Sistemas hiperbólicos con valores iniciales y de frontera: aplicaciones a la estabilidad de ondas de choque no viscosas

Ramón G. Plaza

IIMAS - UNAM (México)

Seminario de Análisis y Ecuaciones Diferenciales
Instituto de Matemáticas, UNAM
10 de septiembre, 2009.

Sistemas hiperbólicos

Varias dimensiones espaciales, coeficientes constantes. Valores iniciales y de frontera:

$$
\begin{aligned}
u_t + \sum_{j=1}^{d} A_j u_{x_j} = f, &\qquad (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty),\\
u(x,0) = u_0, &\qquad x \in \Omega,\\
Bu = g, &\qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,+\infty).
\end{aligned}
$$

$$u \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 2,\ t \in [0,+\infty),$$

$$A_j \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{\alpha\times n}$$

$$\Omega = \{x_1 \geq 0\}, \quad \partial\Omega = \{x_1 = 0\}$$

Sistemas hiperbólicos

Varias dimensiones espaciales, coeficientes constantes. Valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^{d} A_j u_{x_j} &= f, \qquad && (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty), \\ u(x,0) &= u_0, && x \in \Omega, \\ Bu &= g, && (x,t) \in \partial\Omega \times [0,+\infty). \end{aligned}$$

$$u \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 2,\ t \in [0,+\infty),$$

$$A_j \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{\alpha\times n}$$

$$\Omega = \{x_1 \geq 0\}, \quad \partial\Omega = \{x_1 = 0\}$$

Hiperbolicidad:

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j$$

diagonalizable con valores propios reales.

- *Hiperbolicidad estricta :* Para $\xi \neq 0$ las multiplicidades de los valores propios no dependen de ξ.
- *Simetrizabilidad :* Existe $A_0 > 0$, simétrica, tal que $A_0 A_j$ son simétricas.

Sin pérdida de generalidad:

$$A_j \quad \text{simétricas.}$$

Hiperbolicidad:

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j$$

diagonalizable con valores propios reales.

- *Hiperbolicidad estricta :* Para $\xi \neq 0$ las multiplicidades de los valores propios no dependen de ξ.
- *Simetrizabilidad :* Existe $A_0 > 0$, simétrica, tal que $A_0 A_j$ son simétricas.

Sin pérdida de generalidad:

$$A_j \quad \text{simétricas.}$$

Hiperbolicidad:

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j$$

diagonalizable con valores propios reales.

- *Hiperbolicidad estricta :* Para $\xi \neq 0$ las multiplicidades de los valores propios no dependen de ξ.
- *Simetrizabilidad :* Existe $A_0 > 0$, simétrica, tal que $A_0 A_j$ son simétricas.

Sin pérdida de generalidad:

$$A_j \;\; \text{simétricas.}$$

La frontera $\partial\Omega$ es no característica: normal $\nu = \hat{e}_1$, i.e.

$$A_1 \quad \text{es no singular}$$

Valores propios de A_1

$$a_1 \leq \ldots \leq a_{n-\alpha} < 0 < a_{n-\alpha+1} \leq \ldots \leq a_n.$$

$0 < \alpha =$ suma de las multiplicidades de los valores propios *positivos* de A_1.

$$\alpha = \text{número de características } \textit{incidentes}.$$

$$\text{Dimensiones de } B \in \mathbb{R}^{\alpha \times n}.$$

La frontera $\partial\Omega$ es no característica: normal $\nu = \hat{e}_1$, i.e.

$$A_1 \;\text{ es no singular}$$

Valores propios de A_1

$$a_1 \leq \ldots \leq a_{n-\alpha} < 0 < a_{n-\alpha+1} \leq \ldots \leq a_n.$$

$0 < \alpha =$ suma de las multiplicidades de los valores propios *positivos* de A_1.

$$\alpha = \text{número de características } \textit{incidentes}.$$

$$\text{Dimensiones de } B \in \mathbb{R}^{\alpha\times n}.$$

La frontera $\partial\Omega$ es no característica: normal $\nu = \hat{e}_1$, i.e.

$$A_1 \quad \text{es no singular}$$

Valores propios de A_1

$$a_1 \leq \ldots \leq a_{n-\alpha} < 0 < a_{n-\alpha+1} \leq \ldots \leq a_n.$$

$0 < \alpha =$ suma de las multiplicidades de los valores propios *positivos* de A_1.

$$\alpha = \text{número de características } \textit{incidentes}.$$

$$\text{Dimensiones de } B \in \mathbb{R}^{\alpha \times n}.$$

Estimación de energía

Problema bien planteado:

$$\|u\|_{\Omega\times[0,T]} + \|u\|_{\partial\Omega\times[0,T]} + \|u(T)\|_{\Omega} \leq$$
$$\leq C\Big(\|u_0\|_{\Omega} + \|f\|_{\Omega\times[0,T]} + \|g\|_{\partial\Omega\times[0,T]}\Big)$$

$T > 0$, $\eta > 0$ grande, $C > 0$ uniforme.

Normas hiperbólicas pesadas:

$$\|u\|_{s,\eta,G} = \|e^{-\eta t} u\|_{H^s(G)}$$

$$\|u\|^2_{0,\eta,\Omega\times[0,T]} = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2 e^{-2\eta t}\, dxdt$$

$$\|u(T)\|^2_{0,\eta,\Omega} = \int_\Omega |u(x,T)|^2 e^{-2\eta T}\, dx$$

Comentario:

La condición de frontera es *estrictamente disipativa* si para todo $w \in \mathbb{R}^n$ existe $\delta > 0$ uniforme tal que

$$-\langle w, A_1 w\rangle \geq \delta |w|^2 - \frac{1}{\delta}|Bw|^2.$$

Resultado (FRIEDRICHS, circa 1954): Si la frontera es estrictamente disipativa es posible obtener una estimación de energía.

Problema: La condición es muy restrictiva. Para un fluído compresible existen condiciones de frontera no estrictamente disipativas para las cuales es posible obtener un problema bien planteado (AGEMI, Comm. PDE (1980)).

Comentario:
La condición de frontera es *estrictamente disipativa* si para todo $w \in \mathbb{R}^n$ existe $\delta > 0$ uniforme tal que

$$-\langle w, A_1 w \rangle \geq \delta |w|^2 - \frac{1}{\delta} |Bw|^2.$$

Resultado (FRIEDRICHS, circa 1954): Si la frontera es estrictamente disipativa es posible obtener una estimación de energía.

Problema: La condición es muy restrictiva. Para un fluído compresible existen condiciones de frontera no estrictamente disipativas para las cuales es posible obtener un problema bien planteado (AGEMI, Comm. PDE (1980)).

Comentario:
La condición de frontera es *estrictamente disipativa* si para todo $w \in \mathbb{R}^n$ existe $\delta > 0$ uniforme tal que

$$-\langle w, A_1 w \rangle \geq \delta |w|^2 - \frac{1}{\delta} |Bw|^2.$$

Resultado (FRIEDRICHS, circa 1954): Si la frontera es estrictamente disipativa es posible obtener una estimación de energía.

Problema: La condición es muy restrictiva. Para un fluído compresible existen condiciones de frontera no estrictamente disipativas para las cuales es posible obtener un problema bien planteado (AGEMI, Comm. PDE (1980)).

Transformada de Fourier-Laplace:

$$(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad \tilde{\xi} = (\xi_2, \ldots, \xi_d),$$

$$\hat{u}(x_1, \tilde{\xi}, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-i\langle \tilde{x}, \tilde{\xi} \rangle} u(x_1, \tilde{x}, t)\, dt d\tilde{x}$$

Caso $f = g = 0$:

$$\hat{u}_{x_1} = -(A_1)^{-1}(\lambda + \sum_{j \neq 1} i\xi_j A_j)\hat{u} =: \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})\hat{u}$$

$$B\hat{u}_{|x_1=0} = 0, \quad \hat{}(u_{t=0}) = \hat{u}_0,$$

Transformada de Fourier-Laplace:

$$(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad \tilde{\xi} = (\xi_2, \ldots, \xi_d),$$

$$\hat{u}(x_1, \tilde{\xi}, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-i\langle \tilde{x}, \tilde{\xi} \rangle} u(x_1, \tilde{x}, t)\, dt d\tilde{x}$$

Caso $f = g = 0$:

$$\hat{u}_{x_1} = -(A_1)^{-1} \big(\lambda + \sum_{j \neq 1} i\xi_j A_j\big) \hat{u} =: \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi}) \hat{u}$$

$$B\hat{u}_{|x_1=0} = 0, \quad \hat{}(u_{t=0}) = \hat{u}_0,$$

Lema (HERSH, 1963). Asumiendo hiperbolicidad, para toda $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$, las matrices $\mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})$ son hiperbólicas (valores propios κ con $\mathrm{Re}\,\kappa \neq 0$). Más aún, $\alpha =$ no. de valores propios de $\mathcal{A}$ con $\mathrm{Re}\,\kappa > 0$.

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{E}^s(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{E}^u(\mathcal{A}),$$

$$\dim \mathbb{E}^s(\mathcal{A}) = \alpha,$$

$$(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+ = \{(\lambda, \tilde{\xi}) \neq (0,0),\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$$

Lema (HERSH, 1963). Asumiendo hiperbolicidad, para toda $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$, las matrices $\mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})$ son hiperbólicas (valores propios κ con $\mathrm{Re}\,\kappa \neq 0$). Más aún, $\alpha =$ no. de valores propios de $\mathcal{A}$ con $\mathrm{Re}\,\kappa > 0$.

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{E}^s(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{E}^u(\mathcal{A}),$$

$$\dim \mathbb{E}^s(\mathcal{A}) = \alpha,$$

$$(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+ = \{(\lambda, \tilde{\xi}) \neq (0,0),\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$$

Soluciones a

$$W' = \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})W$$

$$W = \begin{cases} e^{\kappa(\lambda,\tilde{\xi})x_1} r(\lambda, \tilde{\xi}), \\ e^{\kappa(\lambda,\tilde{\xi})x_1} P(x_1, \lambda, \tilde{\xi}) \end{cases}$$

$(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$ existen exactamente α soluciones W_j que decaen a cero si $x_1 \to +\infty$.

Soluciones a

$$W' = \mathcal{A}(\lambda, \tilde{\xi})W$$

$$W = \begin{cases} e^{\kappa(\lambda,\tilde{\xi})x_1} r(\lambda, \tilde{\xi}), \\ e^{\kappa(\lambda,\tilde{\xi})x_1} P(x_1, \lambda, \tilde{\xi}) \end{cases}$$

$(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$ existen exactamente α soluciones W_j que decaen a cero si $x_1 \to +\infty$.

Modos normales:
Soluciones de la forma

$$u_{\beta,\theta} = \chi(\tilde{x}/\theta)W(\beta x_1)e^{\beta\lambda t + i\beta\tilde{\xi}\cdot\tilde{x}}$$

con $W(0) \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$, $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$, $W(+\infty) = 0$, χ es una función cut-off, $\chi = 0$ en $|y| \geq 2$, $\chi = 1$ en $|y| \leq 1$, *violan la estimación de energía.*

Condición débil de Lopatinski

Condición necesaria:

Para todo Re > 0, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$ la restricción de B a $\mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ es inyectiva.

