Seminario de Matemáticas Aplicadas I
Tarea 1

Semestre 2025-2

1. Cinética de Michaelis-Menten. Considera el sistema de Michaelis-Menten en la aproximación cuasi-estacionaria (vista en clase),

$$\frac{dP}{dt} = \frac{V_{\max} S}{S + K_m}, \tag{1}$$

donde $V_{\max}$ es constante y K_m es la constante de Michaelis. La velocidad de la reacción se define como el lado derecho de la ecuación (1), es decir,

$$V = \frac{V_{\max} S}{S + K_m}. \tag{2}$$

(a) Explica (en términos heurísticos) porqué $V_{\max}$ es la velocidad de reacción "maximal". Muestra que cuando $S = K_m$ entonces V es igual a la mitad de su valor maximal.

(b) Demuestra la siguiente propiedad interesante de la velocidad V. Suponiendo que definimos S_p como el valor de S que produce una velocidad de reacción que es $p\,\%$ de $V_{\max}$. Demuestra que $S_{90}/S_{10} = 81$, independientemente de los valores de los otros parámetros del modelo. (*Sugerencia:* Resuelve para S_{90} de la ecuación $9V_{\max}/10 = V_{\max}S/(S + K_m)$. Resuelve para S_{10} de igual forma y calcula la razón.)

2. Sistema cinético de tipo activador-inhibidor. Considera el siguiente sistema adimensional de tipo activador-inhibidor, descrito por el sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a - bu + \frac{u^2}{v}, \\ \frac{dv}{dt} &= u^2 - v, \end{aligned}$$

donde $a, b > 0$ son constantes positivas. ¿Quién es el activador y quién es el inhibidor en el sistema? ¿Qué significan los términos nolineales (es decir, qué mecanismo de reacción química representan)? Haz un dibujo de las *nulclinas* (lugar geométrico donde $du/dt = 0$ o bien $dv/dt = 0$). ¿Es posible tener estados estacionarios constantes con este tipo de cinética? ¿Qué cambia si sustituímos el término u^2/v por un término que modela inhibición del sustrato, es decir, $u^2/(v(1 + Ku^2))$?

3. Ecuación de McKendrick bajo la hipótesis estacionaria. Considera el modelo de McKendrick para poblaciones estructuradas por la edad bajo la hipótesis estacionaria,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial a} + \frac{\partial N}{\partial t} + \mu(a)N &= 0, && a > 0,\ t > 0, \\ N(a, 0) &= f(a), && a > 0, \\ N(0, t) = g(t) &= \int_0^\infty \lambda(a)N(a, t)\, da, && t > 0, \end{aligned} \tag{3}$$

donde f, λ y μ son funciones conocidas que dependen sólo de la edad $a > 0$.

(a) Muestra que una función *autosimilar* de la forma $N(a, t) = e^{\gamma t} r(a)$ es solución de (3) siempre que γ satisface

$$\int_0^\infty \lambda(a) \exp\Big(-\gamma a - \int_0^a \mu(s)\, ds\Big)\, da = 1.$$

(b) Muestra que si la tasa de natalidad $\lambda(a) = 0$ es cero, excepto en un intervalo muy pequeño alrededor de $a_0 > 0$, entonces la población tiende a la extinción sin importar la tasa de mortalidad $\mu(a)$.

(c) Si la tasa de mortalidad es alta y lineal como función de a, ¿qué se puede decir sobre la tasa de natalidad $\lambda(a)$ para que la población no se extinga?

(d) Verifica que la *función de supervivencia* (la probabilidad de un individuo de llegar a edad $a > 0$), definida como

$$\sigma(a) = \exp\left(- \int_0^a \mu(s)\, ds \right), \qquad a > 0,$$

también es solución de la ecuación diferencial de McKendrick en (3). Interpreta esta observación en términos del modelo poblacional.

4. Transporte de señales en un axon. El modelo de Fitzhugh-Nagumo con dependencia espacial (véanse [1, 2]) modela la transmisión de señales en un axon, y tiene la forma

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u - \tfrac{1}{2}), \tag{4}$$

donde u representa el potencial en la membrana celular y $0 \leq x \leq L$, $t > 0$. El modelo está sujeto a condiciones de frontera de tipo Neumann,

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \qquad \forall\, t > 0.$$

(a) Determina el sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias que describe soluciones estacionarias de la ecuación (4).

(b) Encuentra los puntos de equilibrio del sistema del inciso (a) y estudia su estabilidad.

(c) Muestra que la función $H(u, u_x)$, donde

$$H(u,q) := \tfrac{1}{2}q^2 - \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{2}u^3 - \tfrac{1}{4}u^2,$$

es un Hamiltoniano del sistema encontrado en (a).

(d) Haz un dibujo (o esquema) del retrato fase del sistema en el plano (u, u_x).

(e) Encuentra los estados estacionarios que satisfacen las condiciones de frontera de Neumann. Dibuja las soluciones como funciones de x. Da una interpretación biológica.

Referencias

[1] R. Fitzhugh, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophys. J. **1** (1961), no. 6, pp. 445–466.

[2] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. IRE **50** (1962), no. 10, pp. 2061–2070.