunto compacto de “frecuencias”

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 : |\lambda|^2 + |\tilde{\xi}|^2 = 1, \operatorname{Re} \lambda \geq 0\},$$

con interior: $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S} \cap \{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

$$\mathbb{M}_{\pm} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

$$\mathbb{M}_{\pm}(\lambda, \tilde{\xi}) := \begin{pmatrix} M_{11}^{\pm} & M_{12}^{\pm} \\ M_{21}^{\pm} & M_{22}^{\pm} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} M_{11}^{\pm} &= i(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}), \\ M_{12}^{\pm} &= -(B_1^{1\pm})^{-1}, \\ M_{21}^{\pm} &= (\xi_2 B_1^{2\pm} + \xi_3 B_1^{3\pm})(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}) - \lambda^2 I + \\ &\quad -(\xi_2^2 B_2^{2\pm} + \xi_3^2 B_3^{3\pm} + \xi_2 \xi_3 (B_3^{2\pm} + B_2^{3\pm})), \\ M_{22}^{\pm} &= i(\xi_2 B_1^{2\pm} + \xi_3 B_1^{3\pm})(B_1^{1\pm})^{-1}. \end{aligned}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

La **función de Lopatinski reducida**, $\Delta : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, está definida como (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}_-^s & \hat{Q} & \hat{R}_+^u \\ \hat{p}_- & \hat{q} & \hat{p}_+ \end{pmatrix},$$

donde

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U_1] \\ i[\sigma(U)](0, \tilde{\xi})^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6 \times 1},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i((0, \tilde{\xi})^\top D_N g) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$$

$$\hat{p}_+^u := (D_{(U^+, V^+)} g) \mathcal{K}_+(\lambda, \tilde{\xi}) \hat{R}_+^u \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

$$\hat{p}_-^s := -(D_{(U^-, V^-)} g) \mathcal{K}_-(\lambda, \tilde{\xi}) \hat{R}_-^s \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

La **función de Lopatinski reducida**, $\Delta : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, está definida como (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}_-^s & \hat{Q} & \hat{R}_+^u \\ \hat{p}_- & \hat{q} & \hat{p}_+ \end{pmatrix},$$

donde

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U_1] \\ i[\sigma(U)](0, \tilde{\xi})^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6 \times 1},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i((0, \tilde{\xi})^\top D_N g) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$$

$$\hat{p}_+^+ := (D_{(U^+, V^+)} g) \mathcal{K}_+(\lambda, \tilde{\xi}) \hat{R}_+^u \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

$$\hat{p}_-^- := -(D_{(U^-, V^-)} g) \mathcal{K}_-(\lambda, \tilde{\xi}) \hat{R}_-^s \in \mathbb{C}^{1 \times 3}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$$\mathcal{K}_{\pm}(\lambda, \tilde{\xi}) := \begin{pmatrix} i(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}) & -(B_1^{1\pm})^{-1} \\ -i\xi_2 I & 0 \\ -i\xi_3 I & 0 \\ -\lambda I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{12 \times 6}$$

$$\hat{R}_+^u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6 \times 3},$$

$$\hat{R}_-^s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6 \times 3},$$

son mapeos continuos en $\mathcal{S}$ (analíticos en $\mathcal{S}^+$), cuyas columnas generan los subespacios invariantes estable e inestable de $\mathbb{M}_+$ and $\mathbb{M}_-$ respectivamente.

Propiedades: Δ es analítica para $\operatorname{Re} \lambda > 0$ y continua hasta $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

$$\mathcal{K}_{\pm}(\lambda, \tilde{\xi}) := \begin{pmatrix} i(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}) & -(B_1^{1\pm})^{-1} \\ -i\xi_2 I & 0 \\ -i\xi_3 I & 0 \\ -\lambda I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{12 \times 6}$$

$$\hat{R}_+^u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6 \times 3},$$

$$\hat{R}_-^s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6 \times 3},$$

son mapeos continuos en $\mathcal{S}$ (analíticos en $\mathcal{S}^+$), cuyas columnas generan los subespacios invariantes estable e inestable de $\mathbb{M}_+$ and $\mathbb{M}_-$ respectivamente.

Propiedades: Δ es analítica para $\operatorname{Re} \lambda > 0$ y continua hasta $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Modos estables e inestables

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Sea $\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) := \mathcal{N}(\mu, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \underline{U}^{\pm})$. Valores propios $\beta = -i\mu$ de $\mathbb{M}_{\pm}$, con $\mu \in \mathbb{C}$, satisfacen:

$$\pi_{\pm}(\mu) := \det(\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I) = 0,$$

para toda $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$.

Para $\operatorname{Re} \lambda > 0$, los valores propios son:

3 modos estables, $\operatorname{Im} \mu^s < 0$,
3 modos inestables, $\operatorname{Im} \mu^u > 0$.

(dicotomía hiperbólica, R. HERSH, J. Math. Mech. **12** (1963) no.3).

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Modos estables e inestables

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Sea $\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) := \mathcal{N}(\mu, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \underline{U}^{\pm})$. Valores propios $\beta = -i\mu$ de $\mathbb{M}_{\pm}$, con $\mu \in \mathbb{C}$, satisfacen:

$$\pi_{\pm}(\mu) := \det(\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I) = 0,$$

para toda $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$.