Determinante de Lopatinski:

$$v \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) \;\Rightarrow\; v = \sum_{1}^{\alpha} c_j v_j,$$

$$Bv = B(v_1, \ldots, v_\alpha) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\alpha \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; v = 0,$$

$$\text{ssi} \quad \Delta(\lambda, \tilde{\xi}) := \det BR^s(\lambda, \tilde{\xi}) \neq 0.$$

Condición débil de Lopatinski

Condición necesaria:
Para todo Re > 0, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d-1}$ la restricción de B a $\mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ es inyectiva.

Determinante de Lopatinski:

$$v \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi}) \;\Rightarrow\; v = \sum_1^{\alpha} c_j v_j,$$

$$Bv = B(v_1, \ldots, v_\alpha) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\alpha \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; v = 0,$$

ssi $\quad \Delta(\lambda, \tilde{\xi}) := \det BR^s(\lambda, \tilde{\xi}) \neq 0.$

Condición suficiente: condición uniforme de Kreiss-Lopatinski

¿Qué condiciones de frontera garantizan un problema bien planteado?

H. O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277-298)

Condición uniforme de Lopatinski

Existe > 0 tal que $|Bv|^2 \geq C|v|^2$ para todo $v \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$, $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$.

Condición suficiente: condición uniforme de Kreiss-Lopatinski

¿Qué condiciones de frontera garantizan un problema bien planteado?

H. O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277-298)

Condición uniforme de Lopatinski

Existe > 0 tal que $|Bv|^2 \geq C|v|^2$ para todo $v \in \mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$, $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$.

Condición uniforme:

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \neq 0, \quad (\lambda\tilde{\xi}) \in \mathcal{S}.$$

$$\mathcal{S} = \{|\lambda|^2 + |\tilde{\xi}|^2 = 1, \; \text{Re}\, \lambda \geq 0\}$$

$\mathcal{A}$ homogénea de grado cero $\Rightarrow \mathbb{E}^{s,u}(\rho\lambda, \rho\tilde{\xi}) = \mathbb{E}^{s,u}(\lambda, \tilde{\xi}), \, \rho > 0.$

Condición uniforme:

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \neq 0, \quad (\lambda\tilde{\xi}) \in \mathcal{S}.$$

$$\mathcal{S} = \{|\lambda|^2 + |\tilde{\xi}|^2 = 1, \ \mathrm{Re}\ \lambda \geq 0\}$$

$\mathcal{A}$ homogénea de grado cero $\Rightarrow \ \mathbb{E}^{s,u}(\rho\lambda, \rho\tilde{\xi}) = \mathbb{E}^{s,u}(\lambda, \tilde{\xi}), \ \rho > 0.$

Propiedades:

- La base de $\mathbb{E}^s(\lambda, \tilde{\xi})$ se puede escoger analítica en $(\lambda, \tilde{\xi})$ para $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, homogénea de grado cero (KATO).
- Si $\mathrm{Re}\,\lambda \to 0$, la base se puede escoger continua en $(\lambda, \tilde{\xi}) = (i\tau, \tilde{\xi}) \neq (0, 0)$.
- Δ es continua en $\mathcal{S}$, analítica en $\mathcal{S}_+$.

Teoría de Kreiss

Sistemas estrictamente hiperbólicos satisfacen la *condición de estructura de bloque:* existe transformación O, invertible tal que

$$O^{-1}\mathcal{A}O = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} N_{11} & \\ & N_{12} \end{pmatrix}, \quad N_{12} \geq \delta > 0, \;\; N_{11} \leq -\delta > 0,$$

$$M_j = i(k_j I + C_j) + E_j(\lambda, \tilde{\xi}),$$

donde C_j nilpotente, $E_j(i\tau, 0) = 0$, k_j escalar.

Asumiendo la estructura de bloque y la condición unforme de Lopatinski se construye el *simetrizador de Kreiss:* $\hat{\mathcal{K}}(\lambda, \tilde{\xi})$ Re $\lambda = \eta \geq \eta_0 > 0$, $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$, tal que

- $\hat{\mathcal{K}} A_1$ es Hermitiana.
- $\hat{\mathcal{K}}$ uniformemente acotado, suave en $\mathcal{S}$ y en los coeficientes de A_j, B.
- $w^* \hat{\mathcal{K}} A_1 w \geq \delta_1 |w|^2 - \frac{1}{\delta_1} |Bw|^2$, para todo $w \in \mathbb{C}^n$.
- Re $\hat{\mathcal{K}}(\lambda + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_j) \geq \delta_2 \eta$

$\delta_1, \delta_2 > 0$ uniformes.

Asumiendo la estructura de bloque y la condición unforme de Lopatinski se construye el *simetrizador de Kreiss:* $\hat{\mathcal{K}}(\lambda, \tilde{\xi})$ Re $\lambda = \eta \geq \eta_0 > 0$, $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$, tal que

- $\hat{\mathcal{K}} A_1$ es Hermitiana.
- $\hat{\mathcal{K}}$ uniformemente acotado, suave en $\mathcal{S}$ y en los coeficientes de A_j, B.
- $w^* \hat{\mathcal{K}} A_1 w \geq \delta_1 |w|^2 - \frac{1}{\delta_1} |Bw|^2$, para todo $w \in \mathbb{C}^n$.
- Re $\hat{\mathcal{K}}(\lambda + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_j) \geq \delta_2 \eta$

$\delta_1, \delta_2 > 0$ uniformes.

Asumiendo la estructura de bloque y la condición unforme de Lopatinski se construye el *simetrizador de Kreiss:* $\hat{\mathcal{K}}(\lambda, \tilde{\xi})$ Re $\lambda = \eta \geq \eta_0 > 0$, $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$, tal que

- $\hat{\mathcal{K}} A_1$ es Hermitiana.
- $\hat{\mathcal{K}}$ uniformemente acotado, suave en $\mathcal{S}$ y en los coeficientes de A_j, B.
- $w^* \hat{\mathcal{K}} A_1 w \geq \delta_1 |w|^2 - \frac{1}{\delta_1} |Bw|^2$, para todo $w \in \mathbb{C}^n$.
- Re $\hat{\mathcal{K}}(\lambda + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_j) \geq \delta_2 \eta$

$\delta_1, \delta_2 > 0$ uniformes.

Asumiendo la estructura de bloque y la condición unforme de Lopatinski se construye el *simetrizador de Kreiss:* $\hat{\mathcal{K}}(\lambda, \tilde{\xi})$
Re $\lambda = \eta \geq \eta_0 > 0$, $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}_+$, tal que

- $\hat{\mathcal{K}} A_1$ es Hermitiana.
- $\hat{\mathcal{K}}$ uniformemente acotado, suave en $\mathcal{S}$ y en los coeficientes de A_j, B.
- $w^* \hat{\mathcal{K}} A_1 w \geq \delta_1 |w|^2 - \frac{1}{\delta_1} |Bw|^2$, para todo $w \in \mathbb{C}^n$.
- Re $\hat{\mathcal{K}}(\lambda + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_j) \geq \delta_2 \eta$

$\delta_1, \delta_2 > 0$ uniformes.

Resultados de Kreiss:

- Bajo hiperbolicidad estricta y la condición uniforme de Lopatinski, se construye $\hat{K}$ para $\eta_0 > 0$, $\eta_0 \sim 0$.
- Prueba que la la estimación de energía en el espacio de Fourier con $\hat{\mathcal{K}}$ implica la estimación de energía en el espacio físico (Plancherel).

MAJDA(1983): La condición de estructura de bloque se cumple para las ecuaciones de Euler.
MÉTIVIER(2000): Todo sistema simetrizable satisface la estructura de bloque.

Resultados de Kreiss:

- Bajo hiperbolicidad estricta y la condición uniforme de Lopatinski, se construye $\hat{K}$ para $\eta_0 > 0$, $\eta_0 \sim 0$.
- Prueba que la la estimación de energía en el espacio de Fourier con $\hat{\mathcal{K}}$ implica la estimación de energía en el espacio físico (Plancherel).

MAJDA(1983): La condición de estructura de bloque se cumple para las ecuaciones de Euler.
MÉTIVIER(2000): Todo sistema simetrizable satisface la estructura de bloque.

Bibliografía básica:

- H. O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970)
- J. RAUCH, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972)
- A. MAJDA, S. OSHER, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975)
- R. HIGDON, SIAM Rev. **28** (1986)
- MÉTIVIER, Bull. London Math. **32** (2000)
- BENZONI-GAVAGE, SERRE, Oxford Univ. Press (2007)

Ondas de choque planas

Sistema de leyes de conservación

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0.$$

Simetrizable, hiperbólico. $Df^j = A^j(u)$.

$$A(\xi, u) = \sum \xi_j A(u)$$

tiene valores propios reales $a_1(u;\xi) < \cdots < a_m(u;\xi)$ con multiplicidades fijas μ_j.

Discontinuidad:

$$\Sigma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty) \; ; \; \psi(x,t) = 0\}.$$

Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot:

$$\psi_t[u] + \sum_{j=1}^{d} \psi_{x_j}[f^j(u)] = 0$$

Onda de choque plana:

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+, & \text{if } x \cdot N - st > 0, \\ u^-, & \text{if } x \cdot N - st < 0, \end{cases}$$

$u^+ \neq u^-$ constantes, $|N| \neq 0$. Suponemos $N = \hat{e}_1$.
Condiciones de salto, con $N = \hat{e}_1$:

$$-s[u] + [f^1(u)] = 0.$$

En general, podemos asumir que las condiciones de RH son de la forma:

$$h(\lim{}^+ u, \lim{}^- u, -\psi_t, \nabla_x \psi) = 0.$$

Onda de choque plana:

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+, & \text{if } x \cdot N - st > 0, \\ u^-, & \text{if } x \cdot N - st < 0, \end{cases}$$

$u^+ \neq u^-$ constantes, $|N| \neq 0$. Suponemos $N = \hat{e}_1$.
Condiciones de salto, con $N = \hat{e}_1$:

$$-s[u] + [f^1(u)] = 0.$$

En general, podemos asumir que las condiciones de RH son de la forma:

$$h(\lim{}^+ u, \lim{}^- u, -\psi_t, \nabla_x \psi) = 0.$$

La onda de choque es *no característica:*

Existen dos índices $p, q \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $a_{q-1}(u^-) < s < a_q(u^-)$ y $a_p(u^+) < s < a_{p+1}(u^+)$. Si $q = 1$ (resp. $p = m$) tenemos $s < a_1(u^-)$ (resp. $s > a_m(u^+)$). $a_j(u)$ denotan los valores propios de A^1.

Se definen los índices

$$i_+ := \dim \sum_{a<s} \ker_{\mathbb{R}}(A^1(u^+) - aI) = \mu_1 + \ldots + \mu_p,$$

$$i_- := \dim \sum_{a>s} \ker_{\mathbb{R}}(A^1(u^-) - aI) = \mu_q + \ldots + \mu_m,$$

La onda de choque es *no característica:*

Existen dos índices $p, q \in \{1, \dots, m\}$ tales que $a_{q-1}(u^-) < s < a_q(u^-)$ y $a_p(u^+) < s < a_{p+1}(u^+)$. Si $q = 1$ (resp. $p = m$) tenemos $s < a_1(u^-)$ (resp. $s > a_m(u^+)$). $a_j(u)$ denotan los valores propios de A^1.

Se definen los índices

$$i_+ := \dim \sum_{a<s} \ker_{\mathbb{R}}(A^1(u^+) - aI) = \mu_1 + \ldots + \mu_p,$$

$$i_- := \dim \sum_{a>s} \ker_{\mathbb{R}}(A^1(u^-) - aI) = \mu_q + \ldots + \mu_m,$$

$$i_+ = \dim \mathbb{E}^s_+ = \text{dim del espacio estable de } A^1_+ - s,$$
$$i_- = \dim \mathbb{E}^u_- = \text{dim del espacio inestable de } A^1_- - s,$$

$$\kappa := i_+ + i_- - n,$$

Clasificación de FREISTÜHLER **(1993):** La onda de choque o tripleta (u^+, u^-, s) es

1. *de Lax (or clásica)* de tipo $\kappa = 1$ ssi $i_+ + i_- = n + 1$,
2. *subcompresiva* de tipo $\kappa \leq 0$ ssi $i_+ + i_- \leq n$, and
3. *sobrecompresiva* de tipo $\kappa > 1$ ssi $i_+ + i_- \geq n + 2$.

$$
\begin{aligned}
i_+ &= \dim \mathbb{E}^s_+ = \text{dim del espacio estable de } A^1_+ - s,\\
i_- &= \dim \mathbb{E}^u_- = \text{dim del espacio inestable de } A^1_- - s,
\end{aligned}
$$

$$
\kappa := i_+ + i_- - n,
$$

Clasificación de FREISTÜHLER **(1993):** La onda de choque o tripleta (u^+, u^-, s) es

1. *de Lax (or clásica)* de tipo $\kappa = 1$ ssi $i_+ + i_- = n + 1$,
2. *subcompresiva* de tipo $\kappa \leq 0$ ssi $i_+ + i_- \leq n$, and
3. *sobrecompresiva* de tipo $\kappa > 1$ ssi $i_+ + i_- \geq n + 2$.

Índice de subcompresividad:

$$l := n + 1 - (i_+ + i_-) = 1 - \kappa.$$

Lax: $l = 0$, caso $p = q$ (condiciones de entropía de Lax).

Subcompresivo: $l > 0$ (transiciones de fase).

Caso subcompresivo o de Lax, $l \geq 0$:

Añadimos a las n condiciones de RH un conjunto general de l condiciones de salto, de la forma $h = 0$, $h : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^{n+l}$, with

$$h(u^+, u^-, s, N) := \begin{pmatrix} [F(u)]N - s[u] \\ g(u^+, u^-, s, N) \end{pmatrix}.$$

$\zeta = (u^+, u^-, s, N)$, parámetros en $\mathcal{N} := \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

Las condiciones adicionales de salto $g : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^l$ reciben el nombre de *relaciones cinéticas*.

Caso subcompresivo o de Lax, $l \geq 0$:

Añadimos a las n condiciones de RH un conjunto general de l condiciones de salto, de la forma $h = 0$, $h : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^{n+l}$, with

$$h(u^+, u^-, s, N) := \begin{pmatrix} [F(u)]N - s[u] \\ g(u^+, u^-, s, N) \end{pmatrix}.$$

$\zeta = (u^+, u^-, s, N)$, parámetros en $\mathcal{N} := \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

Las condiciones adicionales de salto $g : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^l$ reciben el nombre de *relaciones cinéticas*.

Teoría de estabilidad de Majda

A. MAJDA, Mem. AMS 41 y 43, (1983).

Onda de choque original:

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+, & \text{if } x_1 - st > 0, \\ u^-, & \text{if } x_1 - st < 0. \end{cases}$$

Perturbación (condición incial):

$$u(x,0) = \begin{cases} u^+ + \epsilon v_0^+, & \text{for } x_1 > 0, \\ u^- + \epsilon v_0^-, & \text{for } x_1 < 0, \end{cases}$$

Asumimos que el problema tiene una solución débil de la forma: $u^{\epsilon}_{\pm}$ a cada lado de una hipersuperficie Σ^{ϵ}, que asumimos tiene la forma

$$\Sigma^{\epsilon} = \{\psi^{\epsilon}(x,t) = 0\} = \{x_1 - \phi^{\epsilon}(\tilde{x},t) = 0\}$$

Resolver para:

$$\phi^{\epsilon}(\tilde{x},t) = st + \epsilon\phi(\tilde{x},t) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$u^{\epsilon}_{\pm}(x,t) = \begin{cases} u^{+} + \epsilon v^{+}(x,t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \text{para } x_1 > \phi^{\epsilon}, \\ u^{-} + \epsilon v^{-}(x,t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \text{para } x_1 < \phi^{\epsilon}, \end{cases}$$

Problema nolineal con frontera libre:

$$f^0(u^\epsilon_+)_t + \sum_{j=1}^d f^j(u^\epsilon_+)_{x_j} = 0, \qquad \text{para } \; x_1 > \phi^\epsilon,$$

$$f^0(u^\epsilon_-)_t + \sum_{j=1}^d f^j(u^\epsilon_-)_{x_j} = 0, \qquad \text{para } \; x_1 < \phi^\epsilon,$$

$$h(\lim{}^+ u^\epsilon_+, \lim{}^- u^\epsilon_-, n^\epsilon_t, n^\epsilon_x) = 0, \qquad \text{at } x_1 = \phi^\epsilon.$$

Localización del choque:

$U^{\epsilon}_{\pm} := u^{\pm} + V^{\pm}(z, \tilde{x}, t)$, donde $z = x_1 - \phi^{\epsilon}(\tilde{x}, t)$,
$V^{\pm}(z, \tilde{x}, t) = v^{\pm}(z + \phi^{\epsilon}, \tilde{x}, t)$. Haciendo $z \to -z$ sólo para V^-.
Linealizando las ecuaciones y la condición de frontera alrededor de $u^{\pm}$:

$$\begin{aligned} V_t^+ + (A_+^1 - sI)V_z^+ + \sum_{j\neq 1} A_+^j V_{x_j}^+ &= 0, \\ V_t^- - (A_-^1 - sI)V_z^- + \sum_{j\neq 1} A_-^j V_{x_j}^- &= 0, \end{aligned}$$

para $z > 0$, y condición de frontera en $z = 0$:

$$d_{u^+}h(u^+, u^-, e_1, -s)V^+ + d_{u^-}h(u^+, u^-, e_1, -s)V^- +$$

$$-d_{\sigma}h(u^+, u^-, e_1, -s)\phi_t - d_N h(u^+, u^-, e_1, -s)(0, \check{\nabla}\phi)^t = 0$$

Denotando $W = (V+, V^-, \phi)^\top \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tenemos un sistema hiperbólico con valores en la frontera $z = 0$ dadas por las condiciones de salto del tipo estudiado por Kreiss:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W &= 0, \qquad \text{para } z > 0, \;\; \tilde{x} \in \mathbb{R}^{d-1}, \;\; t \geq 0, \\ \mathcal{B}W &= 0, \qquad \text{en } z = 0, \end{aligned}$$

Denotando

$$\mathcal{A}_+(\lambda, \tilde{\xi}) := (A_+^1 - sI)^{-1}(\lambda I + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_+^j),$$

$$\mathcal{A}_-(\lambda, \tilde{\xi}) := (A_+^1 - sI)^{-1}(\lambda I + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_+^j),$$

Denotando $W = (V+, V^-, \phi)^\top \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tenemos un sistema hiperbólico con valores en la frontera $z = 0$ dadas por las condiciones de salto del tipo estudiado por Kreiss:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W &= 0, \qquad \text{para } z > 0, \;\; \tilde{x} \in \mathbb{R}^{d-1}, \;\; t \geq 0, \\ \mathcal{B}W &= 0, \qquad \text{en } z = 0, \end{aligned}$$

Denotando

$$\mathcal{A}_+(\lambda, \tilde{\xi}) := (A_+^1 - sI)^{-1}(\lambda I + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_+^j),$$

$$\mathcal{A}_-(\lambda, \tilde{\xi}) := (A_+^1 - sI)^{-1}(\lambda I + i \sum_{j \neq 1} \xi_j A_+^j),$$

La condición de Lopatinski implica que la restricción de $\mathcal{B}$ a $\mathbb{E}^u_+ \times \mathbb{E}^s_- \times \mathbb{C}$ es uniformemente inyectiva para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$. $\mathbb{E}^{s,u}_\pm =$ espacio estable/inestable de $\mathcal{A}_\pm$.

Condición uniforme de Lopatinski:

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) :=$$

$$\det\left(d_{u^-}h(\zeta_0)\tilde{R}^s_-,\ \lambda d_\sigma h(\zeta_0) + i d_N h(\zeta_0)(0, \tilde{\xi})^t,\ d_{u^+}h(\zeta_0)\tilde{R}^u_+\right) \neq 0,$$

para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$, Re $\lambda \geq 0$. $\tilde{R}^{u,s}_\pm$ denotan los haces de Lopatinski, bases de los espacios estable e inestable.

La condición de Lopatinski implica que la restricción de $\mathcal{B}$ a $\mathbb{E}^u_+ \times \mathbb{E}^s_- \times \mathbb{C}$ es uniformemente inyectiva para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$. $\mathbb{E}^{s,u}_\pm$ = espacio estable/inestable de $\mathcal{A}_\pm$.

Condición uniforme de Lopatinski:

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) :=$$

$$\det\left(d_{u^-}h(\zeta_0)\tilde{R}^s_-,\ \lambda d_\sigma h(\zeta_0) + i d_N h(\zeta_0)(0,\tilde{\xi})^t,\ d_{u^+}h(\zeta_0)\tilde{R}^u_+\right) \neq 0,$$

para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$, Re $\lambda \geq 0$. $\tilde{R}^{u,s}_\pm$ denotan los haces de Lopatinski, bases de los espacios estable e inestable.

Majda define:

- Choque *uniformemente estable* si el problema linealizado es fuertemente bien planteado en L^2 (condición uniforme de Lopatinski),
- Choque *débilmente estable* si el problema linealizado satisface la condición de Lopatinski.
- Choque *fuertemente inestable* si el problema linealizado no satisface la condicion de Lopatinski.

Majda define:

- Choque *uniformemente estable* si el problema linealizado es fuertemente bien planteado en L^2 (condición uniforme de Lopatinski),
- Choque *débilmente estable* si el problema linealizado satisface la condición de Lopatinski.
- Choque *fuertemente inestable* si el problema linealizado no satisface la condicion de Lopatinski.

Majda define:

- Choque *uniformemente estable* si el problema linealizado es fuertemente bien planteado en L^2 (condición uniforme de Lopatinski),
- Choque *débilmente estable* si el problema linealizado satisface la condición de Lopatinski.
- Choque *fuertemente inestable* si el problema linealizado no satisface la condicion de Lopatinski.