Para $\text{Re } \lambda > 0$, los valores propios son:

3 modos estables, $\text{Im } \mu^s < 0$,
3 modos inestables, $\text{Im } \mu^u > 0$.

(dicotomía hiperbólica, **R. HERSH**, J. Math. Mech. **12** (1963) no.3).

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

$\hat{R}_{\pm}^{s,u}$ - haces de Lopatinski, analíticos para $\text{Re } \lambda > 0$.

Observación: R vector propio de $\mathbb{M}_{\pm}$ con valor propio $-i\mu$,

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix},$$

$$Y \in \ker(\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I).$$

$\hat{R}_{\pm}^{s,u}$ - haces de Lopatinski, analíticos para $\text{Re } \lambda > 0$.

Observación: R vector propio de $\mathbb{M}_{\pm}$ con valor propio $-i\mu$,

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix},$$

$$Y \in \ker(\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I).$$

Evaluando en los pozos,

$$\begin{aligned} D_{(U^\pm, V^\pm)} h &= 0, \\ D_N h &= 0, \end{aligned} \quad \text{at } ((\underline{U}^+, 0), (\underline{U}^-, 0), 0, \hat{e}_1),$$

tanto para la ley de Maxwell como para leyes del tipo Abeyaratne-Knowles.

Haciendo $N = \hat{e}_1$, en la configuración estática,

$$\begin{aligned} (D_s g)|_{s=0} &= D_s(\mathcal{F} + h)_{s=0} = (D_s h)|_{s=0}, \\ (D_N g)|_{s=0} &= D_N(\mathcal{F} + h)_{s=0} = 0, \\ (D_{(U^\pm, V^\pm)} g)|_{s=0} &= D_{(U^\pm, V^\pm)}(\mathcal{F} + h)|_{s=0} \\ &= -\epsilon^3 \left((\pm 2\epsilon, 1 + 2\epsilon^2, 0), \pm \epsilon \hat{e}_2^\top, \pm \epsilon \hat{e}_3^\top, 0 \right) \\ &\in \mathbb{R}^{1 \times 12}. \end{aligned}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Evaluando en los pozos,

$$\begin{aligned} D_{(U^\pm, V^\pm)} h &= 0, \\ D_N h &= 0, \end{aligned} \quad \text{at } ((\underline{U}^+, 0), (\underline{U}^-, 0), 0, \hat{e}_1),$$

tanto para la ley de Maxwell como para leyes del tipo Abeyaratne-Knowles.

Haciendo $N = \hat{e}_1$, en la configuración estática,

$$\begin{aligned} (D_s g)|_{s=0} &= D_s(\mathcal{F} + h)_{s=0} = (D_s h)|_{s=0}, \\ (D_N g)|_{s=0} &= D_N(\mathcal{F} + h)_{s=0} = 0, \\ (D_{(U^\pm, V^\pm)} g)|_{s=0} &= D_{(U^\pm, V^\pm)}(\mathcal{F} + h)|_{s=0} \\ &= -\epsilon^3 \left((\pm 2\epsilon, 1 + 2\epsilon^2, 0), \pm \epsilon \hat{e}_2^\top, \pm \epsilon \hat{e}_3^\top, 0 \right) \\ &\in \mathbb{R}^{1 \times 12}. \end{aligned}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Bloques asociados a la ley cinética:
 $\sigma = 0$ en los pozos:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1^+ & -\underline{U}_1^- \\ 0 & \end{pmatrix} = 2\epsilon \begin{pmatrix} \hat{e}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$$

De las expresiones de $B_j^{i\pm}$:

$$\begin{aligned} (D_{(U^+, V^+)} g)|_{s=0} \mathcal{K}_+(\lambda, \tilde{\xi}) &= \epsilon(0, \hat{e}_2^\top) \in \mathbb{R}^{1 \times 6}, \\ (D_{(U^-, V^-)} g)|_{s=0} \mathcal{K}_-(\lambda, \tilde{\xi}) &= \epsilon(0, \hat{e}_2^\top) \in \mathbb{R}^{1 \times 6} \end{aligned}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Bloques asociados a la ley cinética:

$\sigma = 0$ en los pozos:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1^+ & -\underline{U}_1^- \\ 0 & \end{pmatrix} = 2\epsilon \begin{pmatrix} \hat{e}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$$

De las expresiones de $B_j^{i\pm}$:

$$\begin{aligned} (D_{(U^+, V^+)} g)|_{s=0} \mathcal{K}_+(\lambda, \tilde{\xi}) &= \epsilon(0, \hat{e}_2^\top) \in \mathbb{R}^{1 \times 6}, \\ (D_{(U^-, V^-)} g)|_{s=0} \mathcal{K}_-(\lambda, \tilde{\xi}) &= \epsilon(0, \hat{e}_2^\top) \in \mathbb{R}^{1 \times 6} \end{aligned}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Usando la simetría de la configuración:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Pi^2 = I.$$

$$\Pi \mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}) \Pi = \mathcal{N}_-(-\mu, \tilde{\xi})$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}$ y $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^2$.

$$Y \in \ker(\mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I) \implies \Pi Y \in \ker(\mathcal{N}_-(-\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I),$$

Por lo tanto:

$$\mu_-^s = -\mu_+^u$$

Basta con calcular las frecuencias inestables μ_+^u en el estado $U = \underline{U}^+$.