Resultados de Majda:

- Construye el simetrizador de Kreiss para sistemas que satisfacen la estructura de bloque, y para ondas de choque clásicas (tipo Lax). Prueba que las ecuaciones de Euler satisfacen la estructura de bloque.
- Mediante un método de iteración tipo Newton, prueba que *estabilidad lineal uniforme implica estabilidad nolineal bajo perturbaciones pequeñas*.

Teoría de estabilidad multidimensional para frentes planos

- Teoría de sistemas hiperbólicos con coeficientes constantes lineales con valores iniciales y de frontera (H. O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277-298). Condición uniforme de Lopatinski, suficiente para tener estimación L^2 de la solución. Construcción de simetrizadores de Kreiss.
- Estabilidad multidimensional de choques no viscosos (A. MAJDA, Mem. Amer. Math. Soc. 41 (275) (1983); Mem. Amer. Math. Soc. 43 (281) (1983)). Define estabilidad de la frontera como un problema bien planteado en L^2 para la perturbación. Problema linealizado a ambos lados de la frontera y planteado como un problema tipo Kreiss. Estabilidad lineal implica estabilidad nolineal.

Teoría de estabilidad multidimensional para frentes planos

- Teoría de sistemas hiperbólicos con coeficientes constantes lineales con valores iniciales y de frontera (H. O. KREISS, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 277-298). Condición uniforme de Lopatinski, suficiente para tener estimación L^2 de la solución. Construcción de simetrizadores de Kreiss.
- Estabilidad multidimensional de choques no viscosos (A. MAJDA, Mem. Amer. Math. Soc. 41 (275) (1983); Mem. Amer. Math. Soc. 43 (281) (1983)). Define estabilidad de la frontera como un problema bien planteado en L^2 para la perturbación. Problema linealizado a ambos lados de la frontera y planteado como un problema tipo Kreiss. Estabilidad lineal implica estabilidad nolineal.

- Choques débiles (G. MÉTIVIER, Comm. Partial Diff. Equations 15 (7) (1990) 983–1028 (1990, 2001)). Extensión del resultado de Majda a choques débiles.
- Extensión de la teoría de Majda y Métivier a *transiciones de fase*: (H. FREISTÜHLER, J. Partial Diff. Eqs. 11 (1) (1998) 25–38). Necesidad de introducir la relación cinética al análisis de Majda. Extensión del determinante de Lopatinski *con* relación cinética. Estabilidad nolineal: (J.-F. COULOMBEL, Interfaces Free Bound. 5 (4) (2003), 360–390). El análisis nolineal de Majda se extiende a transiciones de fase. Condición uniforme de Lopatinski implica estabilidad nolineal.

- Choques débiles (G. MÉTIVIER, Comm. Partial Diff. Equations 15 (7) (1990) 983–1028 (1990, 2001)). Extensión del resultado de Majda a choques débiles.
- Extensión de la teoría de Majda y Métivier a *transiciones de fase*: (H. FREISTÜHLER, J. Partial Diff. Eqs. 11 (1) (1998) 25–38). Necesidad de introducir la relación cinética al análisis de Majda. Extensión del determinante de Lopatinski *con* relación cinética. Estabilidad nolineal: (J.-F. COULOMBEL, Interfaces Free Bound. 5 (4) (2003), 360–390). El análisis nolineal de Majda se extiende a transiciones de fase. Condición uniforme de Lopatinski implica estabilidad nolineal.

Ecuaciones de hiperelasticidad no térmica sin fuerzas externas

$$\begin{aligned} U_t - \nabla_x V &= 0, \\ V_t - \mathrm{div}_x\, \sigma(U) &= 0, \end{aligned}$$

con

$$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty),$$

$$\begin{aligned} U(x,t) := \nabla_x X \in \mathbb{R}^{d\times d}_+ \quad &- \quad \text{gradiente de deformación local,} \\ V(x,t) := X_t(x,t) \in \mathbb{R}^d \quad &- \quad \text{velocidad local,} \\ \sigma(U) = \frac{\partial W}{\partial U} \quad &- \quad \text{tensor de Piola-Kirchhoff (stress),} \\ W = W(U) \quad &- \quad \text{densidad local de energía} \end{aligned}$$

Ecuaciones de hiperelasticidad no térmica sin fuerzas externas

$$U_t - \nabla_x V = 0,$$
$$V_t - \mathrm{div}_x\, \sigma(U) = 0,$$

con

$$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty),$$

$U(x,t) := \nabla_x X \in \mathbb{R}_+^{d\times d}$ – gradiente de deformación local,

$V(x,t) := X_t(x,t) \in \mathbb{R}^d$ – velocidad local,

$\sigma(U) = \dfrac{\partial W}{\partial U}$ – tensor de Piola-Kirchhoff (stress),

$W = W(U)$ – densidad local de energía

Constricción:

$$\mathrm{curl}_x\, U = 0,$$

$$\text{i.e.}\quad \partial_{x_k} U_{ij} - \partial_{x_j} U_{ik} = 0, \qquad i,j,k = 1,..,d.$$

Tensor acústico:

$$\mathcal{N}(\xi, U) = D^2 W(U)(\xi,\xi) = \sum_{i,j=1}^{d} \xi_i \xi_j B_i^j(U),\ \xi \in \mathbb{R}^d$$

$$B_j^i(U) := \frac{\partial^2 W}{\partial U_{lj} \partial U_{ki}} \quad \in \mathbb{R}^{d\times d},$$

Constricción:

$$\mathrm{curl}_x\, U = 0,$$

$$\text{i.e.} \quad \partial_{x_k} U_{ij} - \partial_{x_j} U_{ik} = 0, \qquad i, j, k = 1, .., d.$$

Tensor acústico:

$$\mathcal{N}(\xi, U) = D^2 W(U)(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{d} \xi_i \xi_j B_i^j(U), \ \xi \in \mathbb{R}^d$$

$$B_j^i(U) := \frac{\partial^2 W}{\partial U_{lj} \partial U_{ki}} \quad \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

Condición de **Legendre-Hadamard**:

$$\eta^\top \mathcal{N}(\xi, U)\eta > 0$$

para todo $\eta, \xi \in \mathbb{R}^d$. (Se dice que W es *rango-uno convexa* en U.)

W es rango-uno convexa en $U \implies$ el sistema de ecuaciones es *hiperbólico* en U.

Condición de **Legendre-Hadamard**:

$$\eta^\top \mathcal{N}(\xi, U)\eta > 0$$

para todo $\eta, \xi \in \mathbb{R}^d$. (Se dice que W es *rango-uno convexa* en U.)

W es rango-uno convexa en $U \implies$ el sistema de ecuaciones es *hiperbólico* en U.

Interfases planas subsónicas

$$(U,V)(x,t) = \begin{cases} (U^-,V^-), & x\cdot N < st, \\ (U^+,V^+), & x\cdot N > st \end{cases}$$

W es convexa de rango-uno en $U = U^{\pm}$, $U^+ \neq U^-$. Normal a la interfase: $N \in \mathbb{R}^d$, $|N| = 1$. s = velocidad del choque, **subsónica**:

$$0 \leq s^2 < \min\{\kappa_j(N,U^{\pm}) \;\; \text{valores propios de} \;\; \mathcal{N}(N,U^{\pm})\}.$$

Interfases planas subsónicas

$$(U,V)(x,t) = \begin{cases} (U^-,V^-), & x\cdot N < st, \\ (U^+,V^+), & x\cdot N > st \end{cases}$$

W es convexa de rango-uno en $U = U^\pm$, $U^+ \neq U^-$. Normal a la interfase: $N \in \mathbb{R}^d$, $|N| = 1$. s = velocidad del choque, **subsónica**:

$$0 \leq s^2 < \min\{\kappa_j(N,U^\pm) \ \text{ valores propios de } \ \mathcal{N}(N,U^\pm)\}.$$

Condiciones clásicas de salto (Rankine-Hugoniot):

$$
\begin{aligned}
-s[U] - [V] \otimes N &= 0, \\
-s[V] - [\sigma(U)]N &= 0, \\
[U] \times N &= 0.
\end{aligned}
$$

$[f] := f^+ - f^-$, para toda función f.

Modelo simplificado en una dimensión

$$u_t - v_x = 0,$$
$$v_t + \sigma(u)_x = 0.$$

El sistema es hiperbólico si $\sigma'(u) < 0$.

Cuando el sistema modela transiciones de fase (van der Waals, rodillos elásticos unidimensionales), $\sigma'(u) > 0$ *excepto* en una región (α, β) = región espinodal.

Modelo simplificado en una dimensión

$$
\begin{aligned}
u_t - v_x &= 0,\\
v_t + \sigma(u)_x &= 0.
\end{aligned}
$$

El sistema es hiperbólico si $\sigma'(u) < 0$.
Cuando el sistema modela transiciones de fase (van der Waals, rodillos elásticos unidimensionales), $\sigma'(u) > 0$ *excepto* en una región (α, β) = región espinodal.

Valores propios:

$$\kappa^2 = -\sigma'(u)$$

$$a_1(u) := -\sqrt{-\sigma'(u)} \; < \; 0 \; < \; a_2(u) := +\sqrt{-\sigma'(u)}$$

Seleccionar u_+ y u_- en regiones hiperbólicas no conectadas. La velocidad del choque puede ser subsónica:

$$\begin{aligned} a_1^+ &< s < a_2^+, \\ a_1^- &< s < a_2^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_+ &= \dim \mathcal{E}^s(A_+ - s) = 1, && (1) \\ i_- &= \dim \mathcal{E}^s(A_- - s) = 1, && (2) \end{aligned}$$

Índice de subcompresividad:

$$k = i_+ + i_- - 2 = 0.$$

El choque es **subcompresivo** si $k \leq 0$.

Choque clásico (o de Lax):
Si $\sigma'(u) < 0$ para todo u, la *condición de entropía de Lax* es:

$$a_1^+ < a_2^+ < s,$$
$$a_1^- < s < a_2^-,$$

$$i_+ = \dim \mathcal{E}^s(A_+ - s) = 2, \tag{3}$$
$$i_- = \dim \mathcal{E}^s(A_- - s) = 1, \tag{4}$$

Índice de subcompresividad:

$$k = i_+ + i_- - 2 = 1.$$

(Choque de Lax.)

Consecuencias:
Para un choque subcompresivo no hay unicidad de las soluciones débiles (ejemplo, problema de Riemann). Las condiciones de Rankine-Hugoniot se deben complementar con condiciones de salto adicionales.

Relaciones cinéticas

La velocidad s de una interfase plana subsónica no está únicamente determinada por leyes constitutivas (choque subcompresivo). Se requiere un criterio adicional.

Relaciones cinéticas:

R. ABEYARATNE AND J. K. KNOWLES

- J. Mech. Phys. Solids **38** (1990) no. 3, 345-360.
- Arch. Ration. Mech. Anal. **114** (1991), 119-154.

Relaciones cinéticas

La velocidad s de una interfase plana subsónica no está únicamente determinada por leyes constitutivas (choque subcompresivo). Se requiere un criterio adicional.

Relaciones cinéticas:
R. ABEYARATNE AND J. K. KNOWLES

- J. Mech. Phys. Solids **38** (1990) no. 3, 345-360.
- Arch. Ration. Mech. Anal. **114** (1991), 119-154.

Función que relaciona la velocidad normal de la interfase $s = v_n$ con la fuerza “guiadora” efectiva a través de la interfase:

$$
\begin{aligned}
v_n &= \phi(\mathcal{F}), \\
\mathcal{F} &:= [W(U)] - N^\top [U]^\top \langle \sigma(U) \rangle N,
\end{aligned}
$$

$\langle f \rangle := \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$. En ciertos casos: ϕ invertible.

La relación cinética induce una condición de salto extra de la forma

$$g((U^-,V^-),(U^+,V^+),s,N)=0$$

Relaciones cinéticas del tipo Abeyaratne and Knowles (1990, 1991) de la forma:

$$g = \mathcal{F} + h = 0,$$

$$h((U^-, V^-), (U^+, V^+), s, N) : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{N} = (\mathbb{R}^{3\times 3}_+ \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}^{3\times 3}_+ \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo ABEYARATNE-KNOWLES :

- h es una función diferenciable en sus parámetros,
- $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+,0),(\underline{U}^-,0),0,\nu))} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo ABEYARATNE-KNOWLES :

- h es una función diferenciable en sus parámetros,
- $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+,0),(\underline{U}^-,0),0,\nu))} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo
ABEYARATNE-KNOWLES :

- h es una función diferenciable en sus parámetros,
- $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+,0),(\underline{U}^-,0),0,\nu))} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo ABEYARATNE-KNOWLES :

- h es una función diferenciable en sus parámetros,
- $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+,0),(\underline{U}^-,0),0,\nu))} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Relación cinética de Maxwell:

$$h \equiv 0,$$

(conservación de energía a través de la frontera)

Relaciones cinéticas *regulares* del tipo ABEYARATNE-KNOWLES :

- h es una función diferenciable en sus parámetros,
- $h(\cdot, \cdot, s = 0, \cdot) = 0$, idénticamente,
- $h > 0$ para $s < 0$, y $h < 0$ para $s > 0$ (desigualdad de Clausius-Dulhem vale en la interfase),
- $((d/ds)h)_{((\underline{U}^+,0),(\underline{U}^-,0),0,\nu))} < 0$ (monotonía cerca de $s = 0$ en la interfase estática) (*)

Ejemplos:

Modelo simplificado:

$$[W(u)] + \frac{1}{2}[u](\sigma_+ + \sigma_-) = 0,$$

Hiperelasticidad:

$$[W(U)] - N^\top [U]^\top \langle \sigma(U) \rangle N = 0.$$

Ejemplos:

Modelo simplificado:

$$[W(u)] + \frac{1}{2}[u](\sigma_+ + \sigma_-) = 0,$$

Hiperelasticidad:

$$[W(U)] - N^\top [U]^\top \langle \sigma(U) \rangle N = 0.$$

Análisis en modos normales para las ecuaciones de hiperelasticidad

FREISTÜHLER AND P, Arch. Ration. Mech. Anal. **186** (2007), no. 1.

Es suficiente hacer el análisis de modos normales en un subespacio de amplitudes compatibles con la constricción $\text{curl}_x\, U = 0$.

Resultado: definición de la *función reducida de Lopatinski*. Permite incorporar interfases estáticas $s = 0$ al análisis.

Análisis en modos normales para las ecuaciones de hiperelasticidad

FREISTÜHLER AND P, Arch. Ration. Mech. Anal. **186** (2007), no. 1.

Es suficiente hacer el análisis de modos normales en un subespacio de amplitudes compatibles con la constricción $\mathrm{curl}_x\, U = 0$.

Resultado: definición de la *función reducida de Lopatinski*. Permite incorporar interfases estáticas $s = 0$ al análisis.

Hipótesis :

- W convexa de rango-uno en U (hiperbolicidad local).
- $\forall \tilde{U} \sim U, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \xi \neq 0$, valores propios de $\mathcal{N}(\xi, \tilde{U})$ son semi-simples, multiplicidades independientes de $\tilde{U}$ and ξ (MÉTIVIER (2000)).
- $h((U^-, V^-), (U^+, V^+), s, N) = 0$, (RH + relaciones cinéticas)
- La matriz $(d^2 + d + 1) \times 2(d^2 + d)$

$$\left(d_{(U^+,V^+)}h\,, \quad d_{(U^-,V^-)}h\right)_{|((U^-,V^-),(U^+,V^+),s,N)}$$

tiene rango máximo (condición no degeneradaCOULOMBEL (2003)).

Hipótesis sobre las configuraciones de equilibrio:

- $\exists U^A \neq U^B$ in $\mathbb{R}_+^{d\times d}$, mínimos locales de W, rango-uno conectados. W convexa de rango uno en ambos.
- Simetrizabilidad y multiplicidad constante en ambos. La confición no degenerada de Coulombel sobre h vale en $((U^A,0),(U^B,0),0,N^*)$.

Función reducida de Lopatinski

Conjunto compacto de frecuencias:

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d \ : \ \mathrm{Re}\ \lambda \geq 0, \ \xi \cdot N = 0, \ |\lambda|^2 + |\xi|^2 = 1\},$$

Determinante de Lopatinski reducido:

$$\Delta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\Delta(\lambda, \xi) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}^s_- & \hat{Q} & \hat{R}^u_+ \\ \hat{p}^- & \hat{q} & \hat{p}^+ \end{pmatrix},$$

donde,

Función reducida de Lopatinski

Conjunto compacto de frecuencias:

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d \ : \ \mathrm{Re}\ \lambda \geq 0, \ \xi \cdot N = 0, \ |\lambda|^2 + |\xi|^2 = 1\},$$

Determinante de Lopatinski reducido:

$$\Delta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\Delta(\lambda, \xi) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}^s_- & \hat{Q} & \hat{R}^u_+ \\ \hat{p}^- & \hat{q} & \hat{p}^+ \end{pmatrix},$$

donde,

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U]N \\ -\lambda s - i[\sigma(U)]\xi \end{pmatrix},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i(\xi \cdot D_N g)$$

$$\hat{p}^+ := (D_{(U^+,V^+)} g)\mathcal{K}_+(\lambda,\xi)\hat{R}^u_+ \in \mathbb{C}^{1\times 3}$$
$$\hat{p}^- := -(D_{(U^-,V^-)} g)\mathcal{K}_-(\lambda,\xi)\hat{R}^s_-$$

$\hat{R}^{s,u}(\underline{U}^\pm) \in \mathbb{C}^{2d\times d}$ - espacios invariantes estable e inestable de una matriz $\mathbb{M}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \to \mathbb{C}^{2d\times 2d}$ definida para cada U cerca de $\underline{U}^\pm$, s subsónica. $\mathcal{K}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \to \mathbb{C}^{(d^2+d)\times 2d}$ es un mapeo continuo. $\mathbb{M}$ y $\mathcal{K}$ dependen explicitamente de las segundas derivadas de W.

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U]N \\ -\lambda s - i[\sigma(U)]\xi \end{pmatrix},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i(\xi \cdot D_N g)$$

$$\hat{p}^+ := (D_{(U^+,V^+)}g)\mathcal{K}_+(\lambda,\xi)\hat{R}^u_+ \in \mathbb{C}^{1\times 3}$$
$$\hat{p}^- := -(D_{(U^-,V^-)}g)\mathcal{K}_-(\lambda,\xi)\hat{R}^s_-$$

$\hat{R}^{s,u}(\underline{U}^\pm) \in \mathbb{C}^{2d\times d}$ - espacios invariantes estable e inestable de una matriz $\mathbb{M}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \to \mathbb{C}^{2d\times 2d}$ definida para cada U cerca de $\underline{U}^\pm$, s subsónica. $\mathcal{K}_{s,N}(U) : \mathcal{S} \to \mathbb{C}^{(d^2+d)\times 2d}$ es un mapeo continuo. $\mathbb{M}$ y $\mathcal{K}$ dependen explicitamente de las segundas derivadas de W.

Idea:

Los modos normales de la forma

$$(U,V) = (\hat{U},\hat{V})(x_1 - st)\exp(i\tilde{\xi}\cdot x + \lambda t)$$

compatibles con la condición curl $U = 0$, satisfacen:

$$\begin{pmatrix} I_d & 0 & 0 \\ 0 & sI_{d^2-d} & 0 \\ 0 & 0 & I_d \end{pmatrix} (A_1 - s)(\hat{U}(\cdot),\hat{v}(\cdot))^\top \in \mathbb{G}(\lambda,\tilde{\xi})$$

$$\mathbb{G}(\lambda,\tilde{\xi}) = \{(\lambda Y, i\xi_2 Y, \ldots, i\xi_d Y, Z)^\top \,:\, Y, Z \in \mathbb{C}^d\}$$

de dimensión $2d$.

La estabilidad nolineal de la interfase subsónica plana está controlada por la función de Lopatinski reducida en el sentido que la frontera es:

- *Uniformemente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S}$, (condición uniforme Lopatinski),
- *Débilmente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$ (condición de Lopatinski),
- *Fuertemente inestable* si $\Delta(\lambda, \xi) = 0$ para algún $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$.

La estabilidad nolineal de la interfase subsónica plana está controlada por la función de Lopatinski reducida en el sentido que la frontera es:

- *Uniformemente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S}$, (condición uniforme Lopatinski),
- *Débilmente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\mathrm{Re}\ \lambda > 0\}$ (condición de Lopatinski),
- *Fuertemente inestable* si $\Delta(\lambda, \xi) = 0$ para algún $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\mathrm{Re}\ \lambda > 0\}$.

La estabilidad nolineal de la interfase subsónica plana está controlada por la función de Lopatinski reducida en el sentido que la frontera es:

- *Uniformemente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S}$, (condición uniforme Lopatinski),
- *Débilmente estable* si $\Delta(\lambda, \xi) \neq 0$, para todo $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\text{Re } \lambda > 0\}$ (condición de Lopatinski),
- *Fuertemente inestable* si $\Delta(\lambda, \xi) = 0$ para algún $(\lambda, \xi) \in \mathcal{S} \cap \{\text{Re } \lambda > 0\}$.