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & -\Pi \end{pmatrix}, \quad \Lambda^2 = I,$$

$$\Lambda \mathbb{M}_+(\lambda, \tilde{\xi}) \Lambda = -\mathbb{M}_-(\lambda, \tilde{\xi}),$$

para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$.

$$\hat{R}_-^s := \Lambda \hat{R}_+^u,$$

Basta con calcular el espacio invariante $\hat{R}_+^u$.

Usando la “homogeneidad” de Δ (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) = \Theta(\rho)\Delta(\rho\lambda, \rho\tilde{\xi}),$$

Θ - factor continuo tal que $|\Theta(\pm 1)| = 1$, $\Theta(\rho) \neq 0$.

Normalizando $\lambda \rightarrow \lambda/|\tilde{\xi}|$, $\tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}/|\tilde{\xi}|$ podemos restringir los cálculos a $|\tilde{\xi}| = 1$, $\text{Re } \lambda \geq 0$; parametrizar en coordenadas polares

$$\tilde{\xi} = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) := \mathcal{N}_+(\mu, e^{i\varphi})$$

$$\mathcal{N}_+(-\mu, -\tilde{\xi}) = \mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}), \quad \tilde{\mathcal{N}}_+(-\mu, -\varphi) = \tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi)$$

Basta con tomar $\tilde{\xi} = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Usando la “homogeneidad” de Δ (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) = \Theta(\rho) \Delta(\rho\lambda, \rho\tilde{\xi}),$$

Θ - factor continuo tal que $|\Theta(\pm 1)| = 1$, $\Theta(\rho) \neq 0$.

Normalizando $\lambda \rightarrow \lambda/|\tilde{\xi}|$, $\tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}/|\tilde{\xi}|$ podemos restringir los cálculos a $|\tilde{\xi}| = 1$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$; parametrizar en coordenadas polares

$$\tilde{\xi} = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) := \mathcal{N}_+(\mu, e^{i\varphi})$$

$$\mathcal{N}_+(-\mu, -\tilde{\xi}) = \mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}), \quad \tilde{\mathcal{N}}_+(-\mu, -\varphi) = \tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi)$$

Basta con tomar $\tilde{\xi} = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

En resumen:

$$\Delta(\lambda, e^{i\varphi}) = \det \begin{pmatrix} \Lambda \hat{R}_+^u & \hat{Q} & \hat{R}_+^u \\ -\hat{p} & \hat{q} & \hat{p} \end{pmatrix},$$

$$(\lambda, \varphi) \in \{\operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

con

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= 2\epsilon \begin{pmatrix} \hat{e}_2 \\ 0 \end{pmatrix} && \in \mathbb{R}^{6 \times 1}, \\ \hat{q} &= -\lambda(D_s h)|_{s=0} && \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \\ \hat{p} &= \epsilon(0, \hat{e}_2^\top) \hat{R}_+^u(\lambda, \varphi) && \in \mathbb{C}^{1 \times 3}, \\ \Lambda &= \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1, 1, 1) && \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ &\hat{R}_+^u(\lambda, \varphi) && \in \mathbb{C}^{6 \times 3}. \end{aligned}$$

En resumen:

$$\Delta(\lambda, e^{i\varphi}) = \det \begin{pmatrix} \Lambda \hat{R}_+^u & \hat{Q} & \hat{R}_+^u \\ -\hat{p} & \hat{q} & \hat{p} \end{pmatrix},$$

$$(\lambda, \varphi) \in \{\operatorname{Re} \lambda \geq 0\} \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

con

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= 2\epsilon \begin{pmatrix} \hat{e}_2 \\ 0 \end{pmatrix} && \in \mathbb{R}^{6 \times 1}, \\ \hat{q} &= -\lambda(D_s h)|_{s=0} && \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \\ \hat{p} &= \epsilon(0, \hat{e}_2^\top) \hat{R}_+^u(\lambda, \varphi) && \in \mathbb{C}^{1 \times 3}, \\ \Lambda &= \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1, 1, 1) && \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ &\hat{R}_+^u(\lambda, \varphi) && \in \mathbb{C}^{6 \times 3}. \end{aligned}$$

Estabilidad “unidimensional”: $\Delta(\lambda, 0) \neq 0$

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Sea $(\lambda, 0) \in \mathcal{S}$ con $\tilde{\xi} = 0$, es decir, $|\lambda| = 1$. Entonces,

Ley de Maxwell:

$$\Delta_0(\lambda, 0) = C\lambda^4 \neq 0, \quad C \neq 0$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Ley cinética de Abeyaratne-Knowles (con $(d/ds)h|_{s=0} < 0$):

$$\Delta(\lambda, 0) = C_1(C_2 - ((d/ds)h|_{s=0})C_3)\lambda^4 = \bar{C}\lambda^4 \neq 0, \quad \bar{C} \neq 0$$

Estabilidad “unidimensional”: $\Delta(\lambda, 0) \neq 0$

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Sea $(\lambda, 0) \in \mathcal{S}$ con $\tilde{\xi} = 0$, es decir, $|\lambda| = 1$. Entonces,

Ley de Maxwell:

$$\Delta_0(\lambda, 0) = C\lambda^4 \neq 0, \quad C \neq 0$$

Ley cinética de Abeyaratne-Knowles (con $(d/ds)h|_{s=0} < 0$):

$$\Delta(\lambda, 0) = C_1(C_2 - ((d/ds)h|_{s=0})C_3)\lambda^4 = \bar{C}\lambda^4 \neq 0, \quad \bar{C} \neq 0$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Reducción por menores

$\hat{R}_+^u$ = representación válida del subespacio inestable de $\mathbb{M}_+$.