Ejemplo: frontera plana monoclínica

Deformaciones (monoclínicas) :

$$\underline{U}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{U}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0,$$

con función de densidad de energía (M. Kružík and M. Luskin, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3):

$$W(U) = \frac{1}{32}\left| C - \begin{pmatrix} 1+\epsilon^2 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2 \left| C - \begin{pmatrix} 1+\epsilon^2 & -\epsilon & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

donde $C(U) = U^\top U$ (tensor de "strain" de Cauchy-Green), y

$$|M|^2 = \mathrm{Tr}\,(M^\top M), \quad (\text{norma de Frobenius en } \mathbb{R}^{3\times 3}).$$

Ejemplo: frontera plana monoclínica

Deformaciones (monoclínicas) :

$$\underline{U}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{U}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0,$$

con función de densidad de energía (M. KRUŽÍK AND M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3):

$$W(U) = \frac{1}{32}\left| C - \begin{pmatrix} 1+\epsilon^2 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|^2 \left| C - \begin{pmatrix} 1+\epsilon^2 & -\epsilon & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|^2$$

donde $C(U) = U^{\top}U$ (tensor de “strain” de Cauchy-Green), y

$$|M|^2 = \mathrm{Tr}\,(M^{\top}M), \quad (\text{norma de Frobenius en } \mathbb{R}^{3\times 3}).$$

Conexión de rango uno:

$$\underline{U}^+ - \underline{U}^- = 2\epsilon \hat{e}_2 \otimes \hat{e}_1,$$

y $\det \underline{U}^+ = \det \underline{U}^- = 1$.

Pozos martensíticos: $\mathcal{U}^+ = \mathrm{SO}\,(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \mathrm{SO}\,(3)\underline{U}^-$.

Número total de pozos: 2 (fases monoclínicas).

- W indiferente bajo rotaciones,
- W alcanza su mínimo sólo en $\mathcal{U}^+ = \mathrm{SO}(3)\underline{U}^+$ y $\mathcal{U}^- = \mathrm{SO}(3)\underline{U}^-$,
- W es rango-uno convexa en $U = \underline{U}^\pm$ (hiperbolicidad),
- W satisface la condición de Métivier (valores propios simples de $\mathcal{N}(\xi, \underline{U}^\pm)$),
- No convexa, con estructura múltiple,
- Cálculo de microestructuras cristalinas (CHIPOT *et al.* Numer. Math **70** (1995), no. 3; M. KRUŽÍK AND M. LUSKIN, J. Sci. Comput. **19** (2003), nos. 1 - 3).

Resultados:

P, J. Mech. Phys. Solids **56** (2008), no. 4.

La interfase estática plana es <u>débilmente estable</u> bajo la relación cinética de Maxwell (conservación de energía) y <u>uniformemente estable</u> bajo relaciones cinéticas regulares lineales del tipo Abeyaratne - Knowles.

Contraparte elástica (y estática) de los resultados de S. Benzoni-Gavage en el caso de un fluído de Van der Waals:

- Nonlinear Anal. TMA **31** (1998), nos. 1-2.
- Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1999), no. 1.

Resultados:

P, J. Mech. Phys. Solids **56** (2008), no. 4.

La interfase estática plana es débilmente estable bajo la relación cinética de Maxwell (conservación de energía) y uniformemente estable bajo relaciones cinéticas regulares lineales del tipo Abeyaratne - Knowles.

Contraparte elástica (y estática) de los resultados de S. Benzoni-Gavage en el caso de un fluído de Van der Waals:

- Nonlinear Anal. TMA **31** (1998), nos. 1-2.
- Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1999), no. 1.

Evaluación del determinante de Lopatinski

Valores propios de $B_1^{1\pm}$:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}\epsilon^2\left(3+2\epsilon^2-\sqrt{(3+2\epsilon^2)^2-8}\right), \\ k_2 &= \epsilon^2, \\ k_3 &= \frac{1}{2}\epsilon^2\left(3+2\epsilon^2+\sqrt{(3+2\epsilon^2)^2-8}\right), \end{aligned}$$

$0 < k_1 < k_2 < k_3$, simples. Velocidades características $\alpha_j = \pm\sqrt{k_j}$, $j = 1, 2, 3$. Vectores propios de $B_1^{1\pm}$,

$$Y_j = k_j \begin{pmatrix} 2\epsilon^3 \\ k_j - 2\epsilon^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 3, \qquad Y_2 = \hat{e}_3.$$

Definición de la función de Lopatinski

$$\nu = \hat{e}_1 \; - \; \text{dirección de propagación,}$$
$$\tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_3) \; - \; \text{direcciones transversales}$$

Conjunto compacto de "frecuencias"

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \, : \, |\lambda|^2 + |\tilde{\xi}|^2 = 1, \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\},$$

con interior: $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S} \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$.

Definición de la función de Lopatinski

$$\nu = \hat{e}_1 \; - \; \text{dirección de propagación,}$$
$$\tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_3) \; - \; \text{direcciones transversales}$$

Conjunto compacto de "frecuencias"

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \, : \, |\lambda|^2 + |\tilde{\xi}|^2 = 1, \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\},$$

con interior: $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S} \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$.

$$\mathbb{M}_\pm : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^{6\times 6}$$

$$\mathbb{M}_\pm(\lambda, \tilde{\xi}) := \begin{pmatrix} M_{11}^\pm & M_{12}^\pm \\ M_{21}^\pm & M_{22}^\pm \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M_{11}^\pm &= i(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}), \\
M_{12}^\pm &= -(B_1^{1\pm})^{-1}, \\
M_{21}^\pm &= (\xi_2 B_1^{2\pm} + \xi_3 B_1^{3\pm})(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}) - \lambda^2 I + \\
&\quad -(\xi_2^2 B_2^{2\pm} + \xi_3^2 B_3^{3\pm} + \xi_2\xi_3(B_3^{2\pm} + B_2^{3\pm})), \\
M_{22}^\pm &= i(\xi_2 B_1^{2\pm} + \xi_3 B_1^{3\pm})(B_1^{1\pm})^{-1}.
\end{aligned}$$

La **función de Lopatinski reducida,** $\Delta : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, está definida como (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}^s_- & \hat{Q} & \hat{R}^u_+ \\ \hat{p}^- & \hat{q} & \hat{p}^+ \end{pmatrix},$$

donde

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U_1] \\ i[\sigma(U)](0, \tilde{\xi})^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 1},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i((0, \tilde{\xi})^\top D_N g) \in \mathbb{C}^{1\times 1}$$

$$\hat{p}^+ := (D_{(U^+,V^+)} g)\mathcal{K}_+(\lambda, \tilde{\xi})\hat{R}^u_+ \in \mathbb{C}^{1\times 3}$$

$$\hat{p}^- := -(D_{(U^-,V^-)} g)\mathcal{K}_-(\lambda, \tilde{\xi})\hat{R}^s_- \in \mathbb{C}^{1\times 3}$$

La **función de Lopatinski reducida,** $\Delta : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, está definida como (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) := \det \begin{pmatrix} \hat{R}^s_- & \hat{Q} & \hat{R}^u_+ \\ \hat{p}^- & \hat{q} & \hat{p}^+ \end{pmatrix},$$

donde

$$\hat{Q} := \begin{pmatrix} [U_1] \\ i[\sigma(U)](0, \tilde{\xi})^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 1},$$

$$\hat{q} := -\lambda(D_s g) + i((0, \tilde{\xi})^\top D_N g) \in \mathbb{C}^{1\times 1}$$

$$\hat{p}^+ := (D_{(U^+, V^+)} g)\mathcal{K}_+(\lambda, \tilde{\xi})\hat{R}^u_+ \in \mathbb{C}^{1\times 3}$$

$$\hat{p}^- := -(D_{(U^-, V^-)} g)\mathcal{K}_-(\lambda, \tilde{\xi})\hat{R}^s_- \in \mathbb{C}^{1\times 3}$$

$$\mathcal{K}_\pm(\lambda,\tilde{\xi}) := \begin{pmatrix} i(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}) & -(B_1^{1\pm})^{-1} \\ -i\xi_2 I & 0 \\ -i\xi_3 I & 0 \\ -\lambda I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{12\times 6},$$

$$\hat{R}_+^u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6\times 3},$$
$$\hat{R}_-^s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6\times 3},$$

son mapeos continuos en $\mathcal{S}$ (analíticos en $\mathcal{S}^+$), cuyas columnas generan los subespacios invariantes estable e inestable de $\mathbb{M}_+$ and $\mathbb{M}_-$ respectivamente.

Propiedades: Δ es analítica para Re $\lambda > 0$ y continua hasta Re $\lambda = 0$.

$$\mathcal{K}_\pm(\lambda,\tilde{\xi}) := \begin{pmatrix} i(B_1^{1\pm})^{-1}(\xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}) & -(B_1^{1\pm})^{-1} \\ -i\xi_2 I & 0 \\ -i\xi_3 I & 0 \\ -\lambda I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{12\times 6},$$

$$\hat{R}_+^u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6\times 3},$$
$$\hat{R}_-^s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^{6\times 3},$$

son mapeos continuos en $\mathcal{S}$ (analíticos en $\mathcal{S}^+$), cuyas columnas generan los subespacios invariantes estable e inestable de $\mathbb{M}_+$ and $\mathbb{M}_-$ respectivamente.

Propiedades: Δ es analítica para Re $\lambda > 0$ y continua hasta Re $\lambda = 0$.

Modos estables e inestables

Sea $\mathcal{N}_\pm(\mu, \tilde{\xi}) := \mathcal{N}(\mu, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \underline{U}^\pm)$. Valores propios $\beta = -i\mu$ de $\mathbb{M}_\pm$, con $\mu \in \mathbb{C}$, satisfacen:

$$\pi_\pm(\mu) := \det\left(\mathcal{N}_\pm(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I\right) = 0,$$

para toda $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$.

Para $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$, los valores propios son:

$$\begin{aligned} &3 \text{ modos estables, } \mathrm{Im}\,\mu^s < 0, \\ &3 \text{ modos inestables, } \mathrm{Im}\,\mu^u > 0. \end{aligned}$$

(dicotomía hiperbólica, R. HERSH, J. Math. Mech. **12** (1963) no.3).

Modos estables e inestables

Sea $\mathcal{N}_\pm(\mu, \tilde{\xi}) := \mathcal{N}(\mu, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \underline{U}^\pm)$. Valores propios $\beta = -i\mu$ de $\mathbb{M}_\pm$, con $\mu \in \mathbb{C}$, satisfacen:

$$\pi_\pm(\mu) := \det\left(\mathcal{N}_\pm(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I\right) = 0,$$

para toda $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$.

Para $\text{Re } \lambda > 0$, los valores propios son:

$$\begin{array}{c} 3 \text{ modos estables, } \; \text{Im } \mu^s < 0, \\ 3 \text{ modos inestables, } \; \text{Im } \mu^u > 0. \end{array}$$

(dicotomía hiperbólica, R. HERSH, J. Math. Mech. **12** (1963) no.3).

$\hat{R}^{s,u}_{\pm}$ - haces de Lopatinski, analíticos para Re $\lambda > 0$.

Observación: R vector propio de $\mathbb{M}_{\pm}$ con valor propio $-i\mu$,

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm}) Y \end{pmatrix},$$

$$Y \in \ker\left(\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I\right).$$

$\hat{R}^{s,u}_{\pm}$ - haces de Lopatinski, analíticos para Re $\lambda > 0$.

Observación: R vector propio de $\mathbb{M}_{\pm}$ con valor propio $-i\mu$,

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix},$$

$$Y \in \ker\left(\mathcal{N}_{\pm}(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I\right).$$

Evaluación y reducciones

Usando la simetría de la configuración:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Pi^2 = I.$$

$$\Pi \mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}) \Pi = \mathcal{N}_-(-\mu, \tilde{\xi})$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}$ y $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^2$.

$$Y \in \ker\left(\mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}) + \lambda^2 I\right) \quad \Longrightarrow \quad \Pi Y \in \ker\left(\mathcal{N}_-(-\mu, \tilde{\xi})) + \lambda^2 I\right),$$

Por lo tanto:

$$\mu_-^s = -\mu_+^u$$

Basta con calcular las frecuencias inestables μ_+^u en el estado $U = \underline{U}^+$.

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & -\Pi \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^2 = I,$$

$$\Lambda \mathbb{M}_+(\lambda, \tilde{\xi}) \Lambda = -\mathbb{M}_-(\lambda, \tilde{\xi}),$$

para todo $(\lambda, \tilde{\xi}) \in \mathcal{S}$.

$$\hat{R}^s_- := \Lambda \hat{R}^u_+,$$

Basta con calcular el espacio invariante $\hat{R}^u_+$.

Usando la "homogeneidad" de Δ (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) = \Theta(\rho)\Delta(\rho\lambda, \rho\tilde{\xi}),$$

Θ - factor continuo tal que $|\Theta(\pm 1)| = 1$, $\Theta(\rho) \neq 0$.

Normalizando $\lambda \to \lambda/|\tilde{\xi}|$, $\tilde{\xi} \to \tilde{\xi}/|\tilde{\xi}|$ podemos restringir los cálculos a $|\tilde{\xi}| = 1, \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$; parametrizar en cordenadas polares

$$\tilde{\xi} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi).$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) := \mathcal{N}_+(\mu, e^{i\varphi})$$

$$\mathcal{N}_+(-\mu, -\tilde{\xi}) = \mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}), \qquad \tilde{\mathcal{N}}_+(-\mu, -\varphi) = \tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi)$$

Basta con tomar $\tilde{\xi} = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Usando la “homogeneidad” de Δ (FREISTÜHLER-P, 2007):

$$\Delta(\lambda, \tilde{\xi}) = \Theta(\rho)\Delta(\rho\lambda, \rho\tilde{\xi}),$$

Θ - factor continuo tal que $|\Theta(\pm 1)| = 1$, $\Theta(\rho) \neq 0$.

Normalizando $\lambda \to \lambda/|\tilde{\xi}|$, $\tilde{\xi} \to \tilde{\xi}/|\tilde{\xi}|$ podemos restringir los cálculos a $|\tilde{\xi}| = 1, \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$; parametrizar en cordenadas polares

$$\tilde{\xi} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi).$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) := \mathcal{N}_+(\mu, e^{i\varphi})$$

$$\mathcal{N}_+(-\mu, -\tilde{\xi}) = \mathcal{N}_+(\mu, \tilde{\xi}), \qquad \tilde{\mathcal{N}}_+(-\mu, -\varphi) = \tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi)$$

Basta con tomar $\tilde{\xi} = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

En resumen:

$$\Delta(\lambda, e^{i\varphi}) = \det \begin{pmatrix} \Lambda \hat{R}^u_+ & \hat{Q} & \hat{R}^u_+ \\ -\hat{p} & \hat{q} & \hat{p} \end{pmatrix},$$

$$(\lambda, \varphi) \in \{\mathrm{Re}\, \lambda \geq 0\} \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

con

$$\begin{aligned} \hat{Q} = 2\epsilon \begin{pmatrix} \hat{e}_2 \\ 0 \end{pmatrix} &\in \mathbb{R}^{6\times 1}, \\ \hat{q} = -\lambda (D_s h)_{|s=0} &\in \mathbb{R}^{1\times 1}, \\ \hat{p} = \epsilon(0, \hat{e}_2^\top)\hat{R}^u_+(\lambda, \varphi) &\in \mathbb{C}^{1\times 3}, \\ \Lambda = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1, 1, 1) &\in \mathbb{R}^{6\times 6}, \\ \hat{R}^u_+(\lambda, \varphi) &\in \mathbb{C}^{6\times 3}. \end{aligned}$$

En resumen:

$$\Delta(\lambda, e^{i\varphi}) = \det \begin{pmatrix} \Lambda \hat{R}^u_+ & \hat{Q} & \hat{R}^u_+ \\ -\hat{p} & \hat{q} & \hat{p} \end{pmatrix},$$

$$(\lambda, \varphi) \in \{\mathrm{Re}\, \lambda \geq 0\} \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

con

$$\begin{aligned} \hat{Q} = 2\epsilon \begin{pmatrix} \hat{e}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \in \quad \mathbb{R}^{6\times 1}, \\ \hat{q} = -\lambda (D_s h)_{|s=0} \quad & \in \quad \mathbb{R}^{1\times 1}, \\ \hat{p} = \epsilon(0,\, \hat{e}_2^\top) \hat{R}^u_+(\lambda, \varphi) \quad & \in \quad \mathbb{C}^{1\times 3}, \\ \Lambda = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1, 1, 1) \quad & \in \quad \mathbb{R}^{6\times 6}, \\ \hat{R}^u_+(\lambda, \varphi) \quad & \in \quad \mathbb{C}^{6\times 3}. \end{aligned}$$

Estabilidad “unidimensional”: $\Delta(\lambda, 0) \neq 0$

Sea $(\lambda, 0) \in \mathcal{S}$ con $\tilde{\xi} = 0$, es decir, $|\lambda| = 1$. Entonces,

Ley de Maxwell:

$$\Delta_0(\lambda, 0) = C\lambda^4 \neq 0, \qquad C \neq 0$$

Ley cinética de Abeyaratne-Knowles (con $(d/ds)h_{|s=0} < 0$):

$$\Delta(\lambda, 0) = C_1(C_2 - ((d/ds)h_{|s=0})C_3)\lambda^4 = \bar{C}\lambda^4 \neq 0, \qquad \bar{C} \neq 0$$

Estabilidad “unidimensional”: $\Delta(\lambda, 0) \neq 0$

Sea $(\lambda, 0) \in \mathcal{S}$ con $\tilde{\xi} = 0$, es decir, $|\lambda| = 1$. Entonces,

Ley de Maxwell:

$$\Delta_0(\lambda, 0) = C\lambda^4 \neq 0, \qquad C \neq 0$$

Ley cinética de Abeyaratne-Knowles (con $(d/ds)h_{|s=0} < 0$):

$$\Delta(\lambda, 0) = C_1(C_2 - ((d/ds)h_{|s=0})C_3)\lambda^4 = \bar{C}\lambda^4 \neq 0, \qquad \bar{C} \neq 0$$

El índice de la curva y estabilidad

Familia de mapeos:

$$\lambda \mapsto \bar{\Delta}(\cdot, \varphi) \qquad \varphi \in [0, \pi/2];$$

en un contorno cerrado

$$\lambda \in \mathcal{C}_\rho := \mathcal{C}_\rho^+ \cup \mathcal{C}_\rho^0,$$

$$\mathcal{C}_\rho^+ := \{\lambda \in \mathbb{C} \; : \; |\lambda| = \rho, \mathrm{Re}\, \lambda > 0\},$$
$$\mathcal{C}_\rho^0 := \{\lambda \in \mathbb{C} \; : \; \lambda = i\tau, \tau \in [-\rho, +\rho]\}, \quad \rho > 0.$$

Dado que

$$|\lambda| \gg 1, \quad \Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \sim \Delta(1, 0) \neq 0,$$

basta con tomar contornos $\mathcal{C}_\rho$ con $\rho > 0$ finita.

Por la fórmula del producto para el grado de un mapeo (DEIMLING, *Nonlinear Funct. Anal.*, Springer 1985) el índice de la curva con respecto al cero determina la estabilidad de la configuración.

El índice de la curva y estabilidad

Familia de mapeos:

$$\lambda \mapsto \bar{\Delta}(\cdot, \varphi) \qquad \varphi \in [0, \pi/2];$$

en un contorno cerrado

$$\lambda \in \mathcal{C}_\rho := \mathcal{C}_\rho^+ \cup \mathcal{C}_\rho^0,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\rho^+ &:= \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, |\lambda| = \rho, \mathrm{Re}\, \lambda > 0\}, \\ \mathcal{C}_\rho^0 &:= \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, \lambda = i\tau, \tau \in [-\rho, +\rho]\}, \quad \rho > 0. \end{aligned}$$

Dado que

$$|\lambda| \gg 1, \quad \Delta(\lambda, \tilde{\xi}) \sim \Delta(1, 0) \neq 0,$$

basta con tomar contornos $\mathcal{C}_\rho$ con $\rho > 0$ finita.

Por la fórmula del producto para el grado de un mapeo (DEIMLING, *Nonlinear Funct. Anal.*, Springer 1985) el índice de la curva con respecto al cero determina la estabilidad de la configuración.

Modos de Lopatinski

Cálculo de las frecuencias de Lopatinski:

$$\pi_+(\mu) = \det\left(\mathcal{N}_+(\mu,\tilde{\xi}) + \lambda^2 I\right) = \sum_{j=0}^{6} a_j \mu^j,$$

donde

$$\begin{aligned}
a_6 &= 2\epsilon^6 \; > 0,\\
a_5 &= 0,\\
a_4 &= \lambda^2\epsilon^4(2\epsilon^2+5) + 6\epsilon^6|\tilde{\xi}|^2,\\
a_3 &= 2\epsilon^5\xi_2\lambda,\\
a_2 &= 2\lambda^4\epsilon^3(2+\epsilon^2) + \lambda^2\epsilon^4((10+3\epsilon^2)|\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2\xi_3^2) + 6\epsilon^6|\tilde{\xi}|^4,\\
a_1 &= 2\lambda^2\epsilon^3\xi_2(\lambda^2+\epsilon^2|\tilde{\xi}|^2),\\
a_0 &= \lambda^6 + \lambda^4\epsilon^2|\tilde{\xi}|^2(4+\epsilon^2) + \lambda^2\epsilon^4|\tilde{\xi}|^2((5+\epsilon^2)|\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2\xi_3^2) + 2\epsilon^6|\tilde{\xi}
\end{aligned}$$

Modos de Lopatinski

Cálculo de las frecuencias de Lopatinski:

$$\pi_+(\mu) = \det\left(\mathcal{N}_+(\mu,\tilde{\xi}) + \lambda^2 I\right) = \sum_{j=0}^{6} a_j \mu^j,$$

donde

$$\begin{aligned}
a_6 &= 2\epsilon^6 \; > 0,\\
a_5 &= 0,\\
a_4 &= \lambda^2\epsilon^4(2\epsilon^2+5) + 6\epsilon^6|\tilde{\xi}|^2,\\
a_3 &= 2\epsilon^5\xi_2\lambda,\\
a_2 &= 2\lambda^4\epsilon^3(2+\epsilon^2) + \lambda^2\epsilon^4((10+3\epsilon^2)|\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2\xi_3^2) + 6\epsilon^6|\tilde{\xi}|^4,\\
a_1 &= 2\lambda^2\epsilon^3\xi_2(\lambda^2+\epsilon^2|\tilde{\xi}|^2),\\
a_0 &= \lambda^6 + \lambda^4\epsilon^2|\tilde{\xi}|^2(4+\epsilon^2) + \lambda^2\epsilon^4|\tilde{\xi}|^2((5+\epsilon^2)|\tilde{\xi}|^2 + \epsilon^2\xi_3^2) + 2\epsilon^6|\tilde{\xi}
\end{aligned}$$

i.e. cálculo de los valores propios de

$$\begin{pmatrix} -a_5/a_6 & -a_4/a_6 & -a_3/a_6 & -a_2/a_6 & -a_1/a_6 & -a_0/a_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Standard factorización de Schur.)