Sea

$$\hat{R}_+^u =: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

donde y_j y z_j son vectores renglón en $\mathbb{C}^{1 \times 3}$, funciones de $(\lambda, \tilde{\xi})$.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Por operaciones elementales:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_1 \\ -y_2 & 2\epsilon & y_2 \\ -y_3 & 0 & y_3 \\ -z_1 & 0 & z_1 \\ z_2 & 0 & z_2 \\ z_3 & 0 & z_3 \\ -\epsilon z_2 & -\lambda(D_s h) & \epsilon z_2 \end{vmatrix} \\
 &= 16\epsilon^2 \begin{vmatrix} y_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} + 8\lambda(D_s h) \begin{vmatrix} y_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 \\ z_1 \\ y_2 \end{vmatrix} \\
 &=: D_{(0)}(16\epsilon^2 D_{(1)} + 8\lambda(D_s h) D_{(2)}) \quad (**)
 \end{aligned}$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

El índice de la curva y estabilidad

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Familia de mapeos:

$$\lambda \mapsto \bar{\Delta}(\cdot, \varphi) \quad \varphi \in [0, \pi/2];$$

en un contorno cerrado

$$\lambda \in \mathcal{C}_\rho := \mathcal{C}_\rho^+ \cup \mathcal{C}_\rho^0,$$

$$\mathcal{C}_\rho^+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \rho, \operatorname{Re} \lambda > 0\},$$

$$\mathcal{C}_\rho^0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = i\tau, \tau \in [-\rho, +\rho]\}, \quad \rho > 0.$$

Dado que

$$|\lambda| \gg 1, \quad \Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \sim \Delta(1, 0) \neq 0,$$

basta con tomar contornos $\mathcal{C}_\rho$ con $\rho > 0$ finita.

Por la fórmula del producto para el grado de un mapeo (DEIMLING, *Nonlinear Funct. Anal.*, Springer 1985) el índice de la curva con respecto al cero determina la estabilidad de la configuración.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

El índice de la curva y estabilidad

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Familia de mapeos:

$$\lambda \mapsto \bar{\Delta}(\cdot, \varphi) \quad \varphi \in [0, \pi/2];$$

en un contorno cerrado

$$\lambda \in \mathcal{C}_\rho := \mathcal{C}_\rho^+ \cup \mathcal{C}_\rho^0,$$

$$\mathcal{C}_\rho^+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \rho, \operatorname{Re} \lambda > 0\},$$

$$\mathcal{C}_\rho^0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = i\tau, \tau \in [-\rho, +\rho]\}, \quad \rho > 0.$$

Dado que

$$|\lambda| \gg 1, \quad \Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \sim \Delta(1, 0) \neq 0,$$

basta con tomar contornos $\mathcal{C}_\rho$ con $\rho > 0$ finita.

Por la fórmula del producto para el grado de un mapeo
([DEIMLING](#), *Nonlinear Funct. Anal.*, Springer 1985) el índice
de la curva con respecto al cero determina la estabilidad de la
configuración.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Cálculo de las frecuencias de Lopatinski:

$$\pi_+(\mu) = \det(\mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I) = \sum_{j=0}^6 a_j \mu^j,$$

donde

$$a_6 = 2\epsilon^6 > 0,$$

$$a_5 = 0,$$

$$a_4 = \lambda^2 \epsilon^4 (2\epsilon^2 + 5) + 6\epsilon^6 |\tilde{\xi}|^2,$$

$$a_3 = 2\epsilon^5 \xi_2 \lambda,$$

$$a_2 = 2\lambda^4 \epsilon^3 (2 + \epsilon^2) + \lambda^2 \epsilon^4 ((10 + 3\epsilon^2) |\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2 \xi_3^2) + 6\epsilon^6 |\tilde{\xi}|^4,$$

$$a_1 = 2\lambda^2 \epsilon^3 \xi_2 (\lambda^2 + \epsilon^2 |\tilde{\xi}|^2),$$

$$a_0 = \lambda^6 + \lambda^4 \epsilon^2 |\tilde{\xi}|^2 (4 + \epsilon^2) + \lambda^2 \epsilon^4 |\tilde{\xi}|^2 ((5 + \epsilon^2) |\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2 \xi_3^2) + 2\epsilon^6 |\tilde{\xi}|^6.$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Cálculo de las frecuencias de Lopatinski:

$$\pi_+(\mu) = \det(\mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I) = \sum_{j=0}^6 a_j \mu^j,$$

donde

$$a_6 = 2\epsilon^6 > 0,$$

$$a_5 = 0,$$

$$a_4 = \lambda^2 \epsilon^4 (2\epsilon^2 + 5) + 6\epsilon^6 |\tilde{\xi}|^2,$$

$$a_3 = 2\epsilon^5 \xi_2 \lambda,$$

$$a_2 = 2\lambda^4 \epsilon^3 (2 + \epsilon^2) + \lambda^2 \epsilon^4 ((10 + 3\epsilon^2) |\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2 \xi_3^2) + 6\epsilon^6 |\tilde{\xi}|^4,$$

$$a_1 = 2\lambda^2 \epsilon^3 \xi_2 (\lambda^2 + \epsilon^2 |\tilde{\xi}|^2),$$

$$a_0 = \lambda^6 + \lambda^4 \epsilon^2 |\tilde{\xi}|^2 (4 + \epsilon^2) + \lambda^2 \epsilon^4 |\tilde{\xi}|^2 ((5 + \epsilon^2) |\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2 \xi_3^2) + 2\epsilon^6 |\tilde{\xi}|^6.$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

i.e. cálculo de los valores propios de

$$\begin{pmatrix} -a_5/a_6 & -a_4/a_6 & -a_3/a_6 & -a_2/a_6 & -a_1/a_6 & -a_0/a_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Standard factorización de Schur.)