Ensamblando $\hat{\mathbf{R}}^u$

¿Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

- Paso 1: Calcular los 3 modos inestables (para $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$), μ_+^u.
- Paso 2: Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu,\varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- Paso 3: Con $Y \in \ker\left(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu,\varphi) + \lambda^2 I\right)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Ensamblando $\hat{\mathbf{R}}^u$

¿Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

- Paso 1: Calcular los 3 modos inestables (para Re $\lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para Re $\lambda = 0$), μ_+^u.
- Paso 2: Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- Paso 3: Con $Y \in \ker\left(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I\right)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Ensamblando $\hat{\mathbf{R}}^u$

¿Cómo calcular una representación válida, con rango máximo, de $\hat{\mathbf{R}}^u$?

- Paso 1: Calcular los 3 modos inestables (para Re $\lambda > 0$, y los 3 modos inestables/neutralmente inestables (para Re $\lambda = 0$), μ_+^u.
- Paso 2: Calcular el núcleo de $\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I \subset \mathbb{C}^3$ (simple algoritmo del producto cruz; funciona también con decomposición SVD).
- Paso 3: Con $Y \in \ker\left(\tilde{\mathcal{N}}_+(\mu, \varphi) + \lambda^2 I\right)$, ensambla cada columna del campo matricial:

$$R = \begin{pmatrix} Y \\ i(\mu B_1^{1\pm} + \xi_2 B_2^{1\pm} + \xi_3 B_3^{1\pm})Y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es válida.

Normalización :

$$\bar{\Delta} := \frac{\Delta}{-|R|}$$

con

$$|R| := \det\left(\hat{R}^s_- \quad \hat{R}^u_+\right) = \det\left(\Lambda \hat{R}^u_+ \quad \hat{R}^u_+\right).$$

Ventajas:

- Previene "loops" innecesarios: $\Delta \sim \lambda^p$.
- Previene puntos rama: Si el Δ calculado se desvía de otra representación "admisible" (**R** con rango máximo), el denominador $|R|$ se desvía de $\det\left(R^s_- \quad R^u_+\right)$ con rango máximo del mismo modo, y el mismo factor aparece en el numerador y en el denominador, cancelándose.

Normalización :

$$\bar{\Delta} := \frac{\Delta}{-|R|}$$

con

$$|R| := \det\big(\hat{R}^s_- \quad \hat{R}^u_+\big) = \det\big(\Lambda \hat{R}^u_+ \quad \hat{R}^u_+\big).$$

Ventajas:

- Previene "loops" innecesarios: $\Delta \sim \lambda^p$.
- Previene puntos rama: Si el Δ calculado se desvía de otra representación "admisible" (**R** con rango máximo), el denominador $|R|$ se desvía de $\det\big(R^s_- \quad R^u_+\big)$ con rango máximo del mismo modo, y el mismo factor aparece en el numerador y en el denominador, cancelándose.

Normalización :

$$\bar{\Delta} := \frac{\Delta}{-|R|}$$

con

$$|R| := \det\left(\hat{R}^s_- \quad \hat{R}^u_+\right) = \det\left(\Lambda \hat{R}^u_+ \quad \hat{R}^u_+\right).$$

Ventajas:

- Previene "loops" innecesarios: $\Delta \sim \lambda^p$.
- Previene puntos rama: Si el Δ calculado se desvía de otra representación "admisible" (**R** con rango máximo), el denominador $|R|$ se desvía de $\det\left(R^s_- \quad R^u_+\right)$ con rango máximo del mismo modo, y el mismo factor aparece en el numerador y en el denominador, cancelándose.

Bajo esta normalización:

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_0 - \lambda(D_s h), \quad (***)$$

donde Δ_0 es el determinante de Lopatinski normalizado asociado a la interfase sujeta a la ley de Maxwell.

Todo lo que debemos hacer es calcular $\hat{R}^u_+$, rearreglar sus entradas en los determinantes $D_{(1)}$ y $D_{(2)}$, y evaluar el cociente $\bar{\Delta}_0 = -2\epsilon^2 D_{(1)}/D_{(2)}$.

Relaciones cinéticas lineales

Relaciones cinéticas propuestas por ABEYARATNE Y KNOWLES (1990), para procesos irreversibles cerca del equilibrio termodinámico:

$$\mathcal{F} = \frac{s}{M}, \qquad M > 0$$

$M > 0$ es un coeficiente de mobilidad.

$$h = -s/M, \qquad D_s h = -1/M < 0.$$

En el límite $M \to +\infty$: ley cinética de Maxwell.

Relaciones cinéticas lineales

Relaciones cinéticas propuestas por ABEYARATNE Y KNOWLES (1990), para procesos irreversibles cerca del equilibrio termodinámico:

$$\mathcal{F} = \frac{s}{M}, \qquad M > 0$$

$M > 0$ es un coeficiente de mobilidad.

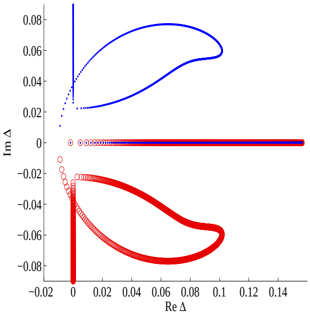
$$h = -s/M, \qquad D_s h = -1/M < 0.$$

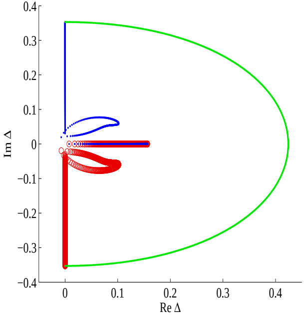
En el límite $M \to +\infty$: ley cinética de Maxwell.

Valores de los parámetros:

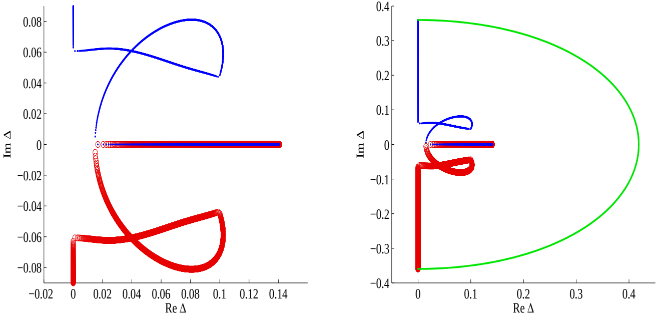
$$
\begin{aligned}
\epsilon = 0.5 \quad &- \quad \text{parámetro material},\\
\varphi = 0,\ \pi/8, \pi/4,\ 3\pi/8,\ \pi/2 \quad &- \quad \text{valores transverasles de } \tilde{\xi} = e^{i\varphi},\\
\rho = 2 \quad &- \quad \text{radio},\\
M = +\infty, M = 10 \quad &- \quad \text{ley de Maxwell vs. ley lineal}.
\end{aligned}
$$

Resultados: La relación de Maxwell $M = +\infty$

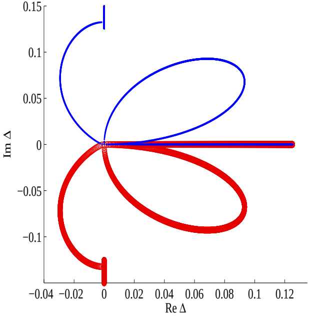


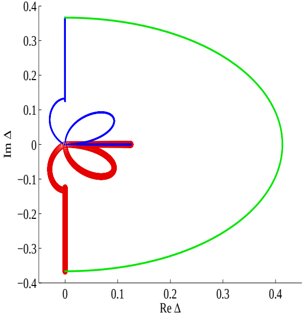


$$\phi = 0$$


0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
Im Δ
−0.02 0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14
Re Δ
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
Im Δ
0 0.1 0.2 0.3 0.4
Re Δ

$$\phi = \pi/4$$

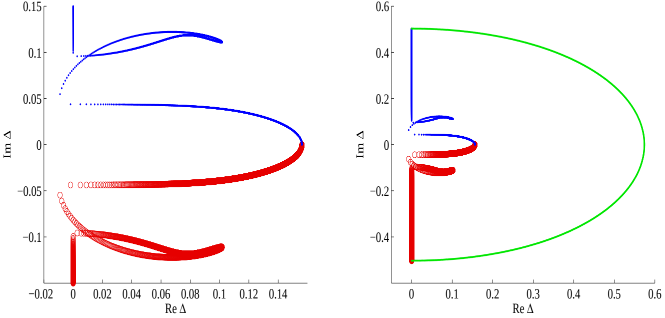

0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
Im Δ
−0.04
−0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
Re Δ


0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
Im Δ
0
0.1
0.2
0.3
0.4
Re Δ

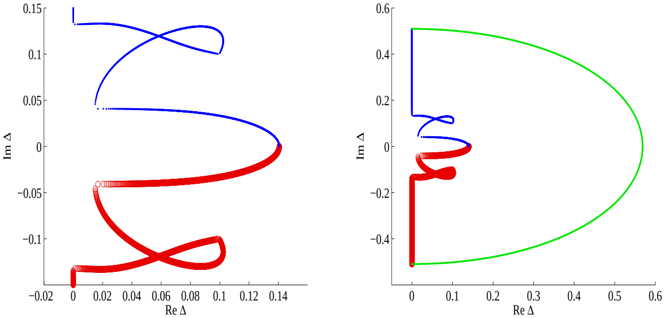
$$\phi = \pi/2$$

Resultados: Relaciones cinéticas lineales con $0 < M < +\infty$

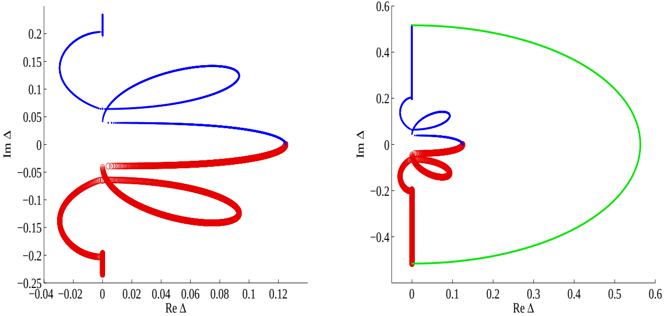
Ejemplo: M = 10



$$\phi = 0$$


0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
Im Δ
−0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
Re Δ
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
Im Δ
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
Re Δ

$$\phi = \pi/4$$


0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
−0.25
Im Δ
−0.04 −0.02 0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12
Re Δ
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
Im Δ
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6
Re Δ

$$\phi = \pi/2$$

Gracias.