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Para $\text{Re } \lambda > 0$:

3 modos estables, $\text{Im } \mu_+^s < 0$,

3 modos inestables, $\text{Im } \mu_+^u > 0$.

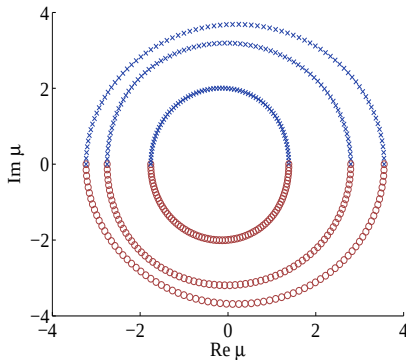


FIG. 4: Modos μ de Lopatinski, $\pi_+(\mu) = 0$, para $(\lambda, \tilde{\xi}) = ((3/2)e^{i\theta}, e^{i\pi/4})$, $\theta \in [0, \pi]$.

Para $\text{Re } \lambda = 0$. Método perturbativo, $\lambda = i\tau + \delta$, $\delta \rightarrow 0^+$.

Para cada $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$:

3 modos estables/neutralmente estables (límite de un modo estable),

3 modos inestables/neutralmente inestables (límite de un modo inestable).

Puntos rama: valores de λ en los que los modos pasan de neutro a estable/inestable.

Para $\text{Re } \lambda = 0$. Método perturbativo, $\lambda = i\tau + \delta$, $\delta \rightarrow 0^+$.

Para cada $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$:

3 modos estables/neutralmente estables (límite de un modo estable),

3 modos inestables/neutralmente inestables (límite de un modo inestable).

Puntos rama: valores de λ en los que los modos pasan de neutro a estable/inestable.

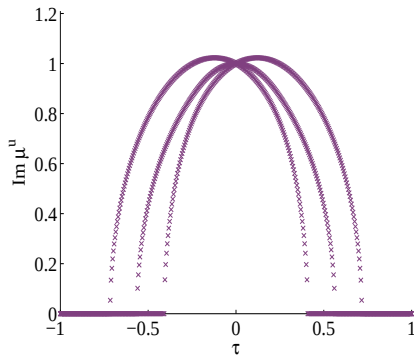


FIG. 5: Parte imaginaria de μ_+^u para $(\lambda, \tilde{\xi}) = (i\tau, e^{i\pi/4})$, $\tau \in [-1, 1]$.

Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- ▶ **Paso 1:** Calcular los 3 modos inestables (para $\text{Re } \lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para $\text{Re } \lambda = 0$), μ_+^u .
- ▶ **Paso 2:** Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- ▶ **Paso 3:** Con $Y \in \ker(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Ensamblando $\hat{\mathbf{R}}^u$

Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- **Paso 1:** Calcular los 3 modos inestables (para $\text{Re } \lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para $\text{Re } \lambda = 0$), μ_+^u .
- Paso 2: Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- Paso 3: Con $Y \in \ker(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Ensamblando $\hat{\mathbf{R}}^u$

Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- **Paso 1:** Calcular los 3 modos inestables (para $\text{Re } \lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para $\text{Re } \lambda = 0$), μ_+^u .
- **Paso 2:** Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- **Paso 3:** Con $Y \in \ker(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Ensamblando $\hat{\mathbf{R}}^u$

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- **Paso 1:** Calcular los 3 modos inestables (para $\text{Re } \lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para $\text{Re } \lambda = 0$), μ_+^u .
- **Paso 2:** Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- **Paso 3:** Con $Y \in \ker(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Ensamblando $\hat{\mathbf{R}}^u$

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

- **Paso 1:** Calcular los 3 modos inestables (para $\text{Re } \lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para $\text{Re } \lambda = 0$), μ_+^u .
- **Paso 2:** Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- **Paso 3:** Con $Y \in \ker(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Normalización :

$$\bar{\Delta} := \frac{\Delta}{-|R|}$$

con

$$|R| := \det(\hat{R}_{-}^s \quad \hat{R}_{+}^u) = \det(\Lambda \hat{R}_{+}^u \quad \hat{R}_{+}^u).$$

Ventajas:

- ▶ Previene “loops” innecesarios: $\Delta \sim \lambda^p$.
- ▶ Previene puntos rama: Si el Δ calculado se desvía de otra representación “admisable” ($\mathbf{R}$ con rango máximo), el denominador $|R|$ se desvía de $\det(R_{-}^s \quad R_{+}^u)$ con rango máximo del mismo modo, y el mismo factor aparece en el numerador y en el denominador, cancelándose.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Normalización :

$$\bar{\Delta} := \frac{\Delta}{-|R|}$$

con

$$|R| := \det(\hat{R}_{-}^s \quad \hat{R}_{+}^u) = \det(\Lambda \hat{R}_{+}^u \quad \hat{R}_{+}^u).$$

Ventajas:

- ▶ Previene “loops” innecesarios: $\Delta \sim \lambda^p$.
- ▶ Previene puntos rama: Si el Δ calculado se desvía de otra representación “admisable” ($\mathbf{R}$ con rango máximo), el denominador $|R|$ se desvía de $\det(R_{-}^s \quad R_{+}^u)$ con rango máximo del mismo modo, y el mismo factor aparece en el numerador y en el denominador, cancelándose.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Normalización :

$$\bar{\Delta} := \frac{\Delta}{-|R|}$$

con

$$|R| := \det(\hat{R}_{-}^s \quad \hat{R}_{+}^u) = \det(\wedge \hat{R}_{+}^u \quad \hat{R}_{+}^u).$$

Ventajas:

- ▶ Previene “loops” innecesarios: $\Delta \sim \lambda^p$.
- ▶ Previene puntos rama: Si el Δ calculado se desvía de otra representación “admisable” ($\mathbf{R}$ con rango máximo), el denominador $|R|$ se desvía de $\det(R_{-}^s \quad R_{+}^u)$ con rango máximo del mismo modo, y el mismo factor aparece en el numerador y en el denominador, cancelándose.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Bajo esta normalización:

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_0 - \lambda(D_s h), \quad (***)$$

donde

$$\bar{\Delta}_0 = -2\epsilon^2 \frac{\begin{vmatrix} y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}} = -2\epsilon^2 \frac{D_{(1)}}{D_{(2)}}.$$

es el determinante de Lopatinski normalizado asociado a la interfase sujeta a la ley de Maxwell.

Todo lo que debemos hacer es calcular $\hat{R}_+^u$, rearreglar sus entradas en los determinantes $D_{(1)}$ y $D_{(2)}$, y evaluar el cociente $\bar{\Delta}_0 = -2\epsilon^2 D_{(1)}/D_{(2)}$.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Bajo esta normalización:

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_0 - \lambda(D_s h), \quad (***)$$

donde

$$\bar{\Delta}_0 = -2\epsilon^2 \frac{\begin{vmatrix} y_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}} = -2\epsilon^2 \frac{D_{(1)}}{D_{(2)}}.$$

es el determinante de Lopatinski normalizado asociado a la interfase sujeta a la ley de Maxwell.

Todo lo que debemos hacer es calcular $\hat{R}_+^u$, rearreglar sus entradas en los determinantes $D_{(1)}$ y $D_{(2)}$, y evaluar el cociente $\bar{\Delta}_0 = -2\epsilon^2 D_{(1)}/D_{(2)}$.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Contenido

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Estabilidad de interfaces subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Evaluación de la función de Lopatinski

**Resultados
numéricos**

Resultados numéricos

Discusión

Discusión

Relaciones cinéticas propuestas por **ABEYARATNE Y KNOWLES** (1990), para procesos irreversibles cerca del equilibrio termodinámico:

$$\mathcal{F} = \frac{s}{M}, \quad M > 0$$

$M > 0$ es un coeficiente de movilidad.

$$h = -s/M, \quad D_s h = -1/M < 0.$$

En el límite $M \rightarrow +\infty$: ley cinética de Maxwell.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Relaciones cinéticas propuestas por **ABEYARATNE Y KNOWLES** (1990), para procesos irreversibles cerca del equilibrio termodinámico:

$$\mathcal{F} = \frac{s}{M}, \quad M > 0$$

$M > 0$ es un coeficiente de movilidad.

$$h = -s/M, \quad D_s h = -1/M < 0.$$

En el límite $M \rightarrow +\infty$: ley cinética de Maxwell.

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Valores de los parámetros:

$\epsilon = 0.5$ — parámetro material,

$\varphi = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ — valores transversales de $\tilde{\xi} = e^{i\varphi}$,

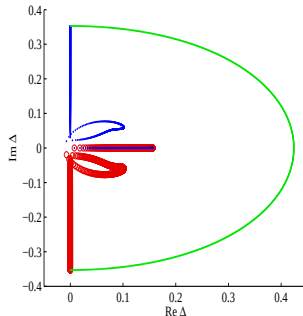
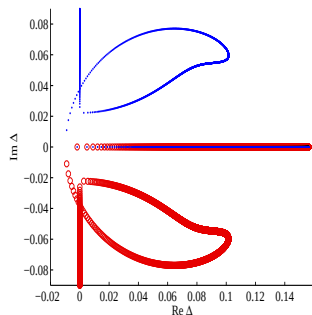
$\rho = 2$ — radio,

$M = +\infty, M = 10$ — ley de Maxwell vs. ley lineal.

Resultados: La relación de Maxwell $M = +\infty$

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza



$$\phi = 0$$

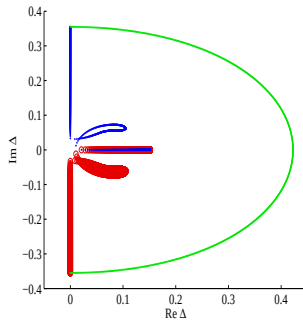
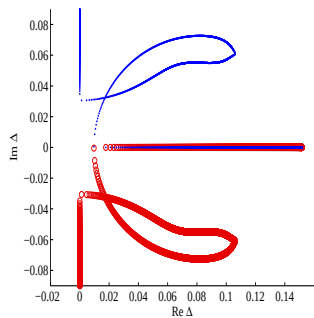
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = \pi/8$$

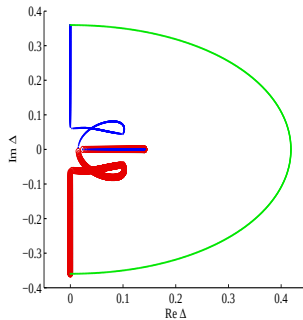
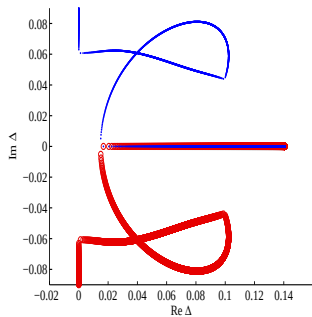
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = \pi/4$$

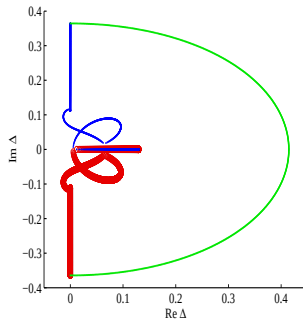
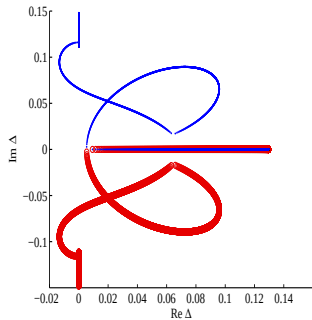
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = 3\pi/8$$

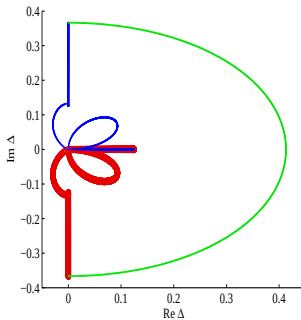
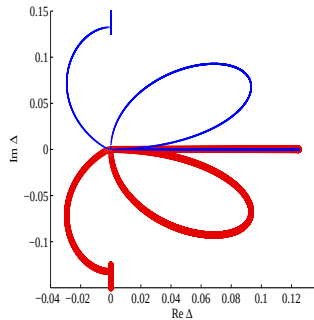
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = \pi/2$$

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

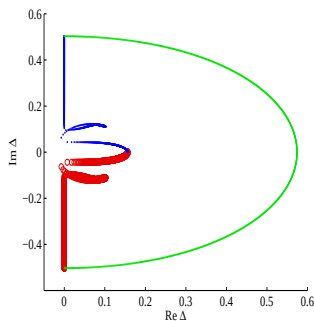
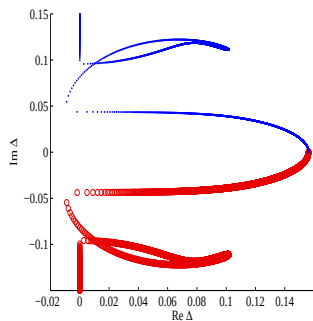
Discusión

Resultados: Relaciones cinéticas lineales con $0 < M < +\infty$

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Ejemplo: $M = 10$



$$\phi = 0$$

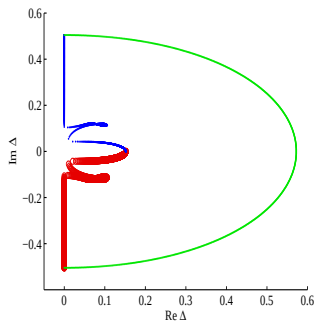
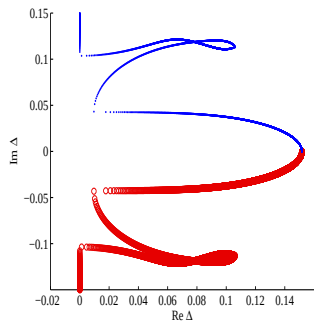
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = \pi/8$$

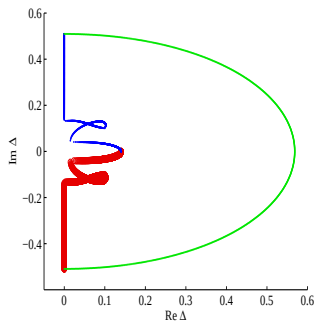
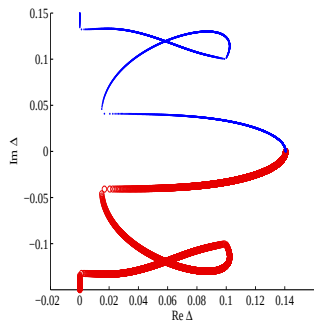
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = \pi/4$$

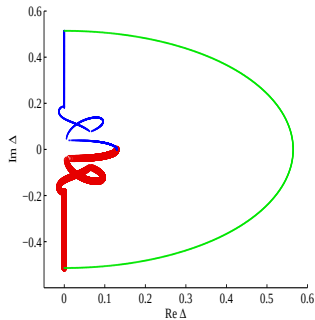
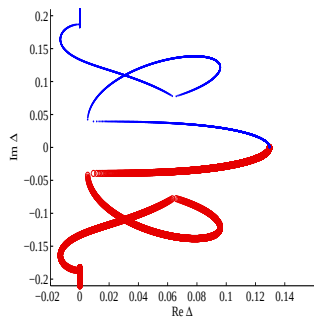
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = 3\pi/8$$

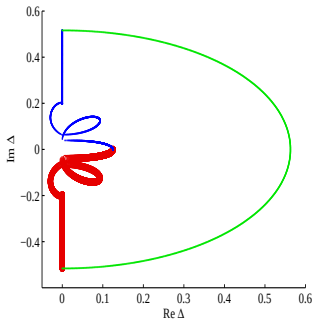
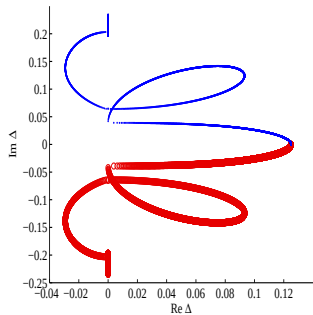
Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión



$$\phi = \pi/2$$

Contenido

Estabilidad
multidimensional
de interfaces
elásticas

Ramón G. Plaza

Introducción

Introducción

Estabilidad de
interfaces
subsónicas planas

Estabilidad de interfaces subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Evaluación de la función de Lopatinski

Resultados
numéricos

Resultados numéricos

Discusión

Discusión

- ▶ Procedimiento directo para calcular la función de Lopatinski reducida para una interfase estática.
Resultados: Estabilidad multidimensional débil bajo la ley cinética de Maxwell (conservación de energía), y estabilidad multidimensional uniforme para leyes cinéticas lineales tipo Abeyaratne y Knowles (disipativas).
- ▶ Resultados numéricos, contraparte de los resultados analíticos de BENZONI-GAVAGE (1998,1999) para un gas de van der Waals.

- ▶ Procedimiento directo para calcular la función de Lopatinski reducida para una interfase estática.
Resultados: Estabilidad multidimensional débil bajo la ley cinética de Maxwell (conservación de energía), y estabilidad multidimensional uniforme para leyes cinéticas lineales tipo Abeyaratne y Knowles (disipativas).
- ▶ Resultados numéricos, contraparte de los resultados analíticos de **BENZONI-GAVAGE** (1998,1999) para un gas de van der Waals.

- ▶ Ceros de la función de Lopatinski en el eje imaginario con la ley de Maxwell: ondas superficiales?
- ▶ Metodología puede servir para estudiar otras energías (ERICKSEN-JAMES, ABEYARATNE-CHU-JAMES, etc.) y otras relaciones cinéticas.
- ▶ Posible estudio de relaciones cinéticas que dependan de orientación (i.e. de ν ROSAKIS Y TSAI, 1997; o de stress interfacial, GURTIN Y STRUTHERS, 1990).
- ▶ Metodología se aplica a relaciones cinéticas *regulares*, i.e. continuamente diferenciables. No contempla relaciones discontinuas (ABEYARATNE Y KNOWLES, 2006) como *máximalmente disipativas*, “*lattice trapping*”, etc.

- ▶ Ceros de la función de Lopatinski en el eje imaginario con la ley de Maxwell: ondas superficiales?
- ▶ Metodología puede servir para estudiar otras energías (ERICKSEN-JAMES, ABEYARATNE-CHU-JAMES, etc.) y otras relaciones cinéticas.
- ▶ Posible estudio de relaciones cinéticas que dependan de orientación (i.e. de ν ROSAKIS Y TSAI, 1997; o de stress interfacial, GURTIN Y STRUTHERS, 1990).
- ▶ Metodología se aplica a relaciones cinéticas *regulares*, i.e. continuamente diferenciables. No contempla relaciones discontinuas (ABEYARATNE Y KNOWLES, 2006) como *máximalmente disipativas*, “*lattice trapping*”, etc.

- ▶ Ceros de la función de Lopatinski en el eje imaginario con la ley de Maxwell: ondas superficiales?
- ▶ Metodología puede servir para estudiar otras energías (ERICKSEN-JAMES, ABEYARATNE-CHU-JAMES, etc.) y otras relaciones cinéticas.
- ▶ Posible estudio de relaciones cinéticas que dependan de orientación (i.e. de ν ROSAKIS Y TSAI, 1997; o de stress interfacial, GURTIN Y STRUTHERS, 1990).
- ▶ Metodología se aplica a relaciones cinéticas *regulares*, i.e. continuamente diferenciables. No contempla relaciones discontinuas (ABEYARATNE Y KNOWLES, 2006) como *máximalmente disipativas*, “*lattice trapping*”, etc.

- ▶ Ceros de la función de Lopatinski en el eje imaginario con la ley de Maxwell: ondas superficiales?
- ▶ Metodología puede servir para estudiar otras energías (ERICKSEN-JAMES, ABEYARATNE-CHU-JAMES, etc.) y otras relaciones cinéticas.
- ▶ Posible estudio de relaciones cinéticas que dependan de orientación (i.e. de ν ROSAKIS Y TSAI, 1997; o de stress interfacial, GURTIN Y STRUTHERS, 1990).
- ▶ Metodología se aplica a relaciones cinéticas *regulares*, i.e. continuamente diferenciables. No contempla relaciones discontinuas (ABEYARATNE Y KNOWLES, 2006) como *máximalmente disipativas*, “*lattice trapping*”, etc.

Introducción

Estabilidad de
interfases
subsónicas planas

Evaluación de la
función de
Lopatinski

Resultados
numéricos

Discusión

Gracias